

静安区 2024 年初中学业质量调研

九年级数学试卷

(满分 150 分, 100 分钟完成)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

[每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. 下列各数中, 是无理数的为 ()

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt[3]{3}$

C. π^0

D. $\frac{1}{7}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是无理数, 零指数幂及数的开方法则. 根据无理数的定义, 零指数幂及数的开方法则对各选项进行逐一分析即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{4}=2$, 2 是有理数, 本选项不符合题意;

B、 $\sqrt[3]{3}$ 是无理数, 本选项符合题意;

C、 $\pi^0=1$, 1 是有理数, 本选项不符合题意;

D、 $\frac{1}{7}$ 是有理数, 本选项不符合题意.

故选: B.

2. 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^{-1}$

B. $\sqrt{a^2} = a$

C. $(a^2)^3 = a^5$

D. $a^3 + a^3 = a^6$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是同底数幂的除法, 二次根式的性质与化简, 幂的乘方与积的乘方, 合并同类项. 分别根据同底数幂的除法法则, 二次根式的性质与化简, 幂的乘方与积的乘方法则, 合并同类项的法则对各选项进行逐一判断即可.

【详解】解: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^{-1}$, 正确, 本选项符合题意;

B、 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，原计算错误，本选项不符合题意；

C、 $(a^2)^3 = a^6$ ，原计算错误，本选项不符合题意；

D、 $a^3 + a^3 = 2a^3$ ，原计算错误，本选项不符合题意.

故选：A.

3. 下列图形中，对称轴条数最多的是（ ）

A. 等腰直角三角形

B. 等腰梯形

C. 正方形

D. 正三角形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了轴对称图形的概念，即在平面内，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴. 先根据轴对称图形的定义确定各选项图形的对称轴条数，然后比较即可选出对称轴条数最多的图形.

【详解】A：等腰直角三角形有 1 条对称轴；

B：等腰梯形有 1 条对称轴；

C：正方形有 4 条对称轴；

D：正三角形有 3 条对称轴；

综上所述正方形对称轴条数最多，

故选：C.

4. 一次函数 $y = kx + b$ 中，如果 $k < 0, b \geq 0$ ，那么该函数的图像一定不经过（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】C

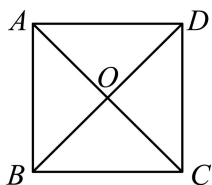
【解析】

【分析】本题考查了一次函数的性质，根据一次函数图象与系数的关系进行判断即可.

【详解】解：当一次函数 $y = kx + b$ 中 $k < 0, b \geq 0$ ，该函数的图象一定不经过第三象限，

故选：C.

5. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，那么下列条件中，能判断菱形 $ABCD$ 是正方形的为（ ）



A. $\angle AOB = \angle AOD$

B. $\angle ABO = \angle ADO$

C. $\angle BAO = \angle DAO$

D. $\angle ABC = \angle BCD$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查正方形的判定. 根据菱形到现在和正方形的判定定理即可得到结论.

【详解】 解: A、 $\because \angle AOB = \angle AOD$, $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$,

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, 故不能判断菱形 $ABCD$ 是正方形; 故 A 不符合题意;

B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC, \quad \angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

故不能判断菱形 $ABCD$ 是正方形; 故 B 不符合题意;

C、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD, \quad AO \perp BD,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DAO,$$

故不能判断菱形 $ABCD$ 是正方形; 故 C 不符合题意;

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \text{ 平行于 } CD,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是正方形, 故 D 符合题意.

故选: D.

6. 对于命题: ①如果两条弧相等, 那么它们所对的圆心角相等; ②如果两个圆心角相等, 那么它们所对的弧相等. 下列判断正确的是 ()

A. ①是真命题, ②是假命题

B. ①是假命题, ②是真命题

C. ①、②都是真命题

D. ①、②都是假命题

【答案】 A

【解析】

【分析】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．根据圆心角、弧、弦的关系定理判断即可．

【详解】解：①如果两条弧相等，那么它们所对的圆心角相等，故本小题说法是真命题；

②在同圆或等圆中，如果两个圆心角相等，那么它们所对的弧相等，故本小题说法是假命题

故选：A.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

[在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. 计算： $|1-\sqrt{2}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{2}-1$

【解析】

【分析】 本题主要考查实数的化简，运用绝对值性质进行化简即可．

【详解】 解： $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$.

故答案为： $\sqrt{2}-1$.

8. 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【详解】 由题意得： $x+1 \neq 0$ ，解得： $x \neq -1$ ，

故答案为 $x \neq -1$.

