

上海市长宁区 2023 学年第二学期初三数学

教学质量调研试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效。

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤。

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{5}}$ B. $\sqrt{0.5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{50}$

2. 关于一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 根的情况, 正确的是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 有且只有一个实数根 D. 没有实数根

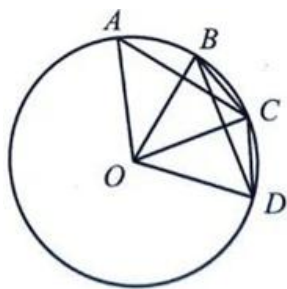
3. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是 ()

- A. $y = 2x^2$ B. $y = -\frac{2}{x}$ C. $y = -2x$ D. $y = 2x + 1$

4. 为了解某公司的收入水平, 随机挑选五人的月工资进行抽样调查, 月工资 (单位: 元) 分别是 3000, 4000, 5000, 6000, 50000, 那么能够较好的反映他们收入平均水平的是 ()

- A. 中位数 B. 标准差 C. 平均数 D. 众数

5. 如图, 已知点 A 、 B 、 C 、 D 都在 $\odot O$ 上, $OB \perp AC$, $BC = CD$, 下列说法错误的是 ()



- A. $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ B. $\angle AOD = 3\angle BOC$ C. $AC = 2CD$ D. $OC \perp BD$

6. 下列命题是假命题的是 ()

- A. 对边之和相等的平行四边形是菱形
B. 一组邻边上的高相等的平行四边形是菱形
C. 一条对角线平分一组对角, 另一条对角线平分一个内角的四边形是菱形
D. 被一条对角线分割成两个等腰三角形的平行四边形是菱形

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2^{-2} =$ _____.

8. 截至 2023 年底, 全国高铁营业里程约为 45000 公里, 这个数 45000 用科学记数法表示为 _____.

9. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-2}$ 的定义域为 _____.

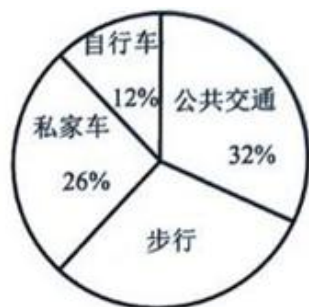
10. 方程 $\sqrt{x-1} = 3$ 的解是 _____.

11. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1-x^2}{3x} = 2$, 如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$, 那么原方程转化为关于 y 的整式方程为 _____.

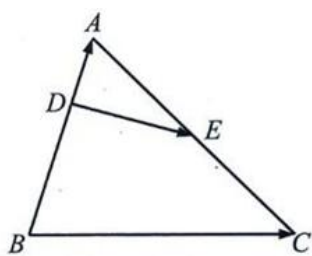
12. 如果二次函数 $y = x^2 + m$ 的图像向右平移 3 个单位后经过原点, 那么 m 的值为 _____.

13. 在 1, 2, 3 中任取两个不重复的数字组成一个两位数, 那么这个两位数是素数的概率是 _____.

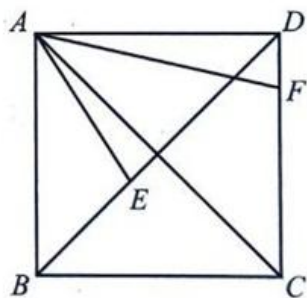
14. 为了解某校六年级 300 名学生来校的方式, 随机调查了该校六年级 50 名学生同一天来校的方式, 并绘制了如图所示的饼状图, 那么估计该校六年级 300 名学生中这一天步行来学校的共有 _____ 名.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 且 $BD = 2AD$, 点 E 是 AC 的中点, 联结 DE , 设向量 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 如果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____.

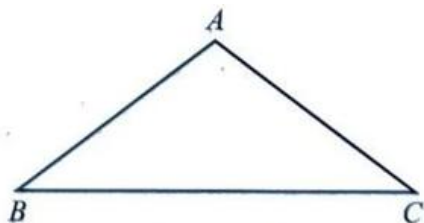


16. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在对角线 BD 上, 点 F 在边 CD 上 (点 F 不与点 C 重合), 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 那么 $\frac{CF}{BE}$ 的值为 _____.



17. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC > BC$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转, 点 A 、点 B 的对应点分别是点 D 、点 E , 如果点 A 在 DE 的延长线上, 且 $CE \parallel AB$, 那么 $\angle CAE$ 的余弦值为_____.

18. 我们把以三角形的重心为圆心的圆叫做该三角形的重心圆. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 16$, 如果 $\triangle ABC$ 的重心圆与该三角形各边的公共点一共有 4 个, 那么它的半径 r 的取值范围是_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. (本题满分 10 分)

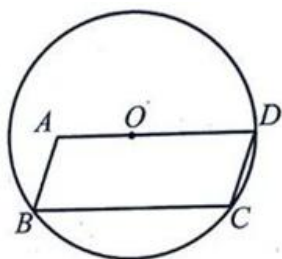
计算: $8^{\frac{1}{3}} + |\sqrt{3} - 3| - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + (\pi - \sqrt{2})^0$

20. (本题满分 10 分)

解方程组: $\begin{cases} x - y = 3, & \text{①} \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$

21. (本题满分 10 分, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

如图, $\odot O$ 经过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 B 、 C 、 D , 点 O 在边 AD 上, $AO = 3$, $OD = 5$.



