

2023-20224 学年第二学期模拟检测

初三数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上】

1. 单项式 $-2a^2b$ 的系数和次数分别是 ()

A. -2 和 2

B. -2 和 3

C. 2 和 2

D. 2 和 3

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的知识, 单项式中的数字因数叫做单项式的系数, 一个单项式中所有字母的指数的和叫做单项式的次数.

根据单项式系数和次数的概念求解.

【详解】 解: 单项式 $-2a^2b$ 的系数和次数分别是 -2 和 3.

2. 下列多项式分解因式正确的是 ()

A. $a^2 - b^2 = (a - b)^2$

B. $a^2 + b^2 = (a + b)^2$

C. $a^2 + 2a - 3 = a(a + 2) - 3$

D. $2a - 4 = 2(a - 2)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解的定义, 把一个多项式表示成几个多项式积的形式; 根据因式分解的定义逐项判断即可.

【详解】 解: A、 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \neq (a - b)^2$, 故分解错误;

B、 $a^2 + b^2$ 不能分解, 故错误;

C、不是因式分解, 故错误;

D、分解正确；

故选：D.

3. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有实数根，则 a 应满足 ()

A. $a < 1$

B. $a \leq 1$

C. $a > 1$

D. $a \geq 1$

【答案】B

【解析】

【分析】由方程有实数根，得到根的判别式的值大于等于 0，列出关于 a 的不等式，求出不等式的解集即可得到 a 的范围.

【详解】解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 有实数根，

∴ $\Delta = 4 - 4a \geq 0$,

解得： $a \leq 1$;

故选 B.

【点睛】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

4. 在气象学上，每天在规定时段采集若干气温的平均数是当天的平均气温，连续 5 天的平均气温在 10°C 以上，这 5 天中的第 1 个平均气温大于 10°C 以上的日期即为春天的开始，那么下列表述正确的是 ()

A. 这 5 天中每天采集的若干气温中最高气温一定都大于 10°C

B. 这 5 天中每天采集的若干气温中最低气温一定都大于 10°C

C. 这 5 天中每天采集的若干气温的中位数一定都大于 10°C

D. 这 5 天中每天采集的若干气温的众数一定都大于 10°C

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了众数，中位数，熟练掌握众数，中位数的定义是解题的关键.
根据众数，中位数的定义判断即可.

【详解】解：∵ 这 5 天中的第 1 个平均气温大于 10°C 以上的日期即为春天的开始，

∴ 这 5 天中每天采集的若干气温中最高气温一定都大于 10°C ，故 A 符合题意，B 不符合题意；

这 5 天中每天采集的若干气温的中位数不一定都大于 10°C ，故本选项不符合题意；

这 5 天中每天采集的若干气温的众数不一定都大于 10°C ，故本选项不符合题意，

故选：A.

5. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列说法能使四边形 $ABCD$ 为菱形的是（ ）

- A. $AB = CD$ B. $\angle ACB = \angle ACD$ C. $\angle BAC = \angle DAC$ D. $AC = BD$

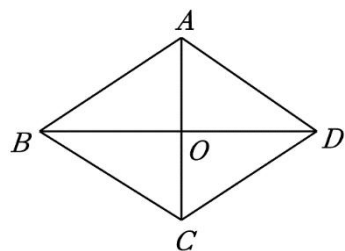
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了菱形的判定、平行四边形的判定与性质以及等腰三角形的判定等知识，证明 $\angle BCA = \angle BAC$ ，得 $AB = BC$ ，再证明 $AD = BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，然后由菱形的判定即可得出结论.

【详解】解：能使四边形 $ABCD$ 为菱形的是 $\angle BAC = \angle DAC$ ，理由如下：

如图， $\because AD \parallel BC$ ，



$$\therefore \angle BCA = \angle DAC,$$

$$\because \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形，

故选：C.