9. 方程 $(x-1)\sqrt{x-2} = 0$ 的根为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了无理方程的意义．依据题意， $x \geq 2$ ，从而 $x-1 > 0$ ，可得 $\sqrt{x-2} = 0$ ，进而计算可以得解．

【详解】 解： 由题意得， $x-2 \geq 0$ ，

$\therefore x \geq 2$.

$\therefore x-1 > 0$.

$\therefore \sqrt{x-2} = 0$.

$\therefore x-2 = 0$.

$$\therefore x = 2.$$

故答案为: $x = 2$.

10. 如果一个正多边形的内角和是 720° , 那么它的中心角是_____度.

【答案】 60

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形的内角和、边数、中心角, 先根据正多边形的内角和求出边数, 再求其中心角的度数即可.

【详解】 解: 设这个正多边形的边数为 n ,

由题意得, $(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ$,

解得 $n = 6$,

$\therefore$ 正六边形的中心角是 $360^\circ \div 6 = 60^\circ$,

故答案为: 60.

11. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查一元二次方程定义和根的判别式, 根据一元二次方程根的判别式可进行求解.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4ac = 4 - 4a \geq 0, \text{ 而且 } a \neq 0$$

解得: $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$;

故答案为: $a \leq 1$ 且 $a \neq 0$.

12. 反比例函数 $y = \frac{k^2 + 1}{x}$ 的图像在第_____象限.

【答案】 一、三

【解析】

【分析】 根据 $k^2 + 1 > 0$, 判定函数图像的分布即可.

【详解】 解: $\because k^2 + 1 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数的图像在第一、三象限.

故答案为: 一、三.

【点睛】 本题考查了反比例函数的图像分布，熟练判定反比例函数系数的正负性是解题的关键.

13. 把一枚均匀的硬币连续抛掷两次，两次正面朝上的概率是_____.

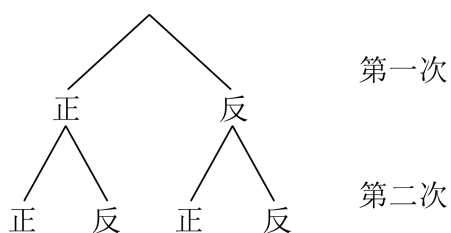
【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 举出所有情况，看正面都朝上的情况数占总情况数的多少即可.

【详解】 解：共 4 种情况，正面都朝上的情况数有 1 种，所以概率是 $\frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$.



考点：列表法与树状图法.

14. 一位短跑选手 10 次 100 米赛跑的成绩如下：2 次 $12''3$ ，1 次 $12''1$ ，3 次 $12''7$ ，4 次 $12''5$ ，那么这 10 个数据的中位数是_____.

【答案】 $12''5$

【解析】

【分析】 本题主要考查中位数，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 据此求解即可.

【详解】 解：这组数据中第 5、6 个数据分别为 $12''5$ ， $12''5$ ，

所以这 10 个数据的中位数是 $12''5$ ，

故答案为： $12''5$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 AC 、 BC 的中点，设 $\overrightarrow{DE} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DF} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

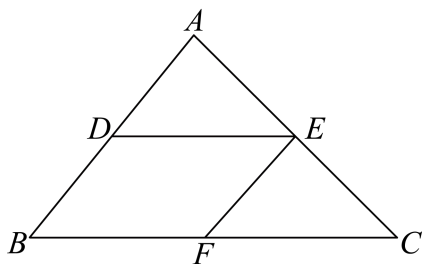
【答案】 $2\vec{a} - 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 首先利用三角形中位线定理求得 $EF = \frac{1}{2}AB$ ，则 $AB = 2EF$ ；然后由三角形法则求得

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE}$. 代入求值即可.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\because$ 点 E 、 F 分别是边 AC 、 BC 的中点，



$\therefore FE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AB.$$

$$\therefore AB = 2EF.$$

$$\because \overrightarrow{DE} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{DF} = \vec{b},$$

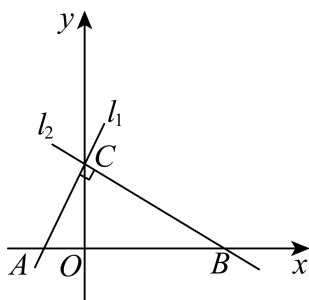
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = \vec{a} - \vec{b}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EF} = 2\vec{a} - 2\vec{b}.$$

故答案为： $2\vec{a} - 2\vec{b}$.

【点睛】本题主要考查了平面向量和三角形中位线定理，解题的突破口是利用三角形法则求得 $\overrightarrow{EF} = \vec{a} - \vec{b}$.

