

2023 学年第二学期初三年级学业质量调研数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
4. 本次考试不能用计算器.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中, 有理数是 ()

- A. $\pi - 3$ B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt[3]{9}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查有理数的识别, 整数和分数统称为有理数, 据此进行判断即可.

【详解】 解: $\pi - 3$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{9}$ 都是无理数,

-1 是有理数,

故选: B.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $a + a = a^2$ B. $a \cdot a = 2a$ C. $(2a)^3 = 8a^3$ D. $(-a^2)^3 = a^6$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了整式运算, 熟练掌握相关运算法则是解题关键. 根据整式加法法则、单项式乘以单项式法则以及积的乘方运算法则逐项分析判断即可.

【详解】 解: A. $a + a = 2a$, 故本选项运算错误, 不符合题意;

B. $a \cdot a = a^2$, 故本选项运算错误, 不符合题意;

C. $(2a)^3 = 8a^3$, 本选项运算正确, 符合题意;

D. $(-a^2)^3 = -a^6$, 故本选项运算错误, 不符合题意.

故选: C.

3. 下列函数中, y 的值随着 x 的值增大而增大的函数是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = -x + 2$

C. $y = x - 2$

D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质, 一次函数的性质. 根据一次函数和反比例函数的性质分别进行判断即可.

【详解】解: A、 $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数, $k = 1 > 0$, 在每个象限内, y 随 x 的增大而减小, 所以 A 选项不合题意;

B、 $y = -x + 2$ 是一次函数, $k = -1 < 0$, y 随 x 的增大而减小, 所以 B 选项不合题意;

C、 $y = x - 2$ 是一次函数, $k = 1 > 0$, y 随 x 的增大而增大, 所以 C 选项符合题意;

D、 $y = -\frac{1}{x}$ 是反比例函数, $k = -1 < 0$, 在每个象限内, y 随 x 的增大而减增大, 所以 D 选项不合题意;

故选: C.

4. 某班级的一个小组 6 名学生进行跳绳测试, 得到 6 名学生一分钟跳绳个数分别为 166, 160, 160, 150, 134, 130, 那么这组数据的平均数和中位数分别是 ()

A. 150, 150

B. 155, 155

C. 150, 160

D. 150, 155

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查算术平均数和中位数, 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 根据中位数和算术平均数的定义列式求解即可.

【详解】解: 这组数据的平均数为 $\frac{1}{6} \times (166 + 160 + 160 + 150 + 134 + 130) = 150$,

中位数为 $\frac{160 + 150}{2} = 155$,

故选: D.

5. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 12$, 以点 A, 点 B, 点 C 为圆心的 $\odot A, \odot B, \odot C$ 的半径分别为 5、10、8, 那么下列结论错误的是 ()

A. 点 B 在 $\odot A$ 上

B. $\odot A$ 与 $\odot B$ 内切

C. $\odot A$ 与 $\odot C$ 有两个公共点

D. 直线 BC 与 $\odot A$ 相切

【答案】D

【解析】

【分析】首先利用勾股定理得 $BC = 13$ ，然后根据点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系，逐项分析判断即可.

【详解】解： $\because \angle CAB = 90^\circ, AB = 5, AC = 12$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$\therefore AB = 5$, $\odot A$ 的半径为 5,

$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 上, 选项 A 正确, 不符合题意;

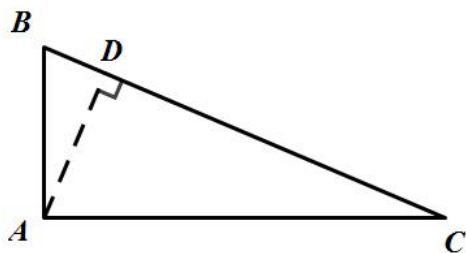
$\therefore \odot A, \odot B$ 的半径分别为 5、10, 且 $AB = 10 - 5 = 5$,

$\therefore \odot A$ 与 $\odot B$ 内切, 选项 B 正确, 不符合题意;

$\therefore AC = 12 < 5 + 8 = 13$,

$\therefore \odot A$ 与 $\odot C$ 相交, 有两个公共点, 选项 C 正确, 不符合题意;

如下图, 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ,



$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times AB = \frac{1}{2} BC \times AD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = \frac{1}{2} \times 13 \times AD, \text{ 解得 } AD = \frac{60}{13},$$

$$\therefore AD = \frac{60}{13} < 5,$$

$\therefore$ 直线 BC 与 $\odot A$ 相交, 选项 D 错误, 符合题意.

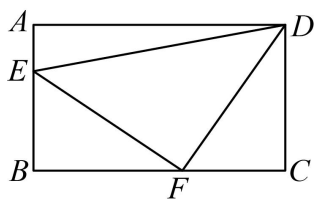
故选: D.

【点睛】本题主要考查了勾股定理、点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系等知识, 熟练掌握相关知识是解题关键.

6. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB < BC$, 点 E 在边 AB 上, 点 F 在边 BC 上, 联结 DE 、 DF 、 EF ,

$AB = a, BE = CF = b, DE = c, \angle BEF = \angle DFC$, 以下两个结论: ① $(a+b)^2 + (a-b)^2 = c^2$;

② $a+b > \frac{\sqrt{2}}{2}c$. 其中判断正确的是 ()



A. ①②都正确

B. ①②都错误;

C. ①正确, ②错误

D. ①错误, ②正确

【答案】 A

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle BEF \cong \triangle CFD$ (ASA), 则 $\angle BFE = \angle CDF, EF = DF$, 再证明 $\triangle DEF$ 是等腰直角三角

形, 则 $EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}DE = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, 进一步得到 $a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$, 则 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$, 利用完全平方公式

进行计算即可证明①正确, 由 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2$ 得到 $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$, 根据

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$ 即可证明②正确.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, AB = CD = a$

$\because BE = CF = b, \angle BEF = \angle DFC$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CFD$ (ASA),

$\therefore \angle BFE = \angle CDF, EF = DF$,

$\therefore \angle BFE + \angle CFD = \angle CDF + \angle CFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle EFD = 90^\circ$

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore EF = DF = \frac{\sqrt{2}}{2}DE = \frac{\sqrt{2}}{2}c$,

$\therefore CD = BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$,

$\therefore a = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - b^2}$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2 \times \frac{1}{2}c^2 = c^2,$$

故①正确;

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c,$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2,$$

$$\therefore a+b > \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\therefore a+b > \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

故②正确,

故选: A

【点睛】此题考查了全等三角形的判定和性质、勾股定理、矩形的性质、二次根式的运算等知识, 证明 $\triangle BEF \cong \triangle CFD$ (ASA) 是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $4^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】2

【解析】

【分析】根据算术平方根的计算法则进行计算, 即可得到答案.

【详解】 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$, 故答案为 2.

【点睛】本题考查求算术平方根, 解题的关键是掌握求算术平方根的方法.

8. 单项式 $2xy^2$ 的次数为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】3

【解析】

【分析】直接利用一个单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数, 进而得出答案.

【详解】解: 单项式 $2xy^2$ 的次数为: 3.

故答案为 3.

【点睛】 本题考查了单项式，正确掌握单项式的次数确定方法是解题的关键.

9. 不等式组 $\begin{cases} 2x < 6 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $2 < x < 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组，熟练掌握解一元一次不等式组的方法和步骤是解题关键. 分别解两个不等式，然后按照“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到”的原则确定该不等式组的解集即可.

【详解】 解： $\begin{cases} 2x < 6 \text{ ①} \\ x - 2 > 0 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①，可得 $x < 3$,

解不等式②，可得 $x > 2$,

所以，该不等式的解集为 $2 < x < 3$.

故答案为： $2 < x < 3$.

10. 计算： $3(2\vec{a} - \vec{b}) + 5(2\vec{a} + 3\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $16a + 12b$

【解析】

【分析】 去括号，按照向量的加减法法则计算即可.

【详解】 原式 $= 6a - 3b + 10a + 15b = 16a + 12b$

故答案为： $16a + 12b$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算，熟练掌握向量的线性运算法则是解答本题的关键. 数乘向量满足下列运算律：设 λ, μ 为实数，则① $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ，② $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$ ，③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

11. 分式方程 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解分式方程，解题关键是求解后必须检验是否为增根. 等号两边同时乘以 $(x-1)$ ，求解并检验即可.

【详解】解： $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$,

等号两边同时乘以 $(x-1)$,

可得 $x^2 = 1$,

解得 $x = \pm 1$,

当 $x = 1$ 时, $x - 1 = 0$,

所以, $x = 1$ 是该分式方程的增根,

当 $x = -1$ 时, $x - 1 \neq 0$,

所以, $x = -1$ 是该分式方程的解,

所以, 分式方程 $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 的解是 $x = -1$.

故答案为: $x = -1$.

12. 若关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 没有实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查根的判别式和解一元一次不等式, 根据方程没有实数根得出判别式小于 0, 列出关于 m 的不等式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2x + m = 0$ 没有实数根,

$\Delta = 4 - 4m < 0$,

解得: $m > 1$.

故答案为: $m > 1$.

13. 《九章算术》中记载: “今有牛五、羊二, 直金十九两. 牛二、羊五, 直金十六两. 牛、羊各直金几何?”

题目大意是: “5 头牛、2 只羊共值金 19 两. 2 头牛、5 只羊共值金 16 两, 每头牛、每只羊各值金多少两?”

根据题意, 设 1 头牛值金 x 两, 1 只羊值金 y 两, 那么可列方程组为_____.

【答案】 $\begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

【解析】

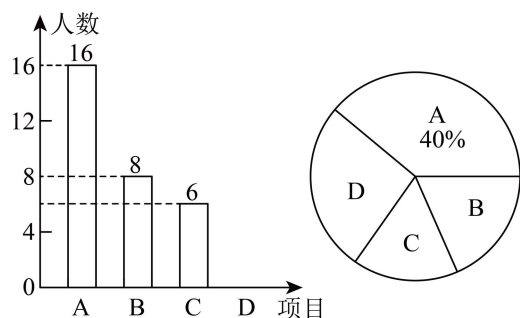
【分析】 本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组, 解题的关键是明确题意, 找到等量关系, 列出相应的方程组. 根据 “5 头牛、2 只羊共值金 19 两. 2 头牛、5 只羊共值金 16 两”, 得到 2 个等量关系, 即可列出方程组.

【详解】 解: 设 1 头牛值金 x 两, 1 只羊值金 y 两,,

由题意可得, $\begin{cases} 5x+2y=19 \\ 2x+5y=16 \end{cases}$,

故答案为: $\begin{cases} 5x+2y=19 \\ 2x+5y=16 \end{cases}$.