6. 下列命题中真命题是（ ）

- A. 相等的圆心角所对的弦相等
B. 正多边形都是中心对称图形

- C. 如果两个图形全等，那么他们一定能通过平移后互相重合
- D. 如果一个四边形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题：判断事物的语句叫命题；正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题。依次进行判断即可得到答案。

- 【详解】解：A. 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦相等，故选项 A 是假命题；
- B. 把一个图形绕着某一个点旋转 180° 后，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，正方形，正六边形等是中心对称图形，但正三角形，正五边形不是中心对称图形，故选项 B 是假命题；
- C. 如果两个图形全等，那么他们一定能通过翻折、平移和旋转后互相重合，故选项 C 是假命题；
- D. 如果一个四边形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形，故选项 D 是真命题。

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题， 每题 4 分， 满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算： $a^2 \cdot a^3 =$ _____.

【答案】 a^5

【解析】

【分析】分析：根据同底数的幂的乘法，底数不变，指数相加，计算即可。

【详解】解： $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.

故答案为： a^5

【点睛】熟练掌握同底数的幂的乘法的运算法则是解题的关键。

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ， $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}+1$

【解析】

【分析】本题考查了函数值和分母有理化，把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ，然后进行分母有理化即可求解，熟练掌握函数值的计算方法是解题的关键。

【详解】 $\because f(x) = \frac{1}{x-1},$

$$\therefore f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1,$$

故答案为: $\sqrt{2}+1$.

9. 已知关于 x 的方程 $\sqrt{1-x}=2$, 则 $x=$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程. 方程两边平方得出 $1-x=4$, 求出方程的解, 再进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{1-x}=2,$

方程两边平方, 得 $1-x=4,$

$$-x=4-1,$$

$$-x=3,$$

$$x=-3,$$

经检验: $x=-3$ 是方程的解.

故答案为: -3 .

10. 不等式 $\frac{1}{2}x+1<0$ 的解集是_____.

【答案】 $x<-2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式, 先移项, 再化系数为 1, 即可得出答案.

【详解】 解: 移项得: $\frac{1}{2}x<-1,$

系数化为 1 得: $x<-2,$

$\therefore$ 不等式 $\frac{1}{2}x+1<0$ 的解集是 $x<-2,$

故答案为: $x<-2$.

11. 反比例函数的图像经过点 $(1,-2)$, 则这个反比例函数的解析式是_____.

【答案】 $y=-\frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查的是用待定系数法求反比例函数的解析式, 熟练掌握待定系数法是解题的关键.

设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，把点 $(1, -2)$ 代入即可求得 k 的值.

【详解】解：设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，

$\because$ 函数经过点 $(1, -2)$ ，

$$\therefore -2 = \frac{k}{1},$$

解得 $k = -2$.

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = -\frac{2}{x}$.

故答案为： $y = -\frac{2}{x}$.

12. 从 1 到 10 这十个自然数中抽取一个数，这个数是素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ##0.4

【解析】

【分析】此题考查了概率公式，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比. 先找出素数的个数，再根据概率公式即可得出答案.

【详解】解：从 1 到 10 这十个自然数中，素数有 4 个，

则抽到这个数是素数的概率是 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

故答案为： $\frac{2}{5}$.

13. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 和 $\angle B$ 互余，那么 $\angle C =$ _____°.

【答案】 90

【解析】

【分析】此题主要考查了互为余角的定义，三角形的内角和定理，理解互为余角的定义，熟练掌握三角形的内角和定理是解决问题的关键.

首先根据 $\angle A$ 和 $\angle B$ 互余得 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，然后再根据三角形内角和定理即可求出 $\angle C$ 的度数.

【详解】解： $\because \angle A$ 和 $\angle B$ 互余，

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

根据三角形内角和定理得： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 90^\circ.$$

故答案为： 90.

14. 正 n 边形的内角等于外角的 5 倍, 那么 $n =$ _____.

【答案】 12

【解析】

【分析】此题主要考查了正 n 边形的内角和外角, 熟练掌握正 n 边形的内角的度数和外角度数公式是解决问题的关键.