16. 如图，在平面直角坐标系中，已知直线 l_1 与直线 l_2 交于点 $C(0,1)$ ，它们的夹角为 90° . 直线 l_1 交 x 负半轴于点 A ，直线 l_2 与 x 正半轴交于点 $B(2,0)$ ，那么点 A 的坐标是_____.



【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 或 $(-0.5, 0)$

【解析】

【分析】本题考查了两直线相交的问题，点的坐标，相似三角形的判定与性质. 根据已知条件证得 $\triangle ACO \sim \triangle CBO$ ，再根据相似三角形的性质即可求出 AO 的长，从而得出点 A 的坐标.

【详解】解：∵ $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ,$$

∵ x 轴 $\perp$ y 轴,

$$\therefore \angle COA = \angle COB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ACO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACO,$$

$$\therefore \triangle ACO \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{CO}{BO} = \frac{AO}{CO},$$

∵ 点 $C(0,1)$, 点 $B(2,0)$,

$$\therefore CO = 1, \quad BO = 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{AO}{1},$$

$$\therefore AO = \frac{1}{2},$$

∵ 点 A 在 x 轴的负半轴,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标是 } \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

故答案为: $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

17. 如果半径分别为 r 和 2 的两个圆内含, 圆心距 $d = 3$, 那么 r 的取值范围是_____.

【答案】 $r > 5$

【解析】

【分析】根据圆心距 d 与两圆内含的性质得出 d 的取值范围即可. 本题考查了圆与圆的位置关系, 当 $d > R + r$ 时, 两圆外离; 当 $d = R + r$ 时, 两圆外切; 当 $d < R + r$ 时, 两圆相交; 当 $d = R - r$ 时, 两圆内切; 当 $d < R - r$ 时, 两圆内含;

【详解】解: ∵ 半径分别为 r 和 2 的两个圆内含, 圆心距 $d = 3$,

$$\therefore d < r - 2,$$

$$\therefore d = 3,$$

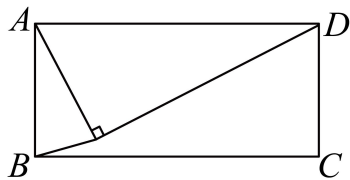
$$\therefore 3 < r - 2,$$

$$\therefore r > 5$$

$\therefore r$ 的取值范围是 $r > 5$,

故答案为: $r > 5$.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 17$, 将该矩形绕着点 A 旋转, 得到四边形 $AB_1C_1D_1$, 使点 D 在直线 B_1C_1 上, 那么线段 BB_1 的长度是_____.



【答案】 $\frac{16\sqrt{17}}{17}$ 或 $\frac{64\sqrt{17}}{17}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质和解三角形, 注意分类讨论, 正确画出图形是解题关键.

根据旋转的性质可得 $B'D = \sqrt{AD^2 - B'A^2} = 15$, $\angle HAB' = \angle ADB'$, 再由解三角形求出 $AH = AB' \times \cos \angle HAB' = \frac{120}{17}$, $B'H = AB' \times \sin \angle HAB' = \frac{64}{17}$, 进而在 $\text{Rt}\triangle BB'H$ 中求出线段 BB_1 的长度.

【详解】 解: 由旋转性质可知: $AB' = AB = 8$, $\angle AB'C' = \angle ABC = 90^\circ$, 当点 D 在线段 B_1C_1 上时, 如图 1,

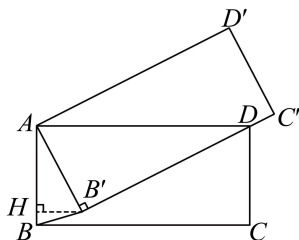


图1

$$\therefore B'D = \sqrt{AD^2 - B'A^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15,$$

$$\therefore \sin \angle ADB' = \frac{8}{17}, \quad \cos \angle ADB' = \frac{15}{17},$$

$$\because \angle BAB' + \angle DAB' = 90^\circ, \quad \angle ADB' + \angle DAB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAB' = \angle ADB',$$

$$\therefore AH = AB' \times \cos \angle BAB' = 8 \times \frac{15}{17} = \frac{120}{17},$$

$$B'H = AB' \times \sin \angle BAB' = 8 \times \frac{8}{17} = \frac{64}{17}$$

$$\therefore BH = AB - AH = 8 - \frac{120}{17} = \frac{16}{17}$$

$$\therefore B'B = \sqrt{HB^2 + B'H^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{17}\right)^2 + \left(\frac{64}{17}\right)^2} = \frac{16\sqrt{17}}{17},$$