14. 某校在实施全员导师活动中, 对初三 (1) 班学生进行问卷调查, 学生最期待的一项方式是: A 畅谈交流心得; B 外出郊游骑行; C 开展运动比赛; D 互赠书签贺卡. 根据问卷数据绘制统计图如下, 扇形统计图中表示 D 的扇形圆心角的度数为_____.



【答案】 90° ##90 度

【解析】

【分析】 本题主要考查了扇形统计图、条形统计图等知识, 确定参与调查的学生总人数以及 D 组人数是解题关键. 首先根据扇形统计图和条形统计图确定参与调查的学生总人数, 进而可得 D 组人数, 然后利用“ $360^\circ \times D$ 组学生占比”求解即可.

【详解】 解: 根据题意, 可得,

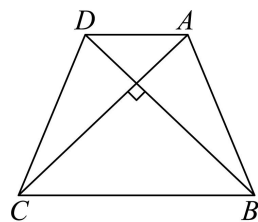
参与调查的学生总人数为 $16 \div 40\% = 40$ 人,

则 D 组人数为 $40 - 16 - 8 - 6 = 10$ 人,

所以, 扇形统计图中表示 D 的扇形圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{10}{40} = 90^\circ$.

故答案为: 90° .

15. 如图, 在等腰梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 与 BD 互相垂直, $AC = 2\sqrt{2}$, 那么梯形 ABCD 的中位线长为_____.

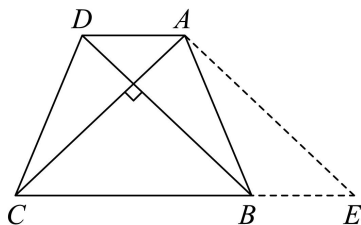


【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了梯形的中位线定理、等腰直角三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质等知识，正确作出辅助线是解题关键。过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于 E ，证明四边形 $ADBE$ 是平行四边形，易得 $AE = BD = AC$ ，进而可得 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，然后根据等腰直角三角形的直角边的长求得斜边的长，从而利用中位线定义求得答案。

【详解】 解：过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于 E ，



$\because AD \parallel BC, AE \parallel BD,$

$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BE, AE = BD,$

$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 中， $AC = BD,$

$\therefore AE = AC,$

$\because AC \perp BD, AE \parallel BD,$

$\therefore AE \perp AC,$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形，

$\because AC = 5,$

$\therefore CE = BC + BE = BC + AD = \sqrt{2}AC = 4,$

$\therefore$ 梯形的中位线 $= \frac{1}{2}CE = 2.$

故答案为：2.

16. 已知二次函数的解析式为 $y = x^2 + bx + 1$ ，从数字 0, 1, 2 中随机选取一个数作为 b 的值，得到的二次函数图像的顶点在坐标轴上的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图像与性质，简单概率计算等知识，熟练掌握相关知识是解题关键。首先确定当 $b = 0$ 、 $b = 1$ 和 $b = 2$ 时二次函数的顶点坐标，然后根据简单概率计算公式求解即可。

【详解】 解：当 $b = 0$ 时，该二次函数的解析式为 $y = x^2 + 1$ ，其顶点坐标为 $(0, 1)$ ，在 y 轴上；

当 $b=1$ 时, 该二次函数的解析式为 $y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 其顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, 不在坐标轴上;

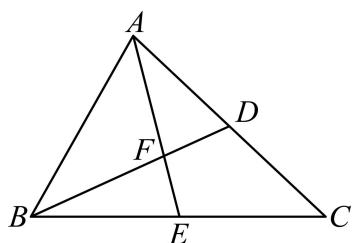
当 $b=2$ 时, 该二次函数的解析式为 $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, 其顶点坐标为 $(-1, 0)$, 在 x 轴上.

综上所述, 从数字 0, 1, 2 中随机选取一个数作为 b 的值, 得到的二次函数图像的顶点在坐标轴上的是 0, 2,

所以, 得到的二次函数图像的顶点在坐标轴上的概率 $P = \frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{2}{3}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BC 、 AC 上的中线 AE 、 BD 相交于点 F , 如果 $\angle BAE = \angle C$, 那么 $\frac{AF}{AC}$ 的值为 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

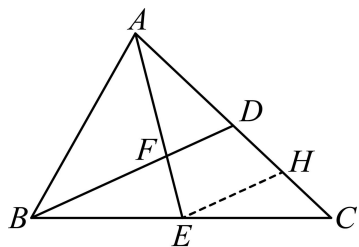
【解析】

【分析】 此题考查了相似三角形的判定和性质、平行线分线段成比例定理等知识, 先证明 $\frac{AD}{AH} = \frac{2}{3}$, 再证明 $\triangle ADF \sim \triangle AHE$, 则 $\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AH} = \frac{2}{3}$, 证明 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$, 则 $\frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{AC}$, 设 $BE = CE = k$,

则 $BC = 2k$, 得到 $AB = \sqrt{2}k$ (负值舍去), 进一步得到 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$, 则 $\frac{AF}{AE} = \frac{AF}{\frac{\sqrt{2}}{2}AC} = \frac{2}{3}$, 即可得

到答案.