根据正 n 边形的一个内角等于 $\frac{1}{n}(n-2) \times 180^\circ$, 一个外角等于 $\frac{1}{n} \times 360^\circ$ 可列出方程

$$\frac{1}{n}(n-2) \times 180^\circ = 5 \times \frac{1}{n} \times 360^\circ, \text{ 解此方程求出 } n \text{ 即可.}$$

【详解】解: $\because$ 正 n 边形的一个内角等于 $\frac{1}{n}(n-2) \times 180^\circ$, 一个外角等于 $\frac{1}{n} \times 360^\circ$,

又 $\because$ 正 n 边形的内角等于外角的 5 倍,

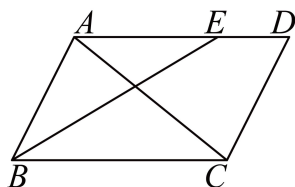
$$\therefore \frac{1}{n}(n-2) \times 180^\circ = 5 \times \frac{1}{n} \times 360^\circ,$$

解得: $n = 12$.

经检验得 $n = 12$ 是该分式方程的根,

故答案为: 12.

15. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, E 为 AD 上一点, $AE = 2ED$, 那么用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AE} =$ _____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】此题考查了平面向量的知识. 此题难度适中, 注意掌握三角形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

利用三角形法则, 可求得 $\overrightarrow{BC}$, 由平行四边形的对边平行且相等和已知条件可以推知: $AE = \frac{2}{3}BC$, 继而求得答案;

【详解】解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\therefore AE = 2ED,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AD.$$

在 $ABCD$ 中, $AD = BC$, $AD \parallel BC$,

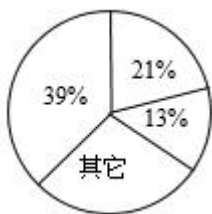
$$\therefore AE = \frac{2}{3}BC, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$.

16. 数据显示, 2023 年全球电动汽车销量约 1400 万辆, 其中市场份额前三的品牌和其它品牌的市场份额扇形统计图如图所示, 那么其它品牌的销量约为 _____ 万辆.



【答案】 378;

【解析】

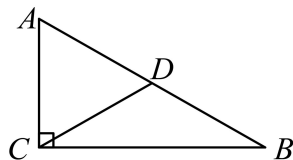
【分析】 本题考查了扇形统计图的综合运用. 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 先根据扇形统计图求出其他品牌的销量占比, 再用其他品牌的销量占比乘总体销量即可求出其它品牌的销量.

【详解】 解: $1 - 39\% - 21\% - 13\% = 27\%$,

$$1400 \times 27\% = 378 \text{ (万辆)}$$

故答案为: 378.

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2$, D 是 AB 的中点, 把 $\triangle BCD$ 沿 CD 所在的直线翻折, 点 B 落在点 E 处, 如果 $CE \perp AB$, 那么 $BE =$ _____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 由 D 为中点, $\angle ACB = 90^\circ$, 则得 $DE = DB = DA$, 则 $\angle DBC = \angle DCB$; 由 $CE \perp AB$, 得

$\angle ACF = \angle DBC$ ；由折叠的性质得 $DE = DB$, $\angle DBC = \angle DEF$, $CE = BC$, 则 $\angle DEF = \angle DCF$, 最后得 $\angle DCB = \angle DCF = \angle ACF$, 由此三角的和为直角, 从而得每个角为 30° , 则 $\angle DBC = 30^\circ$, $\triangle EBC$ 是等边三角形, 由正切三角函数即可求得结果.

【详解】解: $\because D$ 为 AB 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore DE = DB = DA,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB;$$

$$\because CE \perp AB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 90^\circ - \angle A = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle DCB;$$

由折叠的性质得 $DE = DB$, $\angle DBC = \angle DEF$, $CE = BC$,

$$\therefore \angle DEF = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DCF = \angle ACF,$$

$$\because \angle DCB + \angle DCF + \angle ACF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DCF = 30^\circ, \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB = 60^\circ,$$

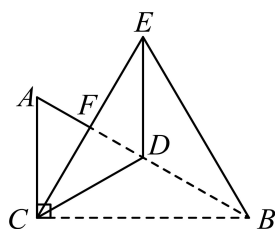
$$\because CE = CB,$$

$$\therefore \triangle EBC \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore BE = BC.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = AC \div \tan \angle DBC = 2\sqrt{3}$,

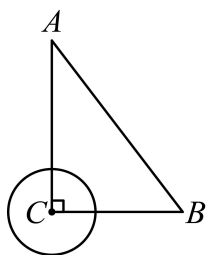
$$\therefore BE = 2\sqrt{3};$$



故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了折叠的性质, 直角三角形斜边中线的性质, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定与性质, 特殊角三角函数.