当点 D 在线段 C_1B_1 延长线上时, 如图 2,

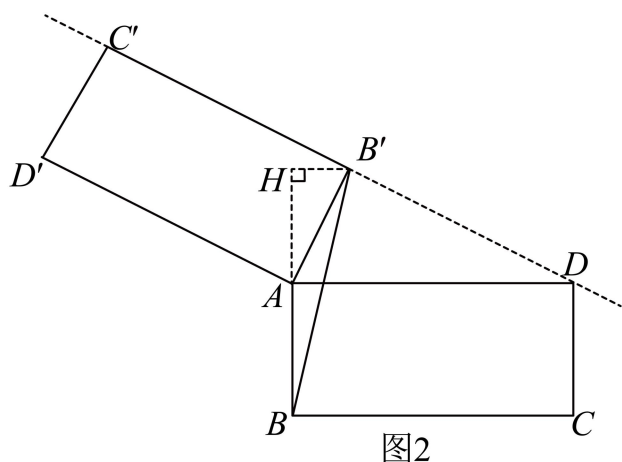


图2

$$\text{同理可得: } AH = AB' \times \cos \angle HAB' = 8 \times \frac{15}{17} = \frac{120}{17},$$

$$B'H = AB' \times \sin \angle HAB' = 8 \times \frac{8}{17} = \frac{64}{17}$$

$$BH = AB + AH = 8 + \frac{120}{17} = \frac{256}{17}$$

$$\therefore B'B = \sqrt{HB^2 + B'H^2} = \sqrt{\left(\frac{256}{17}\right)^2 + \left(\frac{64}{17}\right)^2} = \frac{64\sqrt{17}}{17},$$

$$\text{故答案为: } \frac{16\sqrt{17}}{17} \text{ 或 } \frac{64\sqrt{17}}{17}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

[将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

$$19. \text{先化简, 再求值: } \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} \div \frac{x+2}{x+1} - \frac{x}{x-2}, \text{ 其中 } x = \sqrt{2}.$$

【答案】 $\frac{1}{x-2}, -\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

【解析】

【分析】 本题考查的是分式的化简求值. 根据分式的除法法则、减法法则把原式化简, 把 x 的值代入计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} \div \frac{x+2}{x+1} - \frac{x}{x-2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} \cdot \frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x-2} \end{aligned}$$

$$= \frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x-2}$$

$$= \frac{1}{x-2},$$

当 $x = \sqrt{2}$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)} = -\frac{\sqrt{2}+2}{2}.$

20. 解不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2} > -\frac{x}{6} \end{cases}$, 并写出它的整数解.

【答案】不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$, 不等式组的整数解为: 0, 1, 2, 3.

【解析】

【分析】本题考查求不等式组的整数解. 用到的知识点为: 求不等式组的解集, 应遵循以下原则: 同大取较大, 同小取较小, 小大大小中间找, 大大小小解不了. 求出每个不等式的解集, 进而得到不等式组的公共解集, 从公共解集中找到整数解即可.

【详解】解: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \text{ ①} \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2} > -\frac{x}{6} \text{ ②} \end{cases}.$

解不等式①得: $-x \geq -3,$

$$x \leq 3.$$

解不等式②得: $8x + 9 > -x,$

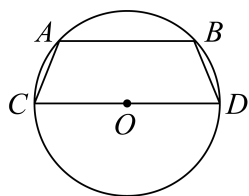
$$9x > -9,$$

$$x > -1.$$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $-1 < x \leq 3.$

$\therefore$ 不等式组的整数解为: 0, 1, 2, 3.

21. 已知: 如图, CD 是 $\odot O$ 的直径, AC 、 AB 、 BD 是 $\odot O$ 的弦, $AB \parallel CD$.



(1) 求证: $AC = BD$;

(2) 如果弦 AB 长为 8, 它与劣弧 $\widehat{AB}$ 组成的弓形高为 2, 求 CD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 10

【解析】

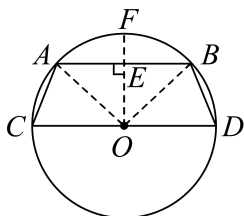
【分析】 本题主要考查垂径定理，勾股定理和全等三角形的判定与性质：

(1) 作 $OE \perp AB$ 于点 E ，交 $\odot O$ 于点 F ，连接 AO, BO ，运用 SAS 证明 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ ，可得出结论；

(2) 设 $\odot O$ 的半径为 R ，在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中，运用勾股定理列出方程求出 R 的值即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：作 $OE \perp AB$ 于点 E ，交 $\odot O$ 于点 F ，连接 AO, BO ，如图，



