

2023 学年第二学期九年级学业质量调研

数学 试卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】各项化简后, 利用同类二次根式定义判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式,

B、 $\sqrt{9} = 3$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式,

C、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式,

D、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式.

故选 C.

【点睛】此题考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解本题的关键.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^2 = a^4$ B. $(2a)^3 = 6a^3$
C. $3a^2 \cdot (-a^3) = -3a^5$ D. $4a^6 \div 2a^2 = 2a^3$.

【答案】C

【解析】

【分析】根据合并同类项法则、单项式的乘方、乘法和除法逐一计算可得.

【详解】A. $a^2 + a^2 = 2a^2$, 此选项错误;

B. $(2a)^3 = 8a^3$, 此选项错误;

C. $3a^2 \cdot (-a^3) = -3a^5$, 此选项正确;

D. $4a^6 \div 2a^2 = 2a^4$, 此选项错误;

故选: C.

【点睛】 本题主要考查整式的运算, 解题的关键是掌握合并同类项法则, 积的乘方法则, 及单项式的乘法和除法法则.

3. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是 ()

A. $y = \frac{x}{5}$

B. $y = -\frac{x}{5}$

C. $y = \frac{5}{x}$

D. $y = -\frac{5}{x}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图像与反比例函数图像的性质, 熟练掌握函数图象的增减性是解题关键.

【详解】 A: $y = \frac{x}{5}$ 为一次函数, x 取所有实数, $\because \frac{1}{5} > 0$, $\therefore$ 函数值随自变量的值增大而增大, 故选项正确;

B: $y = -\frac{x}{5}$ 为一次函数, x 取所有实数, $\because -\frac{1}{5} < 0$, $\therefore$ 函数值随自变量的值增大而减小, 故选项错误;

C: $y = \frac{5}{x}$ 为反比例函数, $x \neq 0$, 在 $x < 0$ 内, 函数值随自变量的值增大而减小, 并且在 $x > 0$ 内, 函数值随自变量的值增大而减小, 故选项错误;

D: $y = -\frac{5}{x}$ 为反比例函数, $x \neq 0$, 在 $x < 0$ 内, 函数值随自变量的值增大而增大, 并且在 $x > 0$ 内, 函数值随自变量的值增大而增大, 但在从左侧到右侧时不满足条件“函数值随自变量的值增大而增大”, 故选项错误;

故选: A.

4. 某兴趣小组有 5 名成员, 身高 (厘米) 分别为: 161, 165, 169, 163, 167. 增加一名身高为 165 厘米的成员后, 现兴趣小组成员的身高与原来相比, 下列说法正确的是 ()

A. 平均数不变, 方差不变

B. 平均数不变, 方差变小

C. 平均数不变, 方差变大

D. 平均数变小, 方差不变.

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查算术平均数和方差的知识, 熟记算术平均数和方差的计算公式是解题的关键.

【详解】 $\overline{x_{\text{原}}} = (161 + 165 + 169 + 163 + 167) \div 5 = 165$,

$$S_{\text{原}}^2 = \frac{1}{5} \times [(161 - 165)^2 + (165 - 165)^2 + (169 - 165)^2 + (163 - 165)^2 + (167 - 165)^2] = 8,$$

$\overline{x_{\text{新}}} = (161 + 165 + 169 + 163 + 167 + 165) \div 6 = 165$,

$$S_{\text{新}}^2 = \frac{1}{6} \times [(161 - 165)^2 + (165 - 165)^2 + (169 - 165)^2 + (163 - 165)^2 + (167 - 165)^2 + (165 - 165)^2] = \frac{20}{3},$$

$\therefore$ 平均数不变, 方差变小,

故选: B.

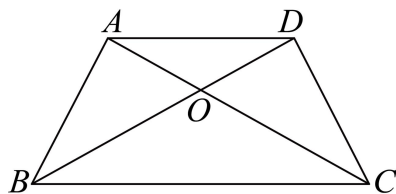
5. 已知四边形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行, AC 与 BD 相交于点 O , 那么下列条件中, 能判断这个四边形为等腰梯形的是 ()

- A. $AC = BD$ B. $\angle ABC = \angle BCD$ C. $OB = OC, OA = OD$ D. $OB = OC, AB = CD$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质以及等腰梯形的判定, 解此题的关键是求出 $AD \parallel BC$.



【详解】

A、 $AC = BD$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

B、 $\angle ABC = \angle BCD$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

C、 $\because OB = OC, OA = OD$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB, \angle OAD = \angle ODA$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC$ (SAS),

$\therefore \angle ABO = \angle DCO, AB = CD, \angle OAB = \angle ODC$,

$\because \angle ABC + \angle DCB + \angle CDA + \angle BAD = 360^\circ$,

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形,

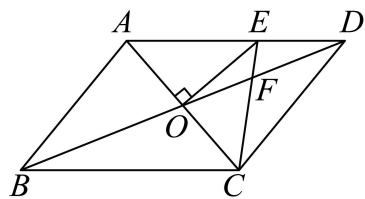
$\because AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

D、 $OB = OC, AB = CD$, 不能证明四边形 $ABCD$ 是等腰梯形, 错误;

故选 C.

6. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 过 O 作 AC 的垂线交 AD 于点 E , EC 与 BD 相交于点 F , 且 $\angle ECD = \angle DBC$, 那么下列结论 错误 的是 ()



A. $EA = EC$

B. $\angle DOC = \angle DCO$

C. $BD = 4DF$

D. $\frac{BC}{CE} = \frac{CD}{BF}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知, OE 垂直平分 AC , 则 $EA = EC$, 可判断 A 的正误; 由 $\angle DAO = \angle ECA$, $\angle ADO = \angle DBC = \angle ECD$, $\angle DOC = \angle DAO + \angle ADO$, $\angle DCO = \angle ECA + \angle ECD$, 可得

$\angle DOC = \angle DCO$, 可判断 B 的正误; 证明 $\triangle FDC \sim \triangle CDB$, 则 $\frac{DF}{CD} = \frac{CD}{BD}$, 即 $\frac{DF}{\frac{1}{2}BD} = \frac{\frac{1}{2}BD}{BD}$, 可得

$BD = 4DF$, 进而可判断 C 的正误; 证明 $\triangle CBF \sim \triangle ECD$, 可得 $\frac{BC}{CE} = \frac{BF}{CD} \neq \frac{CD}{BF}$, 进而可判断 D 的正误.

【详解】解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore OA = OC, OB = OD = \frac{1}{2}BD, AD \parallel BC,$$

又 $\because OE \perp AC$,

$\therefore OE$ 垂直平分 AC ,

$\therefore EA = EC$, A 正确, 故不符合要求;

$$\therefore \angle DAO = \angle ECA,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle DBC = \angle ECD,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle DAO + \angle ADO,$$

$$\text{又} \because \angle DCO = \angle ECA + \angle ECD,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle DCO, \text{ B 正确, 故不符合要求;}$$

$$\therefore CD = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because \angle FCD = \angle CBD, \angle FDC = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle FDC \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{DF}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ 即 } \frac{DF}{\frac{1}{2}BD} = \frac{\frac{1}{2}BD}{BD},$$

解得, $BD = 4DF$, C 正确, 故不符合要求;

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle CED,$$

$$\text{又} \because \angle CBF = \angle ECD,$$

$$\therefore \triangle CBF \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{BF}{CD} \neq \frac{CD}{BF}, \text{ D 错误, 故符合要求;}$$

故选: D.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质, 垂直平分线的性质, 三角形外角的性质, 等角对等边, 相似三角形的判定与性质. 熟练掌握平行四边形的性质, 垂直平分线的性质, 三角形外角的性质, 等角对等边, 相似三角形的判定与性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 分解因式: $xy^2 - x^2y = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $xy(y-x)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解, 掌握提取公因式法分解因式是解题的关键.

【详解】 解: $xy^2 - x^2y = xy(y-x),$

故答案为: $xy(y-x).$

8. 方程 $\sqrt{2x-1} = 5$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x = 13$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质和一元一次方程的解法, 解题的关键是准确计算.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x-1} = 5,$

$$\therefore 2x-1 = 25,$$

解得: $x = 13,$

经检验: $x = 13$ 是原方程的解,

故答案为: $x=13$.

9. 函数 $y = \frac{x}{x+1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【分析】 根据分母不为零, 即可求得定义域.

【详解】 解: 由题意, $x+1 \neq 0$

即 $x \neq -1$

故答案为: $x \neq -1$

【点睛】 本题考查了使函数有意义的自变量的取值范围, 即函数的定义域, 对于分母中含有未知数的函数解析式, 必须考虑其分母不为零.

10. 如果关于 x 的方程 $-x^2 - x + c = 0$ 有实数根, 那么实数 c 的取值范围是_____.

【答案】 $c \geq -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根, 根据方程的 $\Delta \geq 0$ 即可解答.

【详解】 解: 方程 $-x^2 - x + c = 0$ 有实数根,

$$\therefore (-1)^2 - 4 \times (-1) \times c \geq 0,$$

$$\therefore c \geq -\frac{1}{4},$$

故答案为: $c \geq -\frac{1}{4}$.

11. 如果将抛物线 $y = x^2 + 1$ 向右平移 3 个单位, 那么所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x-3)^2 + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的平移, 正确理解二次函数的平移规律是解题的关键. 根据函数图像平移的方法: 左加右减, 上加下减, 即可得到答案.

【详解】 将抛物线 $y = x^2 + 1$ 向右平移 3 个单位, 所得新抛物线的表达式是 $y = (x-3)^2 + 1$.

故答案为: $y = (x-3)^2 + 1$.

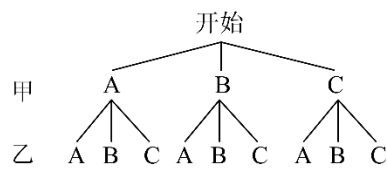
12. 甲、乙两位同学分别在 A 、 B 、 C 三个景点中任意选择一个游玩，那么他们选择同一个景点的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了列表法与树状图法：画树状图展示所有 9 种等可能的结果数，找出甲、乙恰好游玩同一景点的结果数，然后根据概率公式求解.

【详解】 解：画树状图如下：



由图可知，共有 9 种等可能的情况，他们选择同一个景点有 3 种，

故他们选择同一个景点的概率是： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

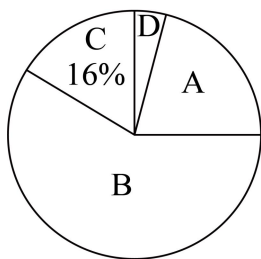
故答案为： $\frac{1}{3}$.