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 以点 C 为圆心作半径为 1 的圆 C , P 是 AB 上的一个点, 以 P 为圆心, PB 为半径作圆 P , 如果圆 C 和圆 P 有公共点, 那么 BP 的取值范围是_____.

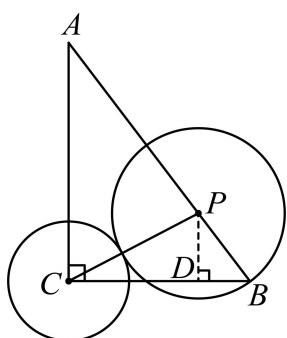


【答案】 $\frac{10}{7} \leq BP \leq 5$

【解析】

【分析】 本题考查了圆和圆的位置关系，解直角三角形的应用．分圆 P 与圆 C 外切和圆 P 与圆 C 内切时，两种情况讨论，画出图形，解直角三角形即可求解．

【详解】 解：当圆 P 与圆 C 外切时，如图，作 $PD \perp BC$ ，垂足为 D ，



设 $BP = x$ ，

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad AB = 5, \quad BC = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

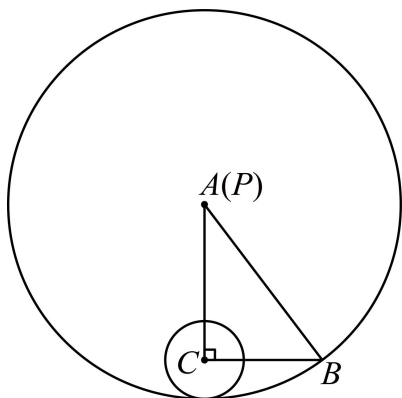
$$\therefore \sin B = \frac{PD}{BP} = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \cos B = \frac{BD}{BP} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore PD = \frac{4}{5}x, \quad BD = \frac{3}{5}x, \quad CD = 3 - \frac{3}{5}x, \quad CP = 1 + x,$$

$$\text{由勾股定理得 } (1+x)^2 = \left(3 - \frac{3}{5}x\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{10}{7}, \quad \text{即 } BP = \frac{10}{7},$$

当圆 P 与圆 C 内切时，如图，此时 $BP = \frac{10}{7}$ ，



∴ 圆 C 和圆 P 有公共点，那么 BP 的取值范围是 $\frac{10}{7} \leq BP \leq 5$.

故答案为: $\frac{10}{7} \leq BP \leq 5$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $4^{\frac{1}{2}} - 2 \sin 60^\circ - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - |\sqrt{3} - 2|$.

【答案】 -9

【解析】

【分析】 本题考查了实数的运算. 直接利用分数指数幂、特殊角的三角函数值, 负整数指数幂以及绝对值的性质分别化简得出答案.

【详解】 解: $4^{\frac{1}{2}} - 2 \sin 60^\circ - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - |\sqrt{3} - 2|$

$$= 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 9 - (2 - \sqrt{3})$$

$$= 2 - \sqrt{3} - 9 - 2 + \sqrt{3}$$

$$= -9 .$$

20. 解方程: $\frac{x+4}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} = 1$.

【答案】 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的求解, (1) 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. (2) 解分式方程一定要注意要验根.

方程两边同乘最简公分母 $x(x-1)$ 化为整式方程, 然后求解, 再进行检验.