【详解】 解: 过点 E 作 $EH \parallel BD$ 于点 H ,



$$\therefore \frac{CH}{DH} = \frac{CE}{BE},$$

$\because BC$ 、 AC 上的中线 AE 、 BD 相交于点 F ,

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore CH = DH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD$$

$$\therefore \frac{AD}{AH} = \frac{2}{3},$$

$\because EH \parallel BD$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle AHE$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AH} = \frac{2}{3}$$

$\because \angle BAE = \angle C, \angle ABE = \angle CBA,$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBA$$

$$\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{BA}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore AB^2 = BE \cdot BC$$

设 $BE = CE = k$, 则 $BC = 2k$,

$$\therefore AB^2 = BE \cdot BC = k \cdot 2k = 2k^2,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}k \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{2}k}{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC,$$

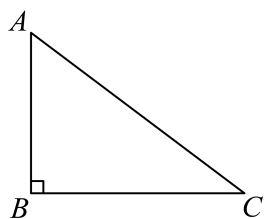
$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{\frac{\sqrt{2}}{2}AC} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6$, $\sin C = \frac{3}{5}$, D 为边 AB 上一动点, 将 DA 绕点 D 旋转, 使点 A 落在边 AC 上的点 E 处, 过点 E 作 $EF \perp DE$ 交边 BC 于点 F , 连接 DF , 当 $\triangle DEF$ 是等腰三角形时, 线

段 CF 的长为_____.



【答案】 $\frac{25}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查的是等腰直角三角形的性质，勾股定理的应用，锐角三角函数的应用，先求解 $AC=10$ ， $BC=8$ ，再判断 $\triangle DEF$ 为等腰三角形时，只有 $DE=EF$ ，再证明 $DE=DA$ ， $CF=EF$ ，再利用勾股定理建立方程可得答案.

【详解】 解： $\because \angle B=90^\circ$ ， $AB=6$ ， $\sin C=\frac{3}{5}$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{6}{AC} = \frac{3}{5},$$

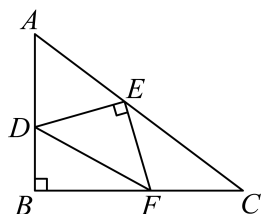
$$\therefore AC=10, \quad BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=8,$$

$\because \triangle DEF$ 为直角三角形，

$\therefore$ 当 $\triangle DEF$ 为等腰三角形时，只有 $DE=EF$ ，

如图，设 $DE=EF=x$ 时，而 $\angle DEF=90^\circ$ ，

$$\therefore DF=\sqrt{2}x, \quad \angle DEA+\angle CEF=90^\circ,$$



由旋转可得： $AD=DE=x$ ，

$$\therefore \angle A=\angle DEA, \quad BD=6-x,$$

$$\because \angle C+\angle A=90^\circ,$$

$$\therefore \angle C=\angle CEF,$$

$$\therefore EF=CF=x,$$

$$\therefore BF=8-x,$$

$$\therefore (6-x)^2+(8-x)^2=(\sqrt{2}x)^2,$$

解得: $x = \frac{25}{7}$, 即 $CF = \frac{25}{7}$;

故答案为: $\frac{25}{7}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sqrt{8} - 2024^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |\sqrt{2} - 2|$.

【答案】 $\sqrt{2} + 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式运算、负整数指数幂、零指数幂、化简绝对值等知识, 熟练掌握相关运算法则是解题关键. 首先根据二次根式性质、零指数幂运算法则、负整数指数幂运算法则以及绝对值的性质进行运算, 然后进行加减运算即可.

【详解】 解: 原式 $= 2\sqrt{2} - 1 + 2 + 2 - \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} + 3$.

20. 先化简, 再求值: $\frac{1}{a-1} + \frac{a^2+a}{a^2-2a+1} \div \frac{a+1}{a-1}$, 其中 $a = \sqrt{2}$.

【答案】 $\frac{a+1}{a-1}$; $3 + 2\sqrt{2}$

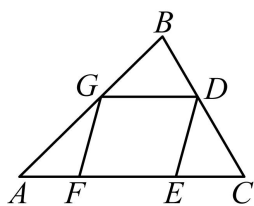
【解析】

【分析】 本题主要考查分式的四则运算以及二次根式的化简求值, 根据分式的加法法则, 除法法则把原式化简, 把 a 的值代入计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{a-1} + \frac{a^2+a}{a^2-2a+1} \div \frac{a+1}{a-1}$
 $= \frac{1}{a-1} + \frac{a(a+1)}{(a-1)^2} \cdot \frac{a-1}{a+1}$
 $= \frac{1}{a-1} + \frac{a}{a-1}$
 $= \frac{a+1}{a-1}$;

当 $a = \sqrt{2}$ 时, 原式 $= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3 + 2\sqrt{2}$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 点 G 在边 AB 上, 点 E 、 F 在边 AC 上, $GD \parallel AC$, $\angle DGF = \angle DEF$, $\angle B = \angle GFE$.



(1) 求证: 四边形 $EDGF$ 是平行四边形;

(2) 求证: $\frac{GF}{AB} = \frac{CD}{AC}$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的判定与性质、平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识, 证明四边形 $EDGF$ 是平行四边形是解题关键.