13. 某校有 2000 名学生参加了“安全伴我行”的宣传教育活动. 为了解活动效果，随机从中抽取 m 名学生进行了一次测试，满分为 100 分，按成绩划分为 A, B, C, D 四个等级，将收集的数据整理绘制成如下不完整的统计图表. 请根据以上信息，估计该校共有_____名学生的成绩达到 A 等级.

成绩频数分布表

等第	成绩 x	频数
A	$90 \leq x \leq 100$	n
B	$80 \leq x < 90$	117
C	$70 \leq x < 80$	32
D	$0 \leq x < 70$	8

成绩扇形统计图



【答案】 430

【解析】

【分析】此题考查了扇形统计图、频数分布表理清它们之间的数据关系是解题的关键. 用 2000 乘以 A 等级人数的占比即可求解.

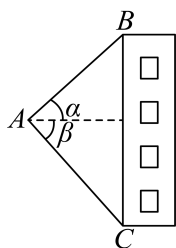
【详解】解: 本次抽取的人数为 $32 \div 16\% = 200$ 人,

$\therefore A$ 等级的人数为 $200 - 117 - 32 - 8 = 43$ 人,

估计该校共有达到 A 等级的学生数为 $2000 \times \frac{43}{200} = 430$ 人,

故答案为: 430.

14. 如图, 热气球的探测器显示, 从热气球 A 处看一栋楼顶部 B 的仰角为 α , 看这栋楼底部 C 的俯角为 β , 热气球 A 处与楼的水平距离为 m 米, 那么这栋楼 BC 的高度为_____米. (用含 α 、 β 、 m 的式子表示)

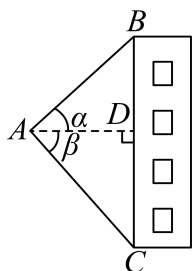


【答案】 $m(\tan \alpha + \tan \beta)$

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的仰角俯角问题, 首先过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 根据题意得 $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $AD = m$ 米, 然后利用三角函数求解即可求得答案.

【详解】解: 首先过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 如下图所示,



则 $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$, $AD = m$ 米,

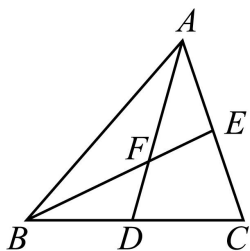
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $BD = AD \cdot \tan \alpha = m \cdot \tan \alpha$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $DC = AD \cdot \tan \beta = m \cdot \tan \beta$ 米,

$$\therefore BC = BD + DC = m \cdot \tan \alpha + m \cdot \tan \beta = m(\tan \alpha + \tan \beta) \text{ 米}.$$

故答案为: $m(\tan \alpha + \tan \beta)$

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 、 BE 相交于点 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\vec{a} + 6\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线定理, 相似三角形的判定和性质, 三角形法则等知识. 根据三角形的中位线定理和相似三角形的判定和性质可得 $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FE} = 3\vec{b}$, 利用三角形法 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$ 则求出即可.

【详解】 解: 连接 DE ,

$\because$ 中线 AD 、 BE 相交于点 F ,

$$\therefore DE \parallel AB, \quad DE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{EF}{FB} = \frac{ED}{AB} = \frac{1}{2},$$

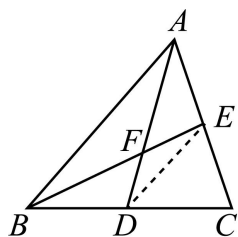
$$\therefore \overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FE} = 3\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2} \vec{a} + 3\vec{b},$$

又 $\because$ 点 D 是 BC 的中点,

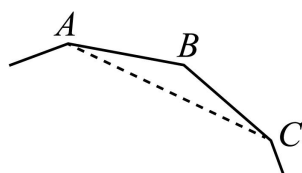
$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = \vec{a} + 6\vec{b},$$

故答案为: $\vec{a} + 6\vec{b}$.



【点睛】

16. 如图, 有一幅不完整的正多边形图案, 小明量得图中一边与对角线的夹角 $\angle BAC = 15^\circ$, 那么这个正多边形的中心角是_____度.



【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查了三角形内角和定理, 正多边形的性质, 正多边形的外角与边数的关系, 熟练掌握正多边形的外角和等于是解题的关键.

根据三角形内角和定理以及正多边形的性质, 得出 $\angle B = 150^\circ$, 然后可得每一个外角为 30° , 进而即可求解.

【详解】 解: $\because AB = BC$,

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ,$$

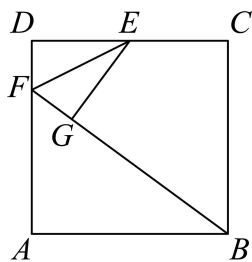
$$\therefore \text{多边形的外角为 } 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{多边形的边数为: } \frac{360}{30} = 12,$$

$$\therefore \text{正多边形的中心角是 } \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ,$$

故答案为: 30.

17. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, E 为边 DC 的中点, 点 F 在边 AD 上, 将 $\angle D$ 沿直线 EF 翻折, 使点 D 落在点 G 处, 如果 $BG = BC$, 那么线段 DF 的长为_____.