【详解】解： $\frac{x+4}{x^2-x} - \frac{x}{x-1} = 1$

去分母得： $x+4-x^2 = x^2-x$

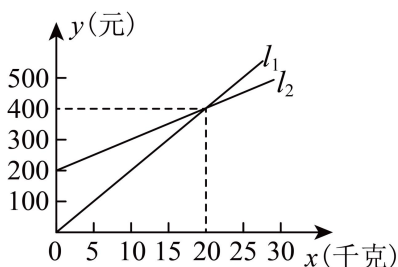
整理得： $x^2-x-2=0$

解得： $x_1 = -1$, $x_2 = 2$,

经检验： $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ 都是原方程的根.

原方程的根是 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

21. 如图，某农业合作社为农户销售草莓，经过测算，草莓销售的销售额 y_1 （元）和销售量 x （千克）的关系如射线 l_1 所示，成本 y_2 （元）和销售量 x （千克）的关系如射线 l_2 所示.



- (1) 当销售量为_____千克时，销售额和成本相等；
- (2) 每千克草莓的销售价格是_____元；
- (3) 如果销售利润为 2000 元，那么销售量为多少？

【答案】 (1) 20 (2) 20

(3) 销售量为 220 千克，见详解

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，渗透了函数与方程的思想，重点是一次函数表达式.

- (1) 即图中两条射线交点所对应的 x 值；
- (2) 从图中发现销售 20 千克时，销售额为 400 元，即可求解；
- (3) 依据利润=售价-成本，分别求出销售额 y_1 ，成本 y_2 关于销售量 x 的函数表达式，代入即可.

【小问 1 详解】

解： 由图象可知当销售量为 20 千克时，销售额和成本相等，

故答案为： 20.

【小问 2 详解】

解： 每千克草莓的销售价格为 $400 \div 20 = 20$ （元），

故答案为：20.

【小问3详解】

解：设 $y_1 = k_1x (k_1 \neq 0)$, $y_2 = k_2x + b_2 (k_2 \neq 0)$,

由题意得： $20k_1 = 400$, $\begin{cases} b_2 = 200 \\ 20k_2 + b_2 = 400 \end{cases}$,

解得： $k_1 = 20$, $\begin{cases} k_2 = 10 \\ b_2 = 200 \end{cases}$,

$\therefore l_1$ 的解析式为 $y_1 = 20x$, l_2 的解析式为 $y_2 = 10x + 200$,

$\therefore$ 销售利润为 2000 元,

$\therefore 20x - (10x + 200) = 2000$,

解得 $x = 220$,

$\therefore$ 如果销售利润为 2000 元, 那么销售量为 220 千克.

22. 上海中心大厦位于中国上海浦东陆家嘴金融贸易区核心区, 是一幢集商务、办公、酒店、商业、娱乐、观光等功能的超高层建筑. 它的附近有一所学校的数学兴趣小组在讨论建筑物的高度测量问题, 讨论发现要测量学校教学楼的高度可以用“立杆测影”的方法, 他们在平地上立一根 2 米长并且与地面垂直的测量杆, 量得影子长为 1.6 米, 同时量得教学楼的影子长为 24 米, 这样就可以计算出教学楼的高度. 进而在讨论测量上海中心大厦高度时, 由于距离远和周围建筑密集等因素, 发现用“立杆测影”的方法不可行, 要采用其他方法, 经讨论提出两个方案 (测角仪高度忽略不计):

方案 1: 如图 1 所示, 利用计算所得的教学楼 (AB) 高度, 分别在教学楼的楼顶 (点 A) 和楼底地面 (点 B), 分别测得上海中心大厦 (SH) 的楼顶 (点 S) 的仰角 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$, 通过计算就可以得到大厦的高度;

方案 2: 如图 2 所示, 在学校操场上相对于上海中心大厦的同一方向上选取两点 C 、 D , 先量得 CD 的长度, 再分别在点 C 、 D 测得上海中心大厦 (SH) 的楼顶 (点 S) 的仰角 $\angle\gamma$ 和 $\angle\theta$, 通过计算就可以得到大厦的高度. 测量并通过计算得: $CD = 60$ 米, $\cot\alpha = 10.667$, $\cot\beta = 10.161$, $\cot\gamma = 10.159$, $\cot\theta = 10.254$.