(1) 首先证明 $GF \parallel DE$, 然后利用“两组对边分别平行的四边形是平行四边形”证明四边形 $EDGF$ 是平行四边形即可;

(2) 首先由平行四边形的性质可得 $DE = GF$, $DE \parallel GF$, 进而证明 $\triangle CDE \sim \triangle CAB$, 由相似三角形的性质即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because GD \parallel AC$,

$$\therefore \angle DGF + \angle GFE = 180^\circ,$$

$$\because \angle DGF = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle DEF + \angle GFE = 180^\circ,$$

$$\therefore GF \parallel DE,$$

$$\text{又} \because GD \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EDGF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 四边形 $EDGF$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = GF, \quad DE \parallel GF,$$

$$\therefore \angle GFE = \angle DEC,$$

$$\because \angle B = \angle GFE,$$

$$\therefore \angle B = \angle DEC,$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore DE = GF,$$

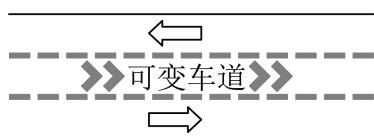
$$\therefore \frac{GF}{AB} = \frac{CD}{AC}.$$

22. 某条东西方向道路双向共有三条车道，在早晚高峰经常会拥堵，数学研究小组希望改善道路拥堵情况，他们对该路段的交通量（辆/分钟）和时间进行了统计和分析，得到下列表格，并发现时间和交通量的变化规律符合一次函数的特征.

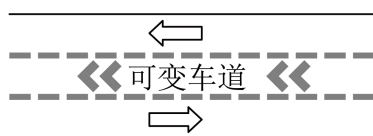
时间 x	8 时	11 时	14 时	17 时	20 时
y_1 自西向东交通量（辆/分钟）	10	16	22	28	34
y_2 自东向西交通量（辆/分钟）	25	22	19	16	13

西  东

西  东



(图1)



(图2)

- (1) 请用一次函数分别表示 y_1 与 x 、 y_2 与 x 之间的函数关系. (不写定义域)
- (2) 如图，同学们希望设置可变车道来改善拥堵状况，根据车流量情况改变可变车道的行车方向. 单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$ ，车流量大的方向交通量为 v_m ，经查阅资料得：当 $v_m \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ，需要使可变车道行车方向与拥堵方向相同，以改善交通情况，该路段从 8 时至 20 时，如何设置可变车道行车方向以缓解交通拥堵，并说明理由.

【答案】 (1) $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$), $y_2 = -x + 33$

(2) 8 时到 9 时，可变车道的方向为自东向西；18 时到 20 时，可变车道的方向为自西向东，理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的应用、解不等式的应用等知识，结合题意确定一次函数解析式是解题关键.

(1) 直接利用待定系数法求解即可；

(2) 结合 (1) 可知单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = x + 27$ ，分 $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 和 $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 两种情况讨论，分别建立关于 x 的不等式，求解即可获得答案.

【小问 1 详解】

解：设自西向东交通量 $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$),

将点 $(8, 10)$ 、 $(20, 34)$ 代入,

$$\text{可得} \begin{cases} 10 = 8k_1 + b_1 \\ 34 = 20k_1 + b_1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = 2 \\ b_1 = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{自西向东交通量 } y_1 = 2x - 6;$$

设自东向西交通量 $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$),

将点 $(8, 25)$ 、 $(20, 13)$ 代入,

$$\text{可得} \begin{cases} 25 = 8k_2 + b_2 \\ 13 = 20k_2 + b_2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_2 = -1 \\ b_2 = 33 \end{cases},$$

$$\therefore \text{自东向西交通量 } y_2 = -x + 33;$$

【小问 2 详解】

结合 (1) 可知,

$$\text{单位时间内双向交通总量为 } v_{\text{总}} = y_1 + y_2 = 2x - 6 + (-x + 33) = x + 27,$$

$$\text{当 } y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}, \text{ 即 } 2x - 6 \geq \frac{2}{3}(x + 27) \text{ 时,}$$

$$\text{解得 } x \geq 18;$$

$$\text{当 } y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}, \text{ 即 } -x + 33 \geq \frac{2}{3}(x + 27) \text{ 时,}$$

$$\text{解得 } x \leq 9.$$

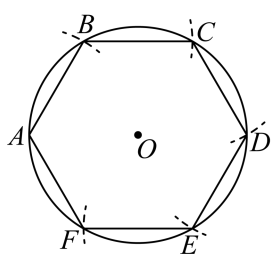
所以, 8 时到 9 时, 可变车道的方向为自东向西;

18 时到 20 时, 可变车道的方向为自西向东.

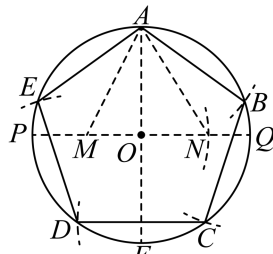
23. 沪教版九年级第二学期的教材给出了正多边形的定义: 各边相等、各角也相等的多边形叫做正多边形. 同时还提到了一种用直尺和圆规作圆的内接正六边形和圆的内接正五边形的方法, 但课本上并未证明. 我们现开展下列探究活动.

活动一: 如图 1, 展示了一种用尺规作 $\odot O$ 的内接正六边形的方法.