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore OE \perp CD,$$

$$\therefore \angle COE = \angle DOE,$$

$$\because AO = BO, OE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOE,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD,$$

$$\because AO = BO, CO = DO,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BD;$$

【小问 2 详解】

解：设 $\odot O$ 的半径为 R ，则 $OE = R - 2$ ，

又 $AB = 8$ ，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中， $OB^2 = OE^2 + BE^2$ ，

$$\text{即： } R^2 = (R - 2)^2 + 4,$$

解得， $R = 5$ ，

$$\therefore CD = 2R = 2 \times 5 = 10.$$

22. 某区连续几年的 GDP（国民生产总值）情况，如下表所示：

年份	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
GDP（亿元）	10.0	11.0	12.4	13.5	■

我们将这些数据，在平面直角坐标系内，用坐标形式表示出来，它们分别为点：A(1,10.0)、B(2,11.0)、C(3,12.4)、D(4,13.5)。如果运用函数与统计等知识预测该区下一年的 GDP，可以尝试选择直线 AB、直线 AC 等函数模型来进行分析。

(1) 根据点 A、B 的坐标，可得直线 AB 的表达式为 $y = x + 9$ 。请根据点 A、C 坐标，求出直线 AC 的表达式；

(2) 假设经济发展环境和条件不变，要预测该区第五年的 GDP 情况，可以参考方差等相关知识，分析选用哪一函数模型进行预测较为合适。

(说明：在计算与绘图时，当实际数据绘制的点与模型上对应的点位置越接近时，模型越适宜。我们可通过计算一组 GDP 所有实际值偏离图像上对应点纵坐标值的程度，即偏离方差，来进行模型分析，一般偏离方差越小越适宜。)

例如，分析直线 AB，即 $f(x) = x + 9$ 上的点：可知 $f(1) = 10, f(2) = 11, f(3) = 12, f(4) = 13$ ，求得偏离方差 $S_{AB}^2 = \frac{1}{4}[(10-10)^2 + (11-11)^2 + (12.4-12)^2 + (13.5-13)^2] = 0.1025$ 。

请依据以上方式，求出关于直线 AC 的偏离方差值： $S_{AC}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

问题：你认为在选用直线 AB 与直线 AC 进行预测的两个方案中，相对哪个较为合适？

请写出所选直线的表达式： $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

根据此函数模型，预估该区第五年的 GDP 约为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 百亿元。

【答案】 (1) $y = 1.2x + 8.8$

(2) 0.0125, $y = 1.2x + 8.8$, 14.8

【解析】

【分析】 本题考查一次函数和方差的应用，解题的关键是理解题意，正确运用。

(1) 设直线 AC 的表达式为 $y = kx + b$ ，代入即可作答；

(2) 分析直线 AC ，即 $g(x) = 1.2x + 8.8$ ，分别求出 $g(1)$ ， $g(2)$ ， $g(3)$ ， $g(4)$ ，进而求出偏离方差 S_{AC}^2 ；

根据偏离方差的实际意义即可写出所选直线的表达式；根据函数模型代入 $x = 5$ ，作答即可。

【小问 1 详解】

解：设直线 AC 的表达式为 $y = kx + b$ ，

$$\text{根据题意} \begin{cases} k + b = 10 \\ 3k + b = 12.4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1.2 \\ b = 8.8 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y = 1.2x + 8.8$ ；

【小问 2 详解】

分析直线 AC ，即 $g(x) = 1.2x + 8.8$ ，

$$\therefore g(1) = 1.2 \times 1 + 8.8 = 10,$$

$$g(2) = 1.2 \times 2 + 8.8 = 11.2,$$

$$g(3) = 1.2 \times 3 + 8.8 = 12.4,$$

$$g(4) = 1.2 \times 4 + 8.8 = 13.6$$

$$\therefore \text{偏离方差 } S_{AC}^2 = \frac{1}{4}[(10 - 10)^2 + (11 - 11.2)^2 + (12.4 - 12.4)^2 + (13.5 - 13.6)^2] = 0.0125,$$

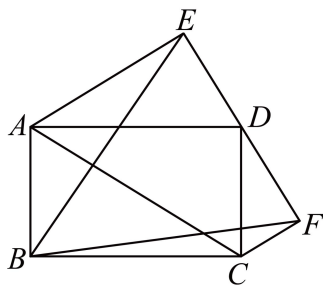
$$\therefore 0.0125 < 0.1025,$$

$\therefore$ 直线 AC 更合适，

$$\text{当 } x = 5 \text{ 时， } g(5) = 1.2 \times 5 + 8.8 = 14.8,$$

故答案为：0.0125， $y = 1.2x + 8.8$ ，14.8.