(1) 求平行四边形 $ABCD$ 的面积;

(2) 求 $\angle D$ 的正弦值.

22. (本题满分 10 分, 第 (1) 小题 3 分, 第 (2) 小题 3 分, 第 (3) 小题 4 分)

春节期间甲乙两家商店各自推出优惠活动

商店	优惠方式
----	------

甲	所购商品按原价打八折
乙	所购商品按原价每满 300 元减 80 元

设顾客在甲乙两家商店购买商品的原价都为 x 元，请根据条件回答下列问题：

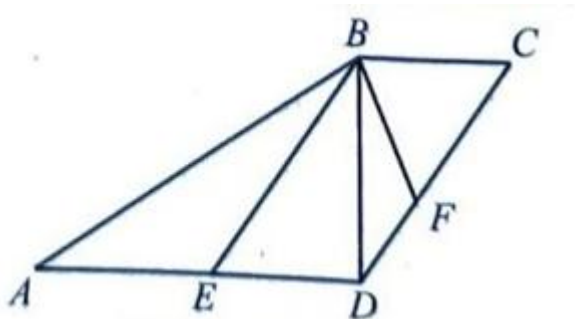
(1) 如果顾客在甲商店购买商品选择优惠活动后实际付款 y 元，求 y 关于 x 的函数解析式（不必写出函数定义域）；

(2) 购买原价在 500 元以下的商品时，如果分别选择甲商店的优惠活动和乙商店的优惠活动后，实际付款金额相等，求 x 的值；

(3) 顾客购买原价在 900 元以下的商品时，如果选择乙商店的优惠活动比选择甲商店的优惠活动更合算，求 x 的取值范围。

23. (本题满分 12 分，第 (1) 小题 5 分，第 (2) 小题 7 分)

已知：在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BD \perp AD$ ，点 E 在边 AD 上（点 E 不与点 A 、 D 重合），点 F 在边 CD 上，且 $\angle ABD = \angle EBF = \angle C$ 。

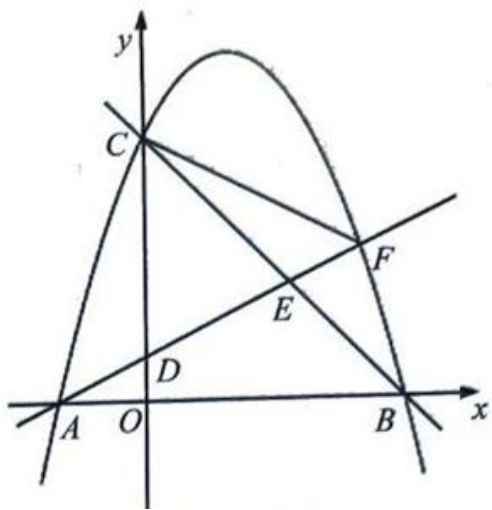


(1) 求证： $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BF}$ ；

(2) 联结 EF ，与 BD 交于点 G ，如果 $BG = EG$ ，求证：四边形 $BEDF$ 为等腰梯形。

24. (本题满分 12 分，第 (1) 小题 4 分，第 (2) 小题 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与 x 轴分别交于点 A 、 B （点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 $C(0, 6)$ ，其对称轴为直线 $x = 2$ 。



(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 点 F 是上述抛物线上位于第一象限的一个动点, 直线 AF 分别与 y 轴、线段 BC 交于点 D 、 E .

①当 $CF = DF$ 时, 求 CD 的长;

②联结 AC , 如果 $\triangle ACF$ 的面积是 $\triangle CDE$ 面积的 3 倍, 求点 F 的坐标.

25. (本题满分 14 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $AB = 6$, $\cos \angle CAB = \frac{3}{5}$, 点 O 为边 AB 上一点, 以点 O 为圆心, OA 为半径作 $\odot O$, 交边 AC 于点 D (点 D 不与点 A 、 C 重合).