- ①在 $\odot O$ 上任取一点 A ，以 A 为圆心、 AO 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得一点 B ；
- ②以 B 为圆心， AO 为半径作弧，在 $\odot O$ 上截得一点 C ；再如此从点 C 逐次截得点 D 、 E 、 F ；
- ③顺次连接 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FA 。



(图1)



(图2)

(1) 根据正多边形的定义，我们只需要证明_____，_____

(请用符号语言表示，不需要说明理由)，就可证明六边形 $ABCDEF$ 是正六边形。

活动二：如图2，展示了一种用尺规作 $\odot O$ 的内接正五边形的方法。

- ①作 $\odot O$ 的两条互相垂直的直径 PQ 和 AF ；
 - ②取半径 OP 的中点 M ；再以 M 为圆心、 MA 为半径作弧，和半径 OQ 相交于点 N ；
 - ③以点 A 为圆心，以 AN 的长为半径作弧，与 $\odot O$ 相截，得交点 B 。
- 如此连续截取3次，依次得分点 C 、 D 、 E ，顺次连接 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EA ，那么五边形 $ABCDE$ 是正五边形。

(2) 已知 $\odot O$ 的半径为2，求边 AB 的长，并证明五边形 $ABCDE$ 是正五边形。

(参考数据： $\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ， $\cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$ ， $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ， $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ，

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.)$$

【答案】 (1) $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ ， $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$

(2) $AB = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ，证明五边形 $ABCDE$ 是正五边形见详解

【解析】

【分析】 (1) 各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形，据此即可获得答案；

(2) 首先结合题意并根据勾股定理得 $AM = \sqrt{5}$ ，进而可得 $MN = AM = \sqrt{5}$ ，易得 $ON = \sqrt{5} - 1$ ，再在

Rt $\triangle AON$ 中, 由勾股定理得 $AN = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, 即可确定 AB 的值; 连接 BF , OB , OC , OD , OE , 结合 AF 为 $\odot O$ 直径易得 $\angle ABF = 90^\circ$, 利用三角函数可得 $\angle AFB = 36^\circ$, 由圆周角定理可得 $\angle AOB = 72^\circ$, 进而可得 $\angle OAB = \angle OBA = 54^\circ$, 然后利用全等三角形的性质可证明 $AB = BC = CD = DE = EA$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB = 108^\circ$, 即可证明结论.

【小问 1 详解】

解: 根据正多边形的定义, 我们只需要证明 $AB = BC = CD = DE = EF = FA$,

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$, 就可证明六边形 $ABCDEF$ 是正六边形.

故答案为: $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$;

【小问 2 详解】

解: 根据题意, 可得 $AF \perp PQ$, $OP = OA = 2$,

$\therefore$ 点 M 为半径 OP 的中点,

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OP = 1,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AOM \text{ 中, } AM = \sqrt{OM^2 + OA^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$\therefore$ 以 M 为圆心、 MA 为半径作弧, 和半径 OQ 相交于点 N ,

$$\therefore MN = AM = \sqrt{5},$$

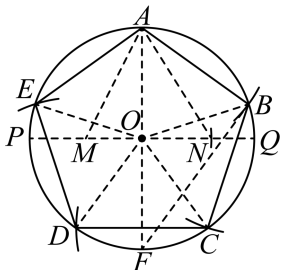
$$\therefore ON = MN - OM = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AON \text{ 中, } AN = \sqrt{ON^2 + OA^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2 + 2^2} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$\therefore$ 以点 A 为圆心, 以 AN 的长为半径作弧, 与 $\odot O$ 相截, 得交点 B ,

$$\therefore AB = AN = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

如下图, 连接 BF , OB , OC , OD , OE ,



$\therefore AF$ 为 $\odot O$ 直径,

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ, \quad AF = 2 \times 2 = 4,$$

$$\because \sin \angle AFB = \frac{AB}{AF} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\therefore \angle AFB = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle AFB = 72^\circ,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 54^\circ,$$

在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OBC$ 中,

$$\begin{cases} OA = OB \\ AB = BC, \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OBC,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 54^\circ,$$

同理可得 $\triangle OCD \cong \triangle ODE \cong \triangle OAB$,

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle EOA = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD - \angle DOE = 72^\circ = \angle AOB,$$

$$\text{又} \because OE = OA, OA = OB,$$

$$\therefore \triangle EOA \cong \triangle AOB (\text{SAS}),$$

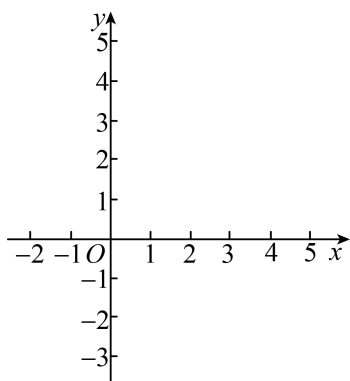
$$\therefore EA = AB, \angle OEA = \angle OAE = 54^\circ,$$

$$\therefore AB = BC = CD = DE = EA, \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = \angle EAB = 54^\circ \times 2 = 108^\circ,$$

$\therefore$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形.

【点睛】 本题主要考查了尺规作图、多边形的定义和性质、全等三角形的判定与性质、圆周角定理、解直角三角形等知识, 正确理解题意, 熟练掌握相关知识是解题关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 $A(-1, 0)$ 、 B 两点, 且与 y 轴交于点 $C(0, -2)$.