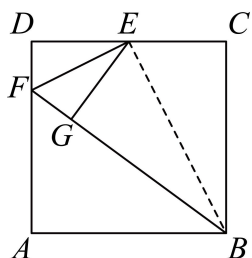
【答案】 $\frac{1}{4}$ ##0.25

【解析】

【分析】 本题考查正方形的折叠，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，掌握折叠的性质是解题的关键.

连接 BE ，证明 $\triangle EGB \cong \triangle ECB$ ，可得 $\angle DEF + \angle CEB = 90^\circ$ ，然后得到 $\triangle DEF \sim \triangle CBE$ 即可解题.

【详解】 如图，连接 BE ，



由翻折可得： $\angle D = \angle EGF = 90^\circ$ ， $\angle DEF = \angle GEF = \frac{1}{2} \angle DEG$ ， $DE = EG$ ，

又 $\because E$ 为边 DC 的中点，

$$\therefore DE = EC = EG = \frac{1}{2},$$

又 $\because BG = BC$ ， $BE = BE$ ，

$$\therefore \triangle EGB \cong \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle GEB = \angle CEB = \frac{1}{2} \angle CEG,$$

$$\therefore \angle DEF + \angle CEB = \frac{1}{2} \angle DEG + \frac{1}{2} \angle CEG = 90^\circ,$$

又 $\because ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF + \angle DFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{DF}{CE} = \frac{DE}{BC}, \text{ 即 } \frac{DF}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1}, \text{ 解得 } DF = \frac{1}{4}.$$

故答案为: $\frac{1}{4}$

18. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2, BC = 4, AC$ 与 BD 相交于点 O . $\odot A$ 经过点 B , 如果 $\odot O$ 与 $\odot A$ 有公共点, 且与边 CD 没有公共点, 那么 $\odot O$ 的半径长 r 的取值范围是_____.

【答案】 $\sqrt{5} - 2 \leq r < 2$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质, 勾股定理, 圆与圆的位置关系和直线和圆的位置关系, 掌握圆与圆的位置关系和直线和圆的位置关系是解题的关键. 过点 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E , 根据勾股定理得到 $AC = 2\sqrt{5}$, 然后根据 $\triangle COE \sim \triangle CAD$, 得到 $OE = 2$, 由已知可以得到 r 的取值范围即可.

【详解】 解: 过点 O 作 $OE \perp CD$ 于点 E ,

$\therefore ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC = \angle OEC = 90^\circ, \quad AO = OC = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AO = OC = \sqrt{5},$$

$$\text{又} \because \angle ADC = \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \parallel AD,$$

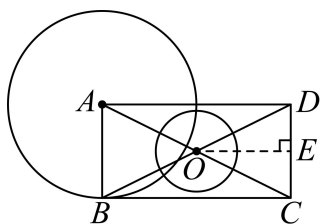
$$\therefore \triangle COE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{OE}{AD} = \frac{CO}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AD = 2,$$

又 $\because \odot O$ 与 $\odot A$ 有公共点, 且与边 CD 没有公共点,

$$\therefore \sqrt{5} - 2 \leq r < 2,$$



故答案为: $\sqrt{5}-2 \leq r < 2$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - (2024 - \pi)^0 + \sqrt{20} + \frac{4}{\sqrt{5}-3}$.

【答案】 $\sqrt{5} - \frac{15}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数的运算, 零指数幂, 分数指数幂, 化简二次根式, 先计算分数指数幂和零指数幂, 利用平方差公式进行二次根式和化简, 最后算加减.

【详解】 解: $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} - (2024 - \pi)^0 + \sqrt{20} + \frac{4}{\sqrt{5}-3}$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} - 1 + 2\sqrt{5} + \frac{4(\sqrt{5}+3)}{(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 2\sqrt{5} + \frac{4(\sqrt{5}+3)}{5-9}$$
$$= \frac{1}{4} - 1 + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 3$$
$$= \sqrt{5} - \frac{15}{4}.$$

20. 解方程组: $\begin{cases} 2x + y = 21, & \text{①} \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 21 \\ y = -21 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组解法, 解题关键是通过因式分解将二元一次方程组转化为两个二元一次方程组解答.

因式分解组中的方程②, 得到两个二元一次方程, 再代入①即可解方程组.

【详解】 解: 由②得: $(x-3y)(x+y) = 0$,

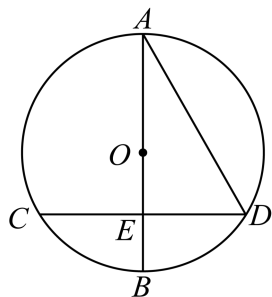
即 $x = 3y$ 或 $x = -y$,

把 $x = 3y$ 代入①得 $y = 3$, $x = 9$;

把 $x = -y$ 代入①得 $y = -21$, $x = 21$;

∴ 方程组的解为: $\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 21 \\ y = -21 \end{cases}$.

21. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AB 与 CD 相交于点 E , 弦 AD 与弦 CD 相等, 且 $\widehat{BC} = \widehat{BD}$.



- (1) 求 $\angle ADC$ 的度数;
- (2) 如果 $OE = 1$, 求 AD 的长.