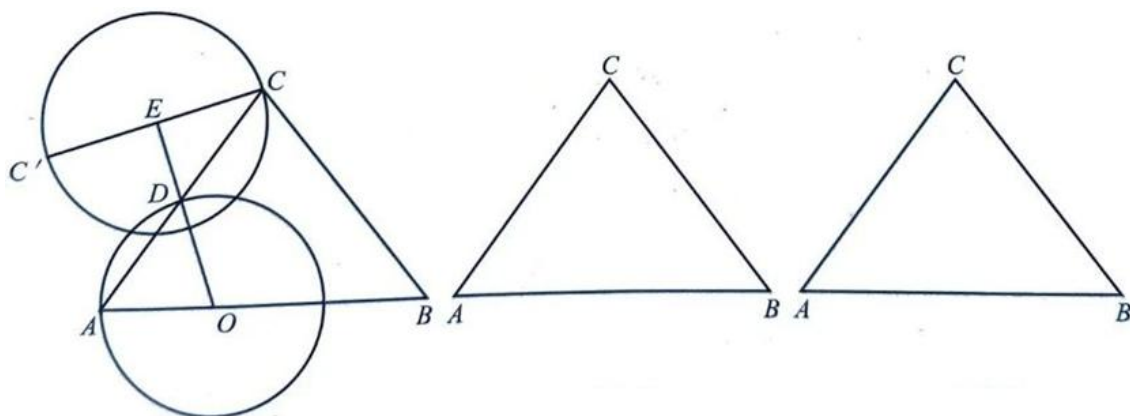


图 1

备用图

备用图

(1) 当 $AD = 4$ 时, 判断点 B 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 过点 C 作 $CE \perp OD$, 交 OD 延长线于点 E . 以点 E 为圆心, EC 为半径作 $\odot E$, 延长 CE , 交 $\odot E$ 于点 C' .

①如图 1, 如果 $\odot O$ 与 $\odot E$ 的公共弦恰好经过线段 EO 的中点, 求 CD 的长;

②联结 AC' 、 OC , 如果 AC' 与 $\triangle BOC$ 的一条边平行, 求 $\odot E$ 的半径长.

上海市长宁区 2023 学年第二学期初三数学

教学质量调研试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题, 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效。

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤。

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 下列是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{5}}$ B. $\sqrt{0.5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{50}$

【答案】C

【分析】本题考查最简二次根式知识点

①被开方数中各因式的指数都为 1;

②被开方数不含分母.

被开方数同时符合上述两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式.

【详解】由最简二次根式知识点, 判断得到 A, B, D 不是最简二次根式。

A 中, $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

B 中, $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

D 中,

答案为 C

2. 关于一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 根的情况，正确的是 ()

- A. 有两个相等的实数根 B. 有两个不相等的实数根
C. 有且只有一个实数根 D. 没有实数根

【答案】B

【分析】本题考查一元二次方程根的情况，根据一元二次方程判别式与根情况的关系，列代数式求解即可.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；

当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根.

【详解】经过计算得， $\Delta > 0$ ，所以选 B

3. 下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是 ()

- A. $y = 2x^2$ B. $y = -\frac{2}{x}$ C. $y = -2x$ D. $y = 2x + 1$

【答案】D

【分析】本题考查正反比例函数，一次函数，二次函数的图像与性质

【详解】A 选项，在对称轴右侧，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，左侧不满足题意，故 A 错；

B 选项，反比例函数，过二四象限，在各自象限内，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，但在 x 取 0 时，不满足题意，故 B 错；

C 选项，正比例函数， $k < 0$ ，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，故 C 错；

D 选项，一次函数， $k > 0$ ，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，故 D 正确。

正确答案为 D

4. 为了解某公司的收入水平，随机挑选五人的月工资进行抽样调查，月工资（单位：元）分别是 3000，4000，5000，6000，50000，那么能够较好的反映他们收入平均水平的是 ()

- A. 中位数 B. 标准差 C. 平均数 D. 众数

【答案】A

【分析】本题考查学生对统计的一些概念的理解

【详解】根据中位数的定义先确定从小到大或者从大到小排列，能够较好的反映他们收入平均水平；

标准差：方差的算数平方根叫做这组数据的标准差，用“s”表示，即

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

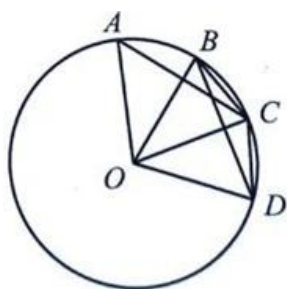
方差、标准差都反映一组数据波动大小；

平均数：一般地，如果有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，那么， $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 叫做这 n 个数的平均数；

众数：在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数。

根据定义，容易得到答案为 A

5. 如图，已知点 A, B, C, D 都在 $\odot O$ 上， $OB \perp AC$ ， $BC = CD$ ，下列说法错误的是（ ）



- A. $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ B. $\angle AOD = 3\angle BOC$ C. $AC = 2CD$ D. $OC \perp BD$

【答案】C

【分析】本题考查圆中的弦，弧，圆心角之间的相关关系及垂径定理等知识点

【详解】由 $OB \perp AC$ ，及垂径定理得 A 正确；

由 $BC = CD$ ，得到 $\angle BOC = \angle DOC$ ，又因为 $OB \perp AC$ ，所以 $\angle AOB = \angle BOC$