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 如果点 D 是 x 正半轴上一点, $\angle ADC = 2\angle ACO$, 且四边形 $AQCD$ 是菱形, 请直接写出点 D 和点 Q 的坐标 (不需要说明理由);
- (3) 由平面内不在同一直线上的一些线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做多边形, 对于平面内的一个多边形, 画出它的任意一边所在的直线, 如果其余各边都在这条直线的一侧, 那么这个多边形叫做“凸多边形”; 否则叫做“凹多边形”. 如果点 E 是抛物线对称轴上的一个动点, 纵坐标为 t , 且四边形 $ACBE$ 是凹四边形 (线段 AE 与线段 BC 不相交), 求 t 的取值范围.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

(2) $D\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

(3) $0 < t < -\frac{5}{4}$ 或 $t < -5$

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求出函数解析式即可;

(2) 先求出 B 点坐标, 勾股定理逆定理求出 $\angle ACB = 90^\circ$, 根据 $\angle ADC = 2\angle ACO$, 得到 D 为 AB 的中点, 再根据菱形的性质, 求出 Q 点坐标即可;

(3) 求出直线 AC, BC 的解析式, 分别求出两条直线与对称轴的交点坐标, 结合凹四边形的定义, 讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(-1, 0)$, $C(0, -2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$, 得:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times (-1)^2 - b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2;$$

【小问2详解】

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\text{当 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0 \text{ 时, 解得: } x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\therefore B(4, 0),$$

$$\therefore A(-1, 0), C(0, -2)$$

$$\therefore AB = 5, AC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBO + \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle CBO,$$

$$\therefore \angle ADC = 2\angle ACO,$$

$$\therefore \angle ADC = 2\angle OBC,$$

连接 CD , 则: $\angle ADC = \angle DCB + \angle CBD = 2\angle OBC$,

$$\therefore \angle DCB = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ACO, CD = BD,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle DCA = \angle ACO + \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle OAC,$$

$$\therefore CD = AD = BD,$$

$\therefore D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore D\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

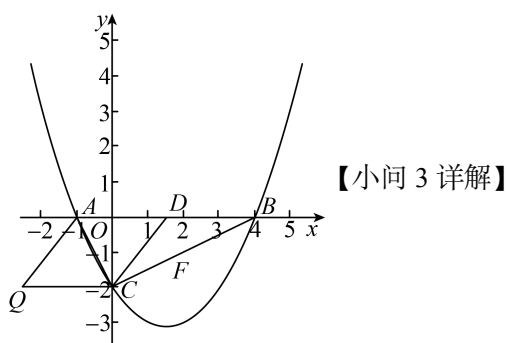
$\therefore AQCD$ 是菱形,

$$\therefore AQ \parallel CD,$$

把点 C 先向右平移 $\frac{3}{2}$ 个单位, 再向上平移 2 个单位得到点 D ,

$\therefore$ 把点 Q 先向右平移 $\frac{3}{2}$ 个单位, 再向上平移 2 个单位得到点 A ,

$$\therefore Q\left(-\frac{5}{2}, -2\right);$$



$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{对称轴与 } x \text{ 轴的交点坐标为 } D\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore A(-1, 0), B(4, 0), C(0, -2),$$

$$\therefore \text{设直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = kx - 2, \text{ 把 } B(4, 0) \text{ 代入, 得: } k = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 2, \text{ 当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = -\frac{5}{4},$$

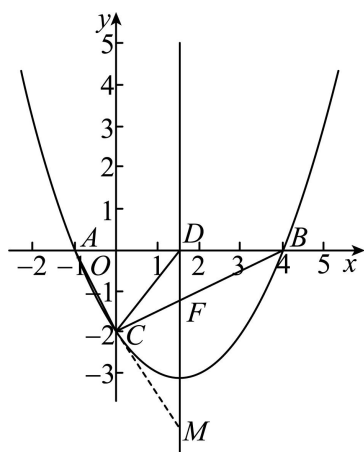
$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 与对称轴的交点坐标为 } F\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right),$$

$$\text{同法可得: 直线 } AC \text{ 的解析式为: } y = -2x - 2, \text{ 直线 } AC \text{ 与对称轴的交点坐标为 } M\left(\frac{3}{2}, -5\right),$$

$\therefore$ 点 E 是抛物线对称轴上的一个动点, 纵坐标为 t , 且四边形 $ACBE$ 是凹四边形,

$\therefore$ 当点 E 在 D, F 之间或点 E 在点 M 下方时, 满足题意,

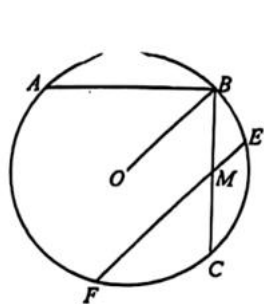
$$\therefore 0 < t < -\frac{5}{4} \text{ 或 } t < -5.$$



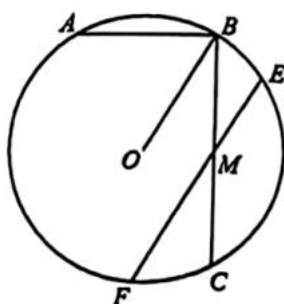
【点睛】本题考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法求函数解析式，

勾股定理逆定理，等腰三角形的判定和性质，菱形的性质等知识点，综合性强，难度较大，属于压轴题，解题的关键是掌握相关知识点，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解.

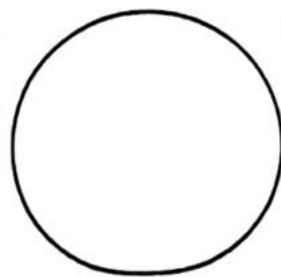
25. 如图， OB 是 $\odot O$ 的半径，弦 AB 垂直于弦 BC ，点 M 是弦 BC 的中点，过点 M 作 OB 的平行线，交 $\odot O$ 于点 E 和点 F .