【答案】 (1) 60°

(2) $2\sqrt{3}$

【解析】

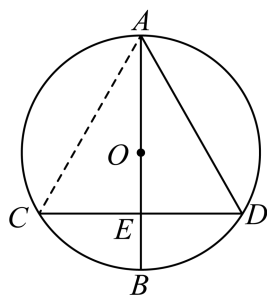
【分析】 本题考查圆周角定理, 等边三角形的判定与性质, 垂径定理, 圆心角、弧、弦的关系及解直角三角形, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

(1) 连接 AC , 根据垂径定理可得 $\widehat{AC} = \widehat{AD}$, 从而可得 $AC = AD$, 然后利用等量代换可得 $AC = AD = CD$, 从而可得 $\triangle ACD$ 是等边三角形, 再利用等边三角形的性质即可解答;

(2) 连接 OD , 根据垂径定理可得 $DE = EC = \frac{1}{2}CD$, $AB \perp CD$, 从而可得 $\angle AED = 90^\circ$, 再利用直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle DAO = 30^\circ$, 然后利用圆周角定理可得 $\angle DOE = 60^\circ$, 再在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中, 利用锐角三角函数的定义求出 DE 的长, 即可解答.

【小问 1 详解】

连接 AC ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{BC} = \widehat{BD}$,

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AD}$,

$\therefore AC = AD$,

$\because AD = CD$,

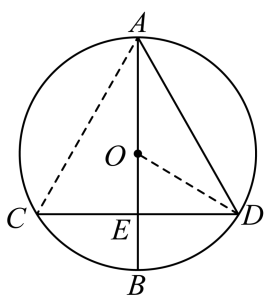
$\therefore AC = AD = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ADC = 60^\circ$;

【小问 2 详解】

连接 OD ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\widehat{BC} = \widehat{BD}$,

$\therefore DE = EC = \frac{1}{2}CD, AB \perp CD$,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$,

$\because \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \angle DAO = 90^\circ - \angle ADC = 30^\circ$,

$\therefore \angle DOE = 2\angle DAO = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中, $OE = 1$,

$\therefore DE = OE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

$\therefore CD = 2DE = 2\sqrt{3}$,

$\therefore CD = AD = 2\sqrt{3}$.

22. 某学校计划租用 7 辆客车送 275 名师生去参加课外实践活动. 现有甲、乙两种型号的客车可供选择, 它们的载客量 (指的是每辆客车最多可载该校师生的人数) 和租金如下表. 设租用甲种型号的客车 x 辆, 租车总费用为 y 元.

型号	载客量 (人/辆)	租金 (元/辆)
甲	45	1500
乙	33	1200

- (1) 求 y 与 x 的函数解析式 (不需要写定义域);
- (2) 如果使租车总费用不超过 10200 元, 一共有几种租车方案?
- (3) 在 (2) 的条件下, 选择哪种租车方案最省钱? 此时租车的总费用是多少元?

【答案】 (1) $y = 300x + 8400$

- (2) 共有 3 种租车方案
- (3) 租用甲种型号的客车 4 辆, 租用乙种型号的客 3 辆, 租车最省钱, 租车的总费用是 9600 元

【解析】

【分析】 本题考查一元一次不等式组和一次函数的应用, 解题的关键是读懂题意, 列出函数关系式.

- (1) 租用甲种型号的客车 x 辆, 则租用乙种型号的客车 $(7-x)$ 辆; 根据题意列函数关系式即可;

- (2) 根据租车总费用不超过 10200 元, 师生共有 275 人可得
$$\begin{cases} 300x + 8400 \leq 10200 \\ 45x + 33(7-x) \geq 275 \end{cases}$$
, 又 x 为整数, 解不

等式组即可得到租车方案;

- (3) 结合 (1) (2), 利用一次函数性质租金最少的方案即可解题.

【小问 1 详解】

租用甲种型号的客车 x 辆, 则租用乙种型号的客车 $(7-x)$ 辆,

$$\therefore y = 1500x + 1200(7-x) = 300x + 8400;$$

【小问 2 详解】

$\therefore$ 租车总费用不超过 10200 元, 师生共有 275 人,

$$\therefore \begin{cases} 300x + 8400 \leq 10200 \\ 45x + 33(7-x) \geq 275 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 3\frac{2}{3} \leq x \leq 6,$$

$\therefore x$ 为整数,

$\therefore x$ 可取 4, 5, 6,

$\therefore$ 一共有 3 种租车方案;

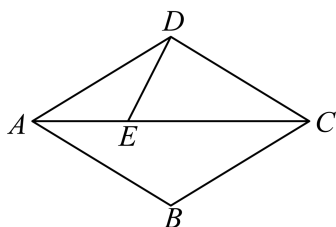
【小问3 详解】

在 $y = 300x + 8400$ 中, y 随 x 的增大而增大, 又 x 可取 4, 5, 6,

$\therefore$ 当 $x = 4$ 时, y 取最小值, 最小值为 $300 \times 4 + 8400 = 9600$ (元),

$\therefore$ 租用甲种型号的客车 4 辆, 租用乙种型号的客 3 辆, 租车最省钱, 租车的总费用是 9600 元.

23. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是对角线 AC 上一点, $EA = ED$, 且 $\angle DAB = \angle DEC = \angle DCB$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 延长 DE 分别交线段 AB 、 CB 的延长线于点 F 、 G , 如果 $GB = BC$, 求证: $AD^2 = 2EF \cdot GD$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $AD \parallel BC$, 得 $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$, 则 $\angle DCB + \angle ABC = 180^\circ$, 所以 $AB \parallel CD$, 则四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 由 $\angle DEC = 2\angle CAD$, 且 $\angle DAB = \angle DEC$, 得 $\angle DAB = 2\angle CAD$, 所以 $\angle CAB = \angle CAD = \angle ACB$, 则 $AB = CB$, 即可证明四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 由菱形的性质得 $AB = AD = BC = CD$, 而 $GB = BC$, 所以 $AD = GB$, 可证明 $\triangle ADF \sim \triangle BGF$, 得 $\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{GB} = 1$, 则 $AF = BF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$, 再证明 $\triangle AEF \sim \triangle CED$, 得 $\frac{EF}{ED} = \frac{AF}{CD} = \frac{1}{2}$, 所以 $ED = 2EF$, 再证明 $\triangle EDC \sim \triangle CDG$, 得 $\frac{CD}{GD} = \frac{ED}{CD}$, 则 $\frac{AD}{GD} = \frac{2EF}{AD}$, 即可证明 $AD^2 = 2EF \cdot GD$.

【小问1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ, \angle CAD = \angle ACB,$$

$$\because \angle DAB = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle ABC = 180^\circ,$$

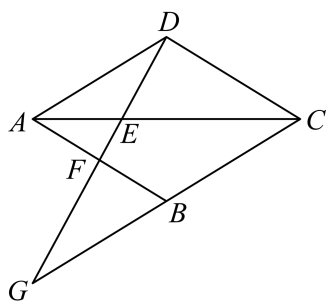
$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because EA = ED,$
 $\therefore \angle EDA = \angle CAD,$
 $\therefore \angle DEC = \angle EDA + \angle CAD = 2\angle CAD,$
 $\because \angle DAB = \angle DEC,$
 $\therefore \angle DAB = 2\angle CAD,$
 $\therefore \angle CAB = \angle CAD = \angle ACB,$
 $\therefore AB = CB,$
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明：根据题意作图如下，

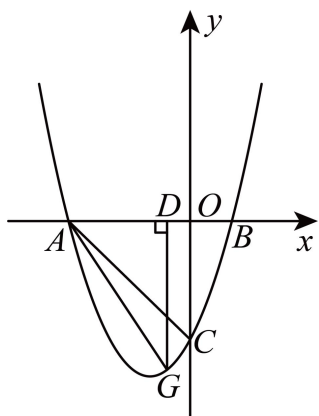


$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore AB = AD = BC = CD,$
 $\because AD = BC, GB = BC,$
 $\therefore AD = GB,$
 $\because AD \parallel GB,$
 $\therefore \triangle ADF \sim \triangle BGF,$
 $\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{GB} = 1,$
 $\therefore AF = BF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD,$
 $\therefore AF \parallel CD,$
 $\therefore \triangle AEF \sim \triangle CED,$
 $\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{AF}{CD} = \frac{1}{2},$
 $\therefore ED = 2EF,$
 $\therefore \angle ECD = \angle CAD, \angle G = \angle EDA, \text{ 且 } \angle CAD = \angle EDA,$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ECD = \angle G, \\
&\because \angle EDC = \angle CDG, \\
&\therefore \triangle EDC \sim \triangle CDG, \\
&\therefore \frac{CD}{DG} = \frac{ED}{CD}, \\
&\therefore \frac{AD}{GD} = \frac{2EF}{AD}, \\
&\therefore AD^2 = 2EF \cdot GD.
\end{aligned}$$

【点睛】此题重点考查平行线的性质、菱形的判定性质、等腰三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识，推导出 $\angle CAB = \angle CAD = \angle ACB$ 是解题的关键。

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ， D 是线段 OA 上一点。



- (1) 求这条抛物线的表达式和点 C 的坐标；
- (2) 如图，过点 D 作 $DG \perp x$ 轴，交该抛物线于点 G ，当 $\angle DGA = \angle DGC$ 时，求 $\triangle GAC$ 的面积；
- (3) 点 P 为该抛物线上第三象限内一点，当 $OD = 1$ ，且 $\angle DCB + \angle PBC = 45^\circ$ 时，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$ ， $C(0, -3)$

(2) $\frac{15}{8}$

(3) $P(-1, -4)$

【解析】

【分析】(1) 将 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 代入得， $\begin{cases} 9a - 3b - 3 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$ ，可求 $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ ，则 $y = x^2 + 2x - 3$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -3$ ，进而可求 $C(0, -3)$ ；

(2) 如图 1，作 $CM \perp DG$ 于 M ，记 AC 与 DG 的交点为 N ，设 $D(m, 0)$ ，则 $G(m, m^2 + 2m - 3)$ ，

$M(m, -3)$, 则 $AD = m + 3$, $DG = -(m^2 + 2m - 3)$, $CM = -m$, $GM = -(m^2 + 2m)$, 由

$\tan \angle DGA = \tan \angle DGC$, 可得 $\frac{m+3}{-(m^2+2m-3)} = \frac{-m}{-(m^2+2m)}$, 计算求出满足要求的解为 $m = -\frac{1}{2}$, 则

$G\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$, 待定系数法求直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$, 进而可得 $N\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, 则 $GN = \frac{5}{4}$, 根

据 $S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GAN} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2}GN \times (x_C - x_A)$, 计算求解即可;

(3) 如图 2, 作 $BH \perp CD$ 于 H , 在 CD 上取 $HN = BH$, 连接 BN 交抛物线于点 P , 由

$\angle BNH = 45^\circ = \angle DCB + \angle PBC$, 可知点 P 即为所求, 由勾股定理得, $CD = BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, 由