所以 $\angle AOB = \angle BOC = \angle DOC$ ，所以 B 正确；

由题目条件无法得到 C 选项结果，C 错误；

由垂径定理推论得到 $OC \perp BD$ ，D 正确。

本题答案为 C

6. 下列命题是假命题的是（ ）

- A. 对边之和相等的平行四边形是菱形
B. 一组邻边上的高相等的平行四边形是菱形
C. 一条对角线平分一组对角，另一条对角线平分一个内角的四边形是菱形
D. 被一条对角线分割成两个等腰三角形的平行四边形是菱形

【答案】D

【分析】本题考查菱形的判定

【详解】

- A. 对边之和相等的平行四边形是菱形。∵ 平行四边形中，对边相等，∴ 对边之和相等，即得到邻边相等，∴ 四边都相等，所以为菱形。这种说法是正确的。
- B. 一组邻边上的高相等的平行四边形是菱形。∵ 是平行四边形 又一组邻边上的高相等 ∴ 可以得到三角形全等，所以得到邻边相等，所以为菱形。这种说法是正确的。
- C. 一条对角线平分一组对角，另一条对角线平分一个内角的四边形是菱形。由三角形全等及边角关系可得邻边相等，所以为菱形。这种说法是正确的。
- D. 被一条对角线分割成两个等腰三角形的平行四边形是菱形。可以看反例，如果 $AB=AC=DC$ ，此时满足题意，但很明显不是菱形。这种说法是错误的。

本题答案为 D

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $2^{-2} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】 本题考查公式 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

【详解】 答案为 $\frac{1}{4}$

8. 截至 2023 年底, 全国高铁营业里程约为 45000 公里, 这个数 45000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 4.5×10^4

【分析】 本题考查科学记数法 $a \times 10^n (1 \leq a < 10)$ 的表示方法, 解题的关键是正确表示 a 和 n 的值. 由科学记数法的表示方法, 表示出 a 和 n 的值, 得到答案.

【详解】 答案为 4.5×10^4

9. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-2}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \neq 2$

【分析】 本题考查函数有意义的条件, 及分式有意义的条件

【详解】 由分母 $\neq 0$, 得到答案

所以答案为 $x \neq 2$

10. 方程 $\sqrt{x-1}=3$ 的解是_____.

【答案】 $x=10$

【分析】 本题考查无理方程的解法，及验根

【详解】 由题意，两边平方得

$$x-1=9$$

$$x=10$$

所以答案为 $x=10$

11. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1-x^2}{3x} = 2$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$ ，那么原方程转化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $3y^2 - 6y + 1 = 0$

【分析】 本题考查分式方程的整体换元，及分式方程化为整式方程的方法

【详解】 由题意得，原方程可以化为

$$y + \frac{1}{3y} = 2$$

$$3y^2 - 6y + 1 = 0$$

去分母得

所以答案为 $3y^2 - 6y + 1 = 0$

12. 如果二次函数 $y = x^2 + m$ 的图像向右平移 3 个单位后经过原点，那么 m 的值为_____.

【答案】 -9

【分析】 本题考查二次函数图像的平移知识点，根据左加右减，及经过原点，求得 m 的值

【详解】 $y = x^2 + m$ 向右平移 3 个单位后的解析式为 $y = (x-3)^2 + m$ ，代入点 $(0,0)$ ，解得答案

求得 m 的值为-9

13. 在 1, 2, 3 中任取两个不重复的数字组成一个两位数，那么这个两位数是素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

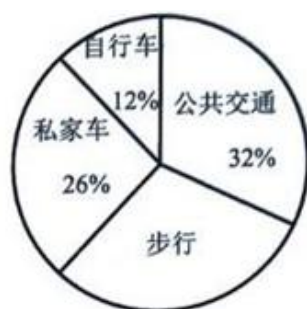
【分析】 本题考查概率知识点及简单应用，考查素数知识点

【详解】 两位数共有 12,21,13,31,23,32 这些，共 6 个，其中素数有 13, 31,23 共3 个，

所以概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

答案为 $\frac{1}{2}$

14. 为了解某校六年级 300 名学生来校的方式, 随机调查了该校六年级 50 名学生同一天来校的方式, 并绘制了如图所示的饼状图, 那么估计该校六年级 300 名学生中这一天步行来学校的共有_____名.

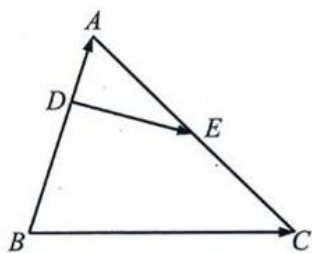


【答案】 90

【分析】 本题主要考查统计部分知识点, 及饼状图

【详解】 由饼状图可得, 抽样中的步行学生比例为 30%,
所以 300 名学生中步行的学生为 $300 \times 30\% = 90$ 名

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AB 上, 且 $BD = 2AD$, 点 E 是 AC 的中点, 联结 DE , 设向量 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 如果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$, 那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$

【分析】 本题考查向量的运算, 及三角形法则的应用, 过程见详解

【详解】 由题意得

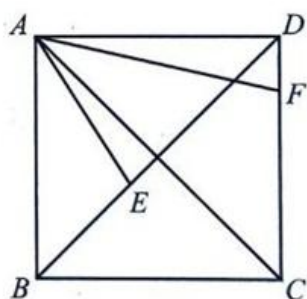
$$\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$$