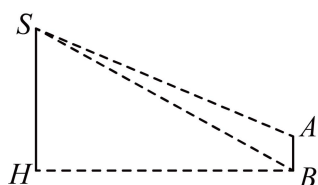


图1

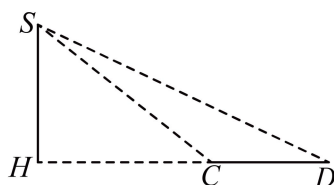


图2

(1) 教学楼 (AB) 的高度为 _____ 米;

(2) 请你在两种方案中选取一种方案, 计算出上海中心大厦 (SH) 的高度 (精确到 1 米).

【答案】(1) 30 (2) 上海中心大厦 (SH) 的高度为 632 米

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，正确地作出辅助线是解题的关键.

(1) 设教学楼 (AB) 的高度为 x 米，根据题意列方程即可得到结论；

(2) 方案 1, 设 $SH = x$ 米, 过点 A 作 $AE \perp SH$, 垂足为点 E , 根据矩形的性质得到 $EA = HB, EH = AB = 30$ (米), 解直角三角形得到上海中心大厦 (SH) 的高度为 632 米; 方案 2, 设 $SH = x$ 米, 解直角三角形即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: 设教学楼 (AB) 的高度为 x 米,

根据题意得 $\frac{2}{1.6} = \frac{x}{24}$,

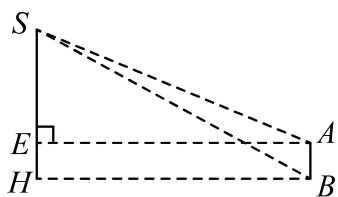
解得 $x = 30$,

答: 教学楼 (AB) 的高度为 30 米,

故答案为: 30;

【小问 2 详解】

解: 方案 1, 设 $SH = x$ 米, 过点 A 作 $AE \perp SH$, 垂足为点 E ,



$\therefore \angle ABH = \angle EHB = \angle AEH = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $EHBA$ 是矩形,

$\therefore EA = HB, EH = AB = 30$ (米)

在 $\text{Rt}\triangle AES$ 中, $\angle AES = 90^\circ$,

$\therefore AE = SE \cdot \cos \angle SAE = 10.667(x - 30)$,

在 $\text{Rt}\triangle BHS$ 中, $\angle BHS = 90^\circ$,

$\therefore BH = SH \cdot \cot \angle SBH = 10.161x$,

$\therefore 10.667(x - 30) = 10.161x$,

解得: $x \approx 632$,

$\therefore$ 上海中心大厦 (SH) 的高度为 632 米;

方案 2, 设 $SH = x$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle SHC$ 中, $\angle SHC = 90^\circ$,

$$\therefore CH = SH \cdot \cot \angle SCH = 10.159x,$$

在 $\text{Rt}\triangle SHD$ 中, $\angle SHD = 90^\circ$,

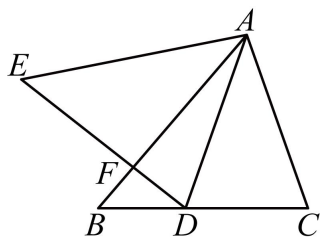
$$\therefore DH = SH \cdot \cot \angle SDH = 10.254x,$$

$$\therefore 10.254x - 10.159x = 60,$$

解得 $x \approx 632$,

$\therefore$ 上海中心大厦 (SH) 的高度为 632 米.

23. 如图, 已知: D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, 点 E 在 $\triangle ABC$ 外部, 且 $\angle BAE = \angle CAD$, $\angle ACD = \angle ADC = \angle ADE$, DE 交 AB 于点 F .