(图 1)



(图 2)



(备用图)

(1) 如图 1，当 $AB = BC$ 时.

①求 $\angle ABO$ 的度数；

②连接 OE ，求证： $\angle OEF = 30^\circ$ ；

(2) 如图 2，连接 OE ，当 $AB \leq BC$ 时， $\tan \angle OEF = x$ ， $\frac{AB}{BC} = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式并直接写出定义域.

【答案】(1) (1) ① $\angle ABO = 45^\circ$ ，②见详解 (2)

$$(2) 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【解析】

【分析】(1) ①连接 AO ， CO ，由已知条件可得出 $\angle OAB = \angle OBA$ ， $\angle OBC = \angle OCB$ ，由三角形内角和得出 $2\angle OAB + 2\angle OBC = 180^\circ$ ，由外角的性质可得出 $\angle AOB = 2\angle OBC$ ， $\angle BOC = 2\angle OAB$ ，进而可得出 $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ ，即可证明 A ， O ， C 三点共线，再利用等腰三角形三线合一的性质即可求出

答案.

②连接 OE ，由平行的性质可得出 $EF \perp AC$ ，由 $BM = MC$ ，可得出 $OH = CH = \frac{1}{2}OC$ ，进而可得出 $\frac{OH}{OE} = \frac{1}{2}$ ，再由 30° 直角三角形的性质可得出 $\angle OEF = 30^\circ$ 。

(2) 过点 A 作 $AG \perp OB$ 与点 G ，过 O 点作 $OP \perp EF$ 与点 P 。设半径为 r ，则 $OE = r$ ，由 $\tan \angle OEF = x$ ，得出 $OP = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}r$ ，由平行线的性质可得出 $ON = NC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}r$ ， $\angle AOB = \angle ONP$ ，进而证明

$\triangle AOG \sim \triangle ONP$ ，由相似三角形性的性质可得出 $\frac{AG}{OP} = \frac{AO}{ON} = 2$ ，即可求出 $AG = 2OP = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}r$ ， BG ，

再求证 $\angle GAB = \angle OBC = \angle OCB$ ，即可得出 $\tan \angle GAB = \frac{BG}{AG} = \frac{AB}{BC}$ ，即 $y = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-3x^2}}{2x}$ ，根据

y 的取值范围即可求出 x 的取值范围。

【小问 1 详解】

解：①连接 AO ， CO ，

$\because AO = BO$ ， $CO = BO$

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$ ， $\angle OBC = \angle OCB$ ，

$\because 2\angle OAB + 2\angle OBC = 180^\circ$ ，且 $\angle AOB = 2\angle OBC$ ， $\angle BOC = 2\angle OAB$ ，

$\therefore \angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ ，

$\therefore A, O, C$ 三点共线，

$\because AB = BC$ ， $OA = OC$

$\therefore OB$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABO = 45^\circ$ 。

②连接 OE ，

$\because EF \parallel OB$ ， $OB \perp AC$

$\therefore EF \perp AC$ ，

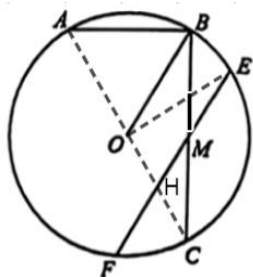
$\because BM = MC$ ，

$\therefore OH = CH = \frac{1}{2}OC$ ，

在 $Rt\triangle OHE$ 中，

$$\sin \angle OEF = \frac{OH}{OE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle OEF = 30^\circ.$$



【小问 2 详解】

过点 A 作 $AG \perp OB$ 与点 G , 过 O 点作 $OP \perp EF$ 与点 P .

设半径为 r , 则 $OE = r$,

$$\therefore \tan \angle OEF = x,$$

$$\therefore OP = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} r,$$

$$\therefore BM = MC, EF \parallel OB,$$

$$\therefore ON = NC = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} r, \angle AOB = \angle ONP$$

$$\text{又} \because \angle AGO = \angle OPN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOG \sim \triangle ONP,$$

$$\therefore \frac{AG}{OP} = \frac{AO}{ON} = 2,$$

$$\therefore AG = 2OP = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} r,$$

$$\therefore AO = r,$$

$$\therefore OG = \frac{\sqrt{1 - 3x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} r,$$

$$\therefore BG = OB - OG = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - 3x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} r,$$

$$\therefore OB = OC$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OBA = 90^\circ, \angle GAB + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAB = \angle OBC = \angle OCB$$

$$\therefore \tan \angle GAB = \frac{BG}{AG} = \frac{AB}{BC},$$

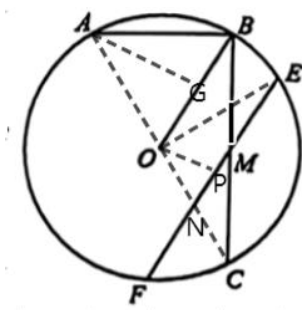
$$\therefore y = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-3x^2}}{2x},$$

$$\therefore AB \leq BC,$$

$$\therefore 0 < y \leq 1,$$

$$\text{则有} \begin{cases} 0 < \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-3x^2}}{2x} \leq 1 \\ 1-3x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases},$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质，平行线的性质，相似三角形的判定以及性质，正切的定义，直角三角形的性质，三角形外角的定义等等知识点，得出 $\tan \angle GAB = \frac{BG}{AG} = \frac{AB}{BC}$ 是解题的关键.

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资料请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