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在对角线 BD 上, 点 F 在边 CD 上 (点 F 不与点 C 重合), 且 $\angle EAF = 45^\circ$, 那么 $\frac{CF}{BE}$ 的值为_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】 本题主要考查正方形背景下的相似三角形的判定, 及对应边成比例, 进而求得比例线段的值

【详解】 $\because$ 正方形 $ABCD$, 得 $\angle BAC = 45^\circ$, 又 $\angle EAF = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BAE + \angle EAC = \angle EAC + \angle CAF = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF$$

$$\because \angle ABD = \angle ACF = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF$$

$$\therefore \frac{CF}{BE} = \frac{AC}{AB} \quad \because AB = AC \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} AC$$

$$\therefore \frac{CF}{BE} = \sqrt{2}$$

$$\frac{CF}{BE} \text{ 的值为 } \sqrt{2}$$

17. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC > BC$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转, 点 A 、点 B 的对应点分别是点 D 、

点 E ，如果点 A 在 DE 的延长线上，且 $CE \parallel AB$ ，那么 $\angle CAE$ 的余弦值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】 本题主要考查图形的运动：旋转知识点。

【详解】 由旋转性质得 $CA=CD$ ， $CB=CE$ ， $\angle A=\angle D$ ， $\angle DCE=\angle ACB=90^\circ$

$\because CE \parallel AB$ ， $\therefore \angle A=\angle ACE$ ，又 $\angle ACE=\angle CAE$

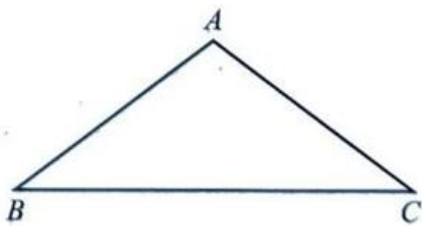
$\therefore \angle CED=2\angle ACE$

$\angle CED+\angle A=90^\circ$ ，即 $3\angle A=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$

$\therefore \angle CAE=30^\circ$ ，

$\angle CAE$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. 我们把以三角形的重心为圆心的圆叫做该三角形的重心圆. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=10$ ， $BC=16$ ，如果 $\triangle ABC$ 的重心圆与该三角形各边的公共点一共有 4 个，那么它的半径 r 的取值范围是_____.



【答案】 $r=\frac{16}{5}$ 或 $4 < r < 2\sqrt{17}$

【分析】 本题考查重心知识点，圆与三角形交点个数问题。需要分类进行讨论。

【详解】 设重心为 G ，重心圆为 $\odot G$ ，由等腰三角形 ABC ，作 $AD \perp BC$ ，交 BC 于点 D ，由勾股定理得 $AD=6$ ，

由重心性质得 $AG:DG=2:1$ ，所以 $AG=4$ ， $DG=2$ 由勾股定理得 $BG=2\sqrt{17}$ ，过点 G 作 $GH \perp AB$ 于点 H ，由

$\triangle AGH \sim \triangle ABD$ ，得到 $GH=\frac{16}{5}$

①当 $\odot G$ 过点 A 时， $r=AG=4$ ；

②当 $\odot G$ 过点 B 时， $r=BG=2\sqrt{17}$ ；

③当 $\odot G$ 与 AB ， AC 相切时， $r=GH=\frac{16}{5}$ 。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上】

19. （本题满分 10 分）

计算： $8^{\frac{1}{3}}+|\sqrt{3}-3|-\frac{1}{2+\sqrt{3}}+(\pi-\sqrt{2})^0$

【答案】4

【分析】本题考查实数的运算知识点。需要对分数指数幂，分母有理化，绝对值运算，0次幂运算要熟练掌握，运算基本功扎实，这个题目容易答对。

【详解】解：原式 $=2+3-\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})+1$

$$=6-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}$$

$$=4$$

20. (本题满分10分)

解方程组：
$$\begin{cases} x-y=3, & \textcircled{1} \\ x^2-5xy+6y^2=0. & \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{9}{2} \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

【分析】本题考查解二元二次方程组知识点。熟练掌握因式分解及消元法是解题的关键。

【详解】由②得： $(x-2y)(x-3y)=0$

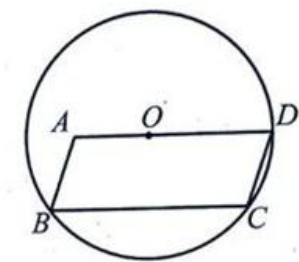
$\therefore$ 原方程组化为：
$$\begin{cases} x-y=3, \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-y=3, \\ x-3y=0. \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{9}{2}, \\ y_2=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$\therefore$ 原方程组解为
$$\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{9}{2} \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

21. (本题满分10分，第(1)小题5分，第(2)小题5分)

如图， $\odot O$ 经过平行四边形 $ABCD$ 的顶点 B 、 C 、 D ，点 O 在边 AD 上， $AO=3$ ， $OD=5$ 。



(1) 求平行四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 求 $\angle D$ 的正弦值.