23. 已知：如图，直线 EF 经过矩形 $ABCD$ 顶点 D ，分别过顶点 A 、 C 作 EF 的垂线，垂足分别为点 E 和点 F ，且 $DE = DF$ ，连接 AC 。



(1) 求证： $AD^2 = AE \cdot AC$ ；

(2) 连接 BE 和 BF ，求证： $BE = BF$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

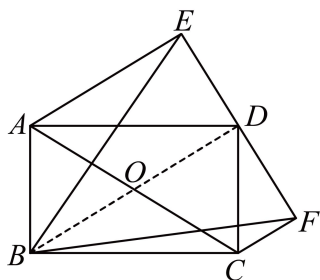
【分析】 本题主要考查了矩形的性质和相似三角形的判定和性质，根据梯形中位线定理得出 $OD \parallel AE$ 是解题关键.

(1) 连接 BD 交 AC 于点 O , 得 OD 是梯形 $AEFC$ 的中位线, 进而可得 $OD \parallel AE$, 再证明 $\triangle AED \sim \triangle ADC$, 由相似三角形性质即可得出结论,

(2) 根据 BD 垂直平分 EF 即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AC = BD, \quad OA = OC = OD = \frac{1}{2}AC, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because CF \perp EF, \quad AE \perp EF,$$

$$\therefore AE \parallel CF,$$

$$\because DE = DF, \quad OA = OC,$$

$$\therefore OD \parallel AE,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle ODA,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle EAD,$$

$$\text{又} \because AE \perp EF,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}, \quad \text{即 } AD^2 = AE \cdot AC,$$

【小问 2 详解】

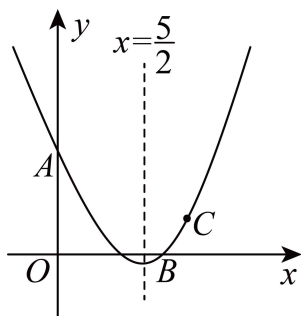
由 (1) 得 $OD \parallel AE$, $AE \perp EF$,

$$\therefore OD \perp EF,$$

$$\text{又} \because DE = DF,$$

$$\therefore BE = BF$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线关于直线 $x = \frac{5}{2}$ 对称, 且经过点 $A(0, 3)$ 和点 $B(3, 0)$, 横坐标为 4 的点 C 在此抛物线上.



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 联结 AB 、 BC 、 AC , 求 $\tan \angle BAC$ 的值;

(3) 如果点 P 在对称轴右方的抛物线上, 且 $\angle PAC = 45^\circ$, 过点 P 作 $PQ \perp y$ 轴, 垂足为 Q , 请说明 $\angle APQ = \angle BAC$, 并求点 P 的坐标.

【答案】 (1) 该抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$;

(2) $\tan \angle BAC = \frac{1}{3}$

(3) 点 P 的坐标为 $\left(\frac{17}{3}, \frac{44}{9}\right)$.

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法即可求得答案;

(2) 先证得 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形, 可得 $\angle ABO = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}OA = 3\sqrt{2}$, 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于 E , 则 $\angle BEC = 90^\circ$, $CE = 1$, $OE = 4$, 进而证得 $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形, 可得 $\angle CBE = 45^\circ$, $BC = \sqrt{2}CE = \sqrt{2}$, 推出 $\angle ABC = 90^\circ$, 再运用三角函数定义即可求得答案;

(3) 连接 AB , 先证得 $\angle APQ = \angle BAC$, 得出 $\tan \angle APQ = \tan \angle BAC = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{AQ}{PQ} = \frac{1}{3}$, 设 $PQ = m$, 则 $AQ = \frac{1}{3}m$, 可得 $OQ = 3 + \frac{1}{3}m$, 得出 $P\left(m, 3 + \frac{1}{3}m\right)$, 代入抛物线解析式求得 $m = \frac{17}{3}$, 即可求得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线关于直线 $x = \frac{5}{2}$ 对称,