$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC = \frac{1}{2}CD \cdot BH$, 可求 $BH = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, 则 $BN^2 = BH^2 + HN^2 = \frac{36}{5}$, 待定系数法求直线

CD 的解析式为 $y = -3x - 3$, 设 $N(n, -3n - 3)$, 由 $BN^2 = (n-1)^2 + (-3n-3)^2 = \frac{36}{5}$, 可求 $n = -\frac{1}{5}$,

$n = -\frac{7}{5}$ (舍去), 则 $N\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right)$, 待定系数法求直线 BN 的解析式为 $y = 2x - 2$, 联立得,

$2x - 2 = x^2 + 2x - 3$, 计算求解, 然后作答即可.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 代入得,
$$\begin{cases} 9a - 3b - 3 = 0 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases},$$

解得,
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore y = x^2 + 2x - 3$,

当 $x = 0$ 时, $y = -3$, 即 $C(0, -3)$;

【小问 2 详解】

解: 如图 1, 作 $CM \perp DG$ 于 M , 记 AC 与 DG 的交点为 N ,

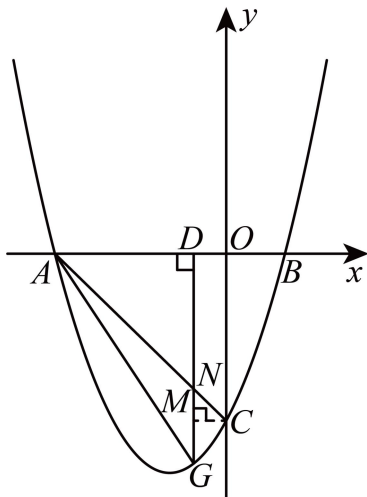


图1

设 $D(m, 0)$ ，则 $G(m, m^2 + 2m - 3)$ ， $M(m, -3)$ ，

$\therefore AD = m + 3$ ， $DG = -(m^2 + 2m - 3)$ ， $CM = -m$ ， $GM = -(m^2 + 2m)$ ，

$\therefore \angle DGA = \angle DGC$ ，

$\therefore \tan \angle DGA = \tan \angle DGC$ ，

$\therefore \frac{AD}{DG} = \frac{CM}{GM}$ ，即 $\frac{m+3}{-(m^2+2m-3)} = \frac{-m}{-(m^2+2m)}$ ，

解得， $m = -\frac{1}{2}$ ，

经检验， $m = -\frac{1}{2}$ 是原分式方程的解，且符合要求；

$\therefore G\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ ，

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + c$ ，

将 $A(-3, 0)$ ， $C(0, -3)$ 代入得， $\begin{cases} -3k + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$ ，

解得， $\begin{cases} k = -1 \\ c = -3 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$ ，

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时， $y = -\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = -\frac{5}{2}$ ，即 $N\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ ，

$\therefore GN = \frac{5}{4}$ ，

$$\therefore S_{\triangle GAC} = S_{\triangle GAN} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2}GN \times (x_C - x_A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times 3 = \frac{15}{8},$$

$$\therefore \triangle GAC \text{ 的面积为 } \frac{15}{8};$$

【小问3 详解】

解：如图2，作 $BH \perp CD$ 于 H ，在 CD 上取 $HN = BH$ ，连接 BN 交抛物线于点 P ，

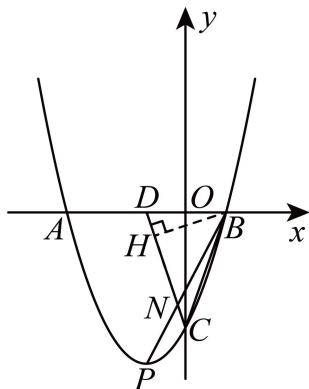


图2

$$\because HN = BH, \quad BH \perp CD,$$

$$\therefore \angle BNH = 45^\circ = \angle DCB + \angle PBC,$$

$\therefore$ 点 P 即为所求，

$$\text{由勾股定理得, } CD = BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\because S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot OC = \frac{1}{2}CD \cdot BH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \cdot BH,$$

$$\text{解得, } BH = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore BN^2 = BH^2 + HN^2 = \frac{36}{5},$$

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + d$,

$$\text{将 } D(-1, 0), \quad C(0, -3) \text{ 代入得, } \begin{cases} -k + d = 0 \\ d = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = -3 \\ d = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = -3x - 3$,

设 $N(n, -3n - 3)$,

$$\therefore BN^2 = (n-1)^2 + (-3n-3)^2 = \frac{36}{5},$$

$$\text{解得, } n = -\frac{1}{5}, \quad n = -\frac{7}{5} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore N\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right),$$

设直线 BN 的解析式为 $y = kx + e$,

$$\text{将 } B(1,0), \quad N\left(-\frac{1}{5}, -\frac{12}{5}\right) \text{ 代入得, } \begin{cases} k + e = 0 \\ -\frac{1}{5}k + e = -\frac{12}{5} \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k = 2 \\ e = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BN 的解析式为 $y = 2x - 2$,