【答案】(1) 平行四边形面积为 24; (2) $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

【分析】(1) 本小题主要考查垂径定理知识点及勾股定理知识点;
(2) 求正弦值, 需要构造直角三角形, 计算需要的边长即可求解.

【详解】(1) 作 $OH \perp BC$, 垂足为点 H , 联结 OC .

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $AO = 3, OD = 5 \quad \therefore BC = AD = 8$

$\because$ 在 $\odot O$ 中, OH 过圆心 O , $OH \perp BC \quad \therefore BH = CH = 4$

$\because$ $Rt\triangle OCH$ 中, $\angle OHC = 90^\circ \quad \therefore OH^2 + CH^2 = OC^2$

$\because OC = OD = 5 \quad \therefore OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\therefore$ 平行四边形面积为 $BC \cdot OH = 8 \times 3 = 24$.

(2) 作 $CG \perp AD$, 垂足为点 G .

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\therefore \angle GCH + \angle OGC = 180^\circ$

$\because CG \perp AD \quad \therefore \angle OGC = 90^\circ \quad \therefore \angle GCH = 90^\circ$

$\because \angle OHC = 90^\circ \quad \therefore$ 四边形 $OGCH$ 为矩形

$\therefore OH = CG = 3 \quad OG = CH = 4 \quad \therefore DG = 5 - 4 = 1$

$\because$ $Rt\triangle DCG$ 中, $\angle CGD = 90^\circ \quad \therefore CD = \sqrt{CG^2 + DG^2} = \sqrt{10}$

$\therefore \sin \angle D = \frac{CG}{CD} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$

22. (本题满分 10 分, 第 (1) 小题 3 分, 第 (2) 小题 3 分, 第 (3) 小题 4 分)

春节期间甲乙两家商店各自推出优惠活动

商店	优惠方式
甲	所购商品按原价打八折
乙	所购商品按原价每满 300 元减 80 元

设顾客在甲乙两家商店购买商品的原价都为 x 元, 请根据条件回答下列问题:

(1) 如果顾客在甲商店购买商品选择优惠活动后实际付款 y 元, 求 y 关于 x 的函数解析式 (不必写出函数定义域);

(2) 购买原价在 500 元以下的商品时, 如果分别选择甲商店的优惠活动和乙商店的优惠活动后, 实际付款金额相等, 求 x 的值;

(3) 顾客购买原价在 900 元以下的商品时, 如果选择乙商店的优惠活动比选择甲商店的优惠活动更合算, 求 x 的取值范围.

【答案】(1) $y = 0.8x$ (2) x 的值为 400 (3) x 的取值范围为 $300 \leq x < 400$ 或 $600 \leq x < 800$

【分析】(1) 由题意, 甲商店优惠活动按原价 x 打八折得到;

(2) 由乙商店按原价每满 300 元减 80 元, 及实际付款金额相等, 列出等量关系式, 解答得到答案;

(3) 本题主要考查学生的思维的严谨性, 需要进行分段讨论, 及不等关系的建立, 很好的考查学生的数学素养和实际应用能力.

【详解】(1) $y = 0.8x$

(2) $0.8x = x - 80$

$x = 400$ (符合题意)

答: x 的值为 400.

(3) 由题可知:

当 $300 \leq x < 600$ 时, $x - 80 < 0.8x$, $x < 400$, $\therefore 300 \leq x < 400$;

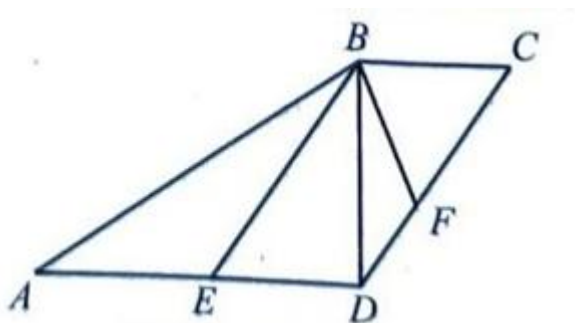
当 $600 \leq x < 900$ 时, $x - 160 < 0.8x$, $x < 800$, $\therefore 600 \leq x < 800$;

$\therefore 300 \leq x < 400$ 或 $600 \leq x < 800$

答: x 的取值范围为 $300 \leq x < 400$ 或 $600 \leq x < 800$.

23. (本题满分 12 分, 第 (1) 小题 5 分, 第 (2) 小题 7 分)

已知: 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BD \perp AD$, 点 E 在边 AD 上 (点 E 不与点 A 、 D 重合), 点 F 在边 CD 上, 且 $\angle ABD = \angle EBF = \angle C$.



(1) 求证: $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BF}$;

(2) 联结 EF , 与 BD 交于点 G , 如果 $BG = EG$, 求证: 四边形 $BEDF$ 为等腰梯形.