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y = a\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + k$, 把 $A(0, 3)$ 、 $B(3, 0)$ 代入,

$$\text{得: } \begin{cases} \frac{25}{4}a + k = 3 \\ \frac{1}{4}a + k = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{8} \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3,$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 在 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \text{ 中, 令 } x = 4, \text{ 得 } y = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{5}{2} \times 4 + 3 = 1,$$

$$\therefore C(4, 1),$$

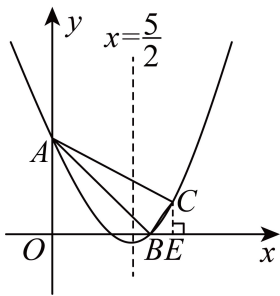
$$\therefore A(0, 3)、B(3, 0),$$

$$\therefore OA = OB = 3,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ABO = 45^\circ, \quad AB = \sqrt{2}OA = 3\sqrt{2},$$

如图, 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于 E , 则 $\angle BEC = 90^\circ$, $CE = 1$, $OE = 4$,



$$\therefore BE = OE - OB = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$\therefore \triangle BCE$ 是等腰直角三角形,

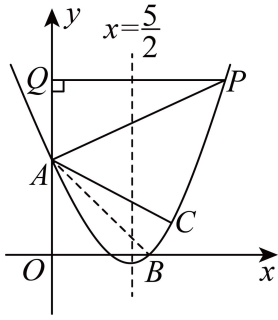
$$\therefore \angle CBE = 45^\circ, \quad BC = \sqrt{2}CE = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle ABO - \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3};$$

【小问 3 详解】

证明：如图，连接 AB ，



由 (2) 知 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ,$$

$$\because \angle PAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ + \angle BAC = 180^\circ - \angle BAO - \angle PAC = 90^\circ,$$

$$\because PQ \perp y \text{ 轴},$$

$$\therefore \angle PQA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ + \angle APQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APQ = \angle BAC,$$

$$\therefore \tan \angle APQ = \tan \angle BAC = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AQ}{PQ} = \frac{1}{3},$$

$$\text{设 } PQ = m, \text{ 则 } AQ = \frac{1}{3}m,$$

$$\therefore OQ = OA + AQ = 3 + \frac{1}{3}m,$$

$$\therefore P\left(m, 3 + \frac{1}{3}m\right),$$

$\because$ 点 P 在对称轴右方的抛物线上，

$$\therefore 3 + \frac{1}{3}m = \frac{1}{2}m^2 - \frac{5}{2}m + 3, \text{ 且 } m > \frac{5}{2},$$

$$\text{解得: } m = \frac{17}{3},$$

$$\text{当 } m = \frac{17}{3} \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{17}{3}\right)^2 - \frac{5}{2} \times \frac{17}{3} + 3 = \frac{44}{9},$$

∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{17}{3}, \frac{44}{9}\right)$.

【点睛】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法，二次函数的图象和性质，等腰直角三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，熟练掌握等腰直角三角形的判定和性质、解直角三角形等知识是解题关键.

25. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 6, BC = 9, \angle B$ 为锐角, $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$.

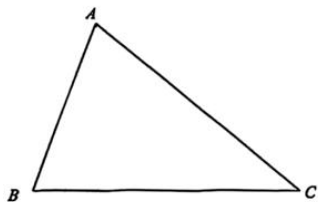


图 1

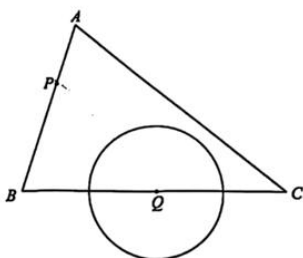


图 2

(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 如图 2, 点 P 在边 AB 上, 点 Q 是边 BC 的中点, $\odot P$ 经过点 A , $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切, 且 $\odot Q$ 的直径不大于 BC , 设 $\odot P$ 的半径为 x , $\odot Q$ 的半径为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(3) 在第 (2) 小题条件下, 连接 PQ , 如果 $\triangle BPQ$ 是等腰三角形, 求 AP 的长.

【答案】(1) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(2) $y = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x, \left(1 \leq x < \frac{17}{4}\right)$

(3) AP 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形、勾股定理，等腰三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

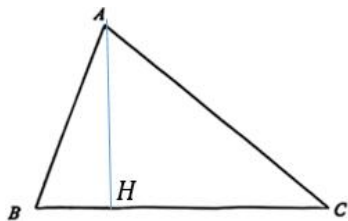
(1) 构建直角三角形, 根据 $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$, 得出 $BH = 2$, 根据勾股定理, 得出 $AH = 4\sqrt{2}$, 然后 $\text{Rt}\triangle ACH$, $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 9$, 再运用正弦的定义列式计算, 即可作答.