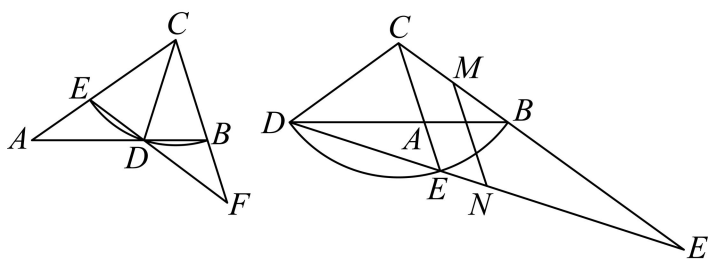
$$\text{联立得, } 2x - 2 = x^2 + 2x - 3,$$

$$\text{解得, } x = 1 \text{ 舍去或 } x = -1,$$

$$\therefore P(-1, -4).$$

【点睛】 本题考查了二次函数解析式，二次函数与角度综合，正切，二次函数与面积综合，一次函数解析式，勾股定理，三角形外角的性质等知识．熟练掌握二次函数解析式，二次函数与角度综合，正切，二次函数与面积综合，一次函数解析式，勾股定理，三角形外角的性质是解题的关键．

25. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 2$ ，以 C 为圆心、 CB 为半径的弧分别与射线 BA 、射线 CA 相交于点 D 、 E ，直线 ED 与射线 CB 相交于点 F ．



(1) 如图，当点 D 在线段 AB 上时．

① 设 $\angle ABC = \alpha$ ，求 $\angle BDF$ ；(用含 α 的式子表示)

② 当 $BF = 1$ 时，求 $\cos \angle ABC$ 的值；

(2) 如图，当点 D 在 BA 的延长线上时，点 M 、 N 分别为 BC 、 DF 的中点，连接 MN ，如果 $MN \parallel CE$ ，求 CB 的长．

【答案】(1) ① $\frac{1}{2}a$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $BC = 1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) ①根据等边对等角得到 $\angle ACB = \angle ABC = \angle CDB = \alpha$, $\angle CDE = \angle CED$, 然后根据四边形的内角和是 360° 计算解题;

②先根据 $\angle F = \angle BDF$ 得到 $BD = BF = 1$, 然后推导 $\triangle CDB \sim \triangle ACB$, 得到 $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, 可以求出 BC 长, 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 然后求出 $\cos \angle ABC$ 值即可;

(2) 设 MN 交 BD 于点 H , 设 $BC = a$, 则 $AH = BH = 1$, 然后证明 $\triangle BCA \sim \triangle BDC$, 得到 $BD = \frac{a^2}{2}$,

然后根据平行线分线段成比例得到 $\frac{EN}{DN} = \frac{HA}{DH}$, $\frac{EN}{FN} = \frac{CM}{MF}$, 再根据 $DN = FN$, 就可得到 $\frac{HA}{DH} = \frac{CM}{MF}$, 代入数值即可解题.

【小问1详解】

解: ① $\because AC = AB, CB = CD = CE$,

$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle CDB = \alpha, \angle CDE = \angle CED$,

又 $\because \angle ACB + \angle ABC + \angle CDB + \angle CDE + \angle CED = 360^\circ$,

$\therefore \angle CDB + \angle CDE = \frac{1}{2}(360^\circ - \alpha) = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$,

$\therefore \angle ADE = 180^\circ - (\angle CDB + \angle CDE) = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\alpha$;

② $\because \angle ADE = \angle BDF = \frac{1}{2}\alpha, \angle ABC = \alpha$,

$\therefore \angle F = \angle BDF = \frac{1}{2}\alpha$,

$\therefore BD = BF = 1$,

又 $\because \angle BCD = 180^\circ - 2\alpha = \angle A, \angle CBD = \angle DBC$,

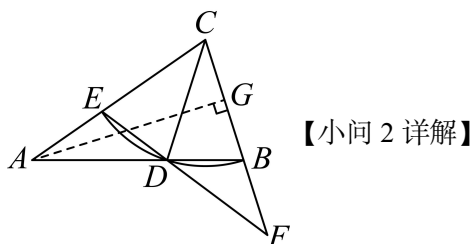
$\therefore \triangle CDB \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$, 即 $\frac{BC}{2} = \frac{1}{BC}$, 解得: $BC = \sqrt{2}$ 或 $BC = -\sqrt{2}$ (舍);

过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ,

则 $BG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BG}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$



解：设 MN 交 BD 于点 H ，设 $BC = a$ ，

$\because M$ 是 BC 的中点，

$$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}a,$$

又 $\because MN \parallel CE$ ，

$$\therefore \triangle BMH \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BH}{HA} = \frac{BM}{MC} = 1,$$

又 $\because AB = AC = 2$ ，

$$\therefore AH = BH = 1,$$

$\because AC = AB$ ， $BC = CD$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle BCA \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}, \text{ 即 } \frac{a}{2} = \frac{BD}{a}, \text{ 解得: } BD = \frac{a^2}{2},$$

$$\therefore DH = DB - BH = \frac{a^2}{2} - 1,$$

$\because MN \parallel CE$ ，

$$\therefore \frac{EN}{DN} = \frac{HA}{DH} = \frac{1}{\frac{a^2}{2} - 1} = \frac{2}{a^2 - 2},$$

又 $\because \angle ACB = \angle ABC$ ， $\angle BDF = \frac{1}{2} \angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle F,$$

【点睛】本题考查等腰三角形的性质和判定，相似三角形的判定和性质，解直角三角形，平行线分线段成比例，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.