【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【分析】(1) 详见解析; (2) 详见解析

【详解】(1) $\because BD \perp AD$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$.

$\because BC \parallel AD$, $\therefore \angle ADB = \angle DBC = 90^\circ$.

$\therefore \angle ABD + \angle A = 90^\circ$, $\angle C + \angle CDB = 90^\circ$.

$\because \angle C = \angle ABD$, $\therefore \angle A = \angle CDB$.

$\because \angle ABD = \angle EBF$, 即 $\angle ABE + \angle EBD = \angle EBD + \angle DBF$

$\therefore \angle ABE = \angle DBF$.

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DBF$, $\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BF}$.

(2) $\because \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BF}$, $\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BF}$.

又 $\because \angle ABD = \angle EBF$, $\therefore \triangle ABD \sim \triangle EBF$.

$\therefore \angle A = \angle BEF$.

$\because GE = GB$, $\therefore \angle BEF = \angle EBD$.

$\therefore \angle A = \angle EBD$

$\because \triangle ABE \sim \triangle DBF$, $\therefore \angle A = \angle BDF$.

$\therefore \angle EBD = \angle BDF$, $\therefore BE \parallel DC$.

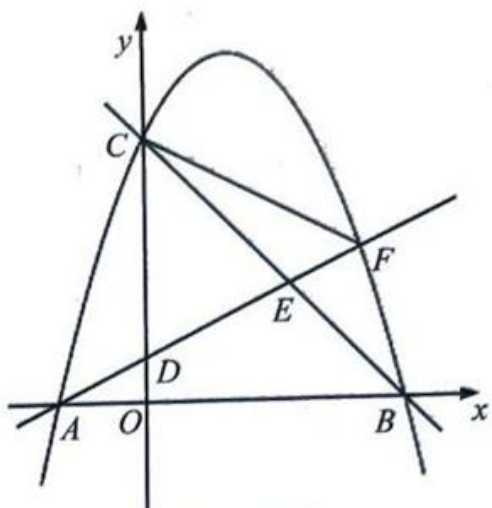
$$\therefore \frac{GB}{BD} = \frac{GE}{EF} \quad \because GE = GB \quad \therefore BD = EF$$

$\because BE \parallel DC$ BF 与 DE 不平行, $\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为梯形.

$\because BD = EF$ $\therefore$ 四边形 $BEDF$ 为等腰梯形

24. (本题满分 12 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 8 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与 x 轴分别交于点 A 、 B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 $C(0, 6)$, 其对称轴为直线 $x = 2$.



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 点 F 是上述抛物线上位于第一象限的一个动点, 直线 AF 分别与 y 轴、线段 BC 交于点 D 、 E .

①当 $CF = DF$ 时, 求 CD 的长;

②联结 AC , 如果 $\triangle ACF$ 的面积是 $\triangle CDE$ 面积的 3 倍, 求点 F 的坐标.

【答案】 (1) 抛物线表达式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ (2) $CD=5$; (3) 点 F 的坐标 $(4, 6)$

【分析】 (1) 由抛物线对称轴及过点 C , 通过待定系数法得到抛物线解析式;

(2) 因为 F 是抛物线上动点, 设点 F 坐标, 通过添加辅助线, 得到平行线, 得到角相等, 然后用锐角三角比得到比例式, 进而求得 F 的坐标, 及 CD 的长度;

(3) 因为求 F 点坐标, F 又是抛物线上动点, 设 F 坐标, 添加辅助线, 得到线段平行, 列出比例式, 又由面积关系, 得到线段的关系, 列出等量关系, 求解即可.

【详解】 (1) 对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2a} = 2 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$

$\because$ 抛物线经过点 $C(0, 6)$

$$\therefore c = 6$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为: } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$$

(2) ① 分别作 $FH \perp y$ 轴, 垂足为点 H ; 作 $FG \perp x$ 轴, 垂足为点 G .

$$\text{由 } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6, \text{ 可得 } A(-2, 0), B(6, 0).$$

$$\because CF = DF \quad FH \perp y \text{ 轴} \quad \therefore \angle CFH = \angle DFH$$

$$\because FH \parallel x \text{ 轴} \quad \therefore \angle DFH = \angle FAG \quad \therefore \angle CFH = \angle FAG.$$

$$\text{设 } F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right) \quad \because \tan \angle CFH = \tan \angle FAG$$

$$\therefore \frac{CH}{FH} = \frac{FG}{AG} \quad \therefore \frac{\frac{1}{2}m^2 - 2m}{m} = \frac{-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6}{m + 2}$$

$$\therefore m = 5 \quad (\text{符合要求}) \quad \therefore CD = 2CH = 2\left(\frac{1}{2}m^2 - 2m\right) = m^2 - 4m = 5$$

② 分别作 $FM \perp x$ 轴, 垂足为点 M ; 作 $EN \perp x$ 轴, 垂足为点 N .