(2) 设 $\odot P$ 的半径为 x , $\odot Q$ 的半径为 y , 作图, 根据已有的条件得出 $BP = 6 - x$, $BQ = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$, $BG = \frac{1}{3}(6 - x)$, 结合勾股定理, 得出 $PG = 2\sqrt{2}(6 - x)$, $GQ = \frac{5}{2} + \frac{1}{3}x$, 在 $\text{Rt}\triangle PGQ$ 中, $PQ = \sqrt{PG^2 + GQ^2}$, 代入数值进行计算, 即可作答.

(3) 因为 BPQ 是等腰三角形, 所以进行分类讨论, 分为 $BQ = BP$, $BQ = PQ$ 以及 $BP = PQ$, 结合等腰三角形的性质以及线段的和差运算, 列式作答即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AH \perp BC$



$$\because AB = 6, \angle B \text{ 为锐角}, \cos \angle ABC = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABH, \cos \angle ABC = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{3}$$

解得 $BH = 2$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$\because BC = 9$$

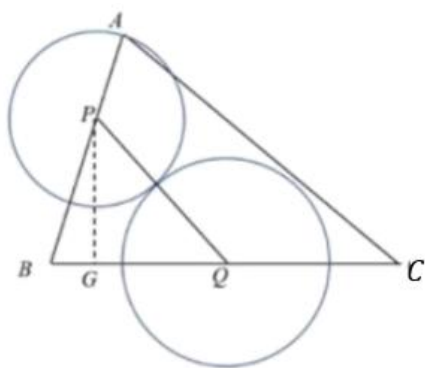
$$\therefore HC = BC - BH = 9 - 2 = 7$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACH, AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{32 + 49} = 9$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACH, \sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{9};$$

【小问 2 详解】

解: 如图:



$\because \odot P$ 与 $\odot Q$ 外切, 设 $\odot P$ 的半径为 x , $\odot Q$ 的半径为 y

$$\therefore PQ = x + y$$

$$\because AB = 6,$$

$$\therefore BP = 6 - x,$$

$\because BC = 9$, 点 Q 是边 BC 的中点

$$\therefore BQ = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$$

过点 P 作 $PG \perp BC$ 于点 G

$$\because \cos \angle ABC = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BG = \frac{1}{3}(6 - x),$$

$$\text{则 } PG = \sqrt{BP^2 - BG^2} = \sqrt{9BG^2 - BG^2} = 2\sqrt{2}BG = 2\sqrt{2}(6 - x), \quad GQ = \frac{9}{2} - \frac{1}{3}(6 - x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{3}x$$

在 $\text{Rt}\triangle PGQ$ 中, $PQ = \sqrt{PG^2 + GQ^2}$

$$\text{则 } x + y = \sqrt{\frac{8}{9}(6 - x)^2 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{3}x\right)^2} = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}}$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x$$

$$\text{当 } y = \frac{9}{2} \text{ 时, 则 } \frac{9}{2} = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x, \text{ 得出 } x = 1;$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, 则 } 0 = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x, \text{ 得出 } x = \frac{17}{4};$$

$$\because y > 0$$

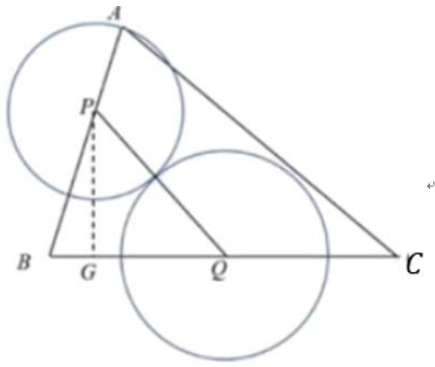
$$\therefore x < \frac{17}{4}$$

$$\text{则 } y = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x, \left(1 \leq x < \frac{17}{4}\right)$$

【小问 3 详解】

解: $\because BPQ$ 是等腰三角形,

$$\therefore \text{当 } BQ = BP \text{ 时, } 6 - x = \frac{9}{2}, \quad AP = x = \frac{3}{2}$$



$\therefore$ 当 $BQ = PQ$ 时, $\angle BPQ = \angle B = \angle A$,

则 $PQ \parallel AC$,

$\therefore$ 点 Q 是边 BC 的中点,

$\therefore$ 点 P 是边 AB 的中点,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$\therefore$ 当 $BP = PQ$ 时, $PG \perp BG$,

此时 $BQ = 2BG$

$$\therefore \frac{2}{3}(6-x) = \frac{9}{2}$$

解出 $x = -\frac{3}{4} < 0$ (舍去)

综上: BPQ 是等腰三角形, AP 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3

更多资料添加微信号: DEM2008 淘宝搜索店铺: 优尖升教育 网址: shop492842749.taobao.com