$$\because B(6, 0), C(0, 6), \quad \therefore \text{直线 } BC \text{ 的表达式为: } y = -x + 6$$

$$\text{设 } F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right) \quad E(n, 6 - n)$$

$$\because EN \parallel FM \quad \therefore \frac{EN}{FM} = \frac{AN}{AM} \quad \therefore \frac{EN}{AN} = \frac{FM}{AM}$$

$$\therefore \frac{6 - n}{n + 2} = \frac{-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6}{m + 2} = -\frac{1}{2}(m - 6) \quad \text{①}$$

$$\because S_{\triangle ACF} = 3S_{\triangle DCE} \quad \therefore AF = 3DE \quad \because OD \parallel EN \parallel FM$$

$$\therefore AM = 3ON \quad \therefore m + 2 = 3n \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①②, 解得 } \begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = -4 \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{舍}), \quad \therefore F(4, 6).$$

25. (本题满分 14 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, $AB = 6$, $\cos \angle CAB = \frac{3}{5}$, 点 O 为边 AB 上一点, 以点 O 为圆心, OA 为半径作 $\odot O$, 交边 AC 于点 D (点 D 不与点 A 、 C 重合).

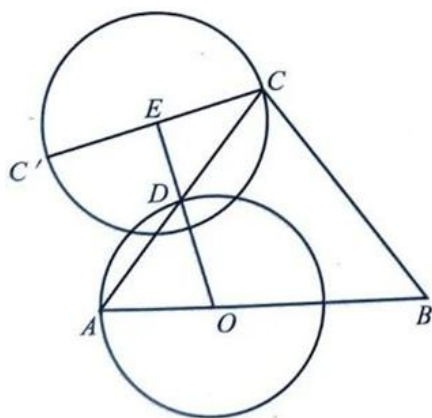


图 1

备用图

备用图

(1) 当 $AD = 4$ 时, 判断点 B 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 过点 C 作 $CE \perp OD$, 交 OD 延长线于点 E . 以点 E 为圆心, EC 为半径作 $\odot E$, 延长 CE , 交 $\odot E$ 于点 C' .

①如图 1, 如果 $\odot O$ 与 $\odot E$ 的公共弦恰好经过线段 EO 的中点, 求 CD 的长;

②联结 AC' 、 OC , 如果 AC' 与 $\triangle BOC$ 的一条边平行, 求 $\odot E$ 的半径长.

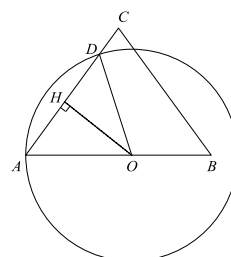
【答案】 (1) 点 B 在 $\odot O$ 内. (2) ① $CD = \frac{125}{49}$ ② $\frac{100}{39}$ $\frac{10}{7}$

【分析】 (1) 求出 OB , OA 的长度, 然后比较大小, 即可; (2) 通过添加辅助线, 构造直角三角形, 解直角三角形及锐角三角比求出线段 CD 的长度; (3) 分类进行讨论, 利用平行线性列比例式, 求 $\odot E$ 的半径 CE 的长度, 本小题综合性比较高.

【详解】

(1) 过点 O 作 $OH \perp AC$, 垂足为点 H .

$\because OH$ 过圆心, $OH \perp AD$, $\therefore AH = DH = \frac{1}{2}AD = 2$.



$$\because C'N \perp AD, \therefore ND = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(5-5k), \therefore CN = 5k + \frac{1}{2}(5-5k).$$

在 $\text{Rt}\triangle C'NC$ 中, $\angle C'NC = 90^\circ$, $\cos \angle C'CN = \frac{CN}{CC'} = \frac{4}{5}$.

$$\therefore \frac{5k + \frac{1}{2}(5-5k)}{8k} = \frac{4}{5} \therefore k = \frac{25}{39} \therefore CE = 4k = \frac{100}{39}.$$

2. $AC' \parallel OC$. 延长 OE 交 AC' 延长线于点 F .

$$\because AC' \parallel OC, \therefore \frac{OE}{EF} = \frac{CE}{C'E} = 1 \therefore OE = EF.$$

$$\because OD = OA = \frac{5}{6}(5-5k), DE = 3k, \therefore OE = 3k + \frac{5}{6}(5-5k).$$

$$\therefore EF = 3k + \frac{5}{6}(5-5k) \therefore DF = 6k + \frac{5}{6}(5-5k).$$

$$\because AC' \parallel OC, \therefore \frac{OD}{DF} = \frac{CD}{AD}, \therefore \frac{\frac{5}{6}(5-5k)}{6k + \frac{5}{6}(5-5k)} = \frac{5k}{5-5k},$$

$$14k^2 - 75k + 25 = 0, k = \frac{5}{14} \text{ 或 } 5 (\text{舍去}) \therefore CE = 4k = \frac{10}{7}.$$

综上所述: $CE = \frac{100}{39}$ 或 $\frac{10}{7}$.