(1) 求证: $AB = AE$;

(2) 如果 $AD = AF$, 求证: $EF^2 = BF \cdot AB$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

(1) 由 $\angle ACD = \angle ADC$ 得到 $AC = AD$, 根据“角边角”推得 $\triangle ABC \cong \triangle AED$, 即可证得答案;

(2) 先证明 $\triangle ABD \cong \triangle AEF$, 得到 $BD = EF$, 再证明 $\triangle BDF \sim \triangle BAD$, 得到 $\frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BD}$, 所以 $BD^2 = BF \cdot AB$,

由此即得答案.

【小问 1 详解】

$$\because \angle ACD = \angle ADC,$$

$$\therefore AC = AD,$$

$$\because \angle BAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EAD,$$

$$\because \angle ACD = \angle ADE,$$

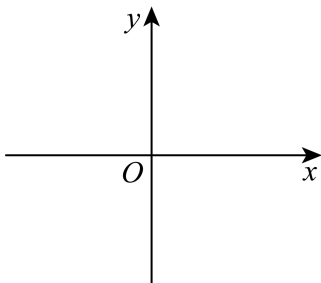
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED (\text{ASA}),$$

$$\therefore AB = AE;$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 &\because AD = AF, \\
 &\therefore \angle ADF = \angle AFD, \\
 &\therefore \angle DAF = 180^\circ - 2\angle ADF, \\
 &\because \angle ACD = \angle ADC, \\
 &\therefore \angle CAD = 180^\circ - 2\angle ADC, \\
 &\because \angle ADC = \angle ADE, \\
 &\therefore \angle CAD = \angle DAF, \\
 &\because \angle BAE = \angle CAD, \\
 &\therefore \angle DAF = \angle BAE, \\
 &\because AB = AE, \\
 &\therefore \triangle ABD \cong \triangle AEF (SAS), \\
 &\therefore BD = EF, \quad \angle BAD = \angle EAF, \\
 &\because \angle B = \angle E, \quad \angle AFE = \angle DFB, \\
 &\therefore \angle BDF = \angle BAE, \\
 &\therefore \angle BDF = \angle EAF = \angle BAD, \\
 &\because \angle B = \angle B, \\
 &\therefore \triangle BDF \sim \triangle BAD, \\
 &\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BF}{BD}, \\
 &\therefore BD^2 = BF \cdot AB, \\
 &\therefore EF^2 = BF \cdot AB.
 \end{aligned}$$

24. 已知：抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -3)$ ，顶点为 P .



- (1) 求抛物线的解析式及顶点 P 的坐标；
- (2) 平移抛物线，使得平移后的抛物线顶点 Q 在直线 AB 上，且点 Q 在 y 轴右侧.

① 若点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上，求此时抛物线的解析式；

② 若平移后的抛物线与 y 轴相交于点 D , 且 $\triangle BDQ$ 是直角三角形, 求此时抛物线的解析式.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$, 顶点 P 的坐标是 $(1, -4)$

(2) ① $y = x^2 - 4x + 3$; ② $y = x^2 - 2x - 1$

【解析】

【分析】(1) 把点 A 和点 B 的坐标代入二次函数的解析式, 用待定系数法求解即可;

(2) ① 先求直线 AB 的解析式, 设 Q 点的坐标是 $(t, t-3)$, 再根据抛物线平移的规律求解即可;

② 抛物线与 y 轴的交点是 $D(0, t^2 + t - 3)$, 分两种情况: $\angle BDQ = 90^\circ$ 或 $\angle BQD = 90^\circ$, 根据等腰直角三角形的性质求解即可.

【小问 1 详解】

由题意得:
$$\begin{cases} 9 + 3b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore b = -2, c = -3$, 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$, 顶点 P 的坐标是 $(1, -4)$.

【小问 2 详解】

① 设直线 AB 的解析式是 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} 3m + n = 0 \\ n = -3 \end{cases},$$

$\therefore m = 1, n = -3$,

$\therefore$ 直线 AB 的解析式是 $y = x - 3$,

设 Q 点的坐标是 $(t, t-3)$, 其中 $t > 0$, 此时抛物线的解析式是 $y = (x-t)^2 + t - 3$,

$\therefore$ 点 B 平移后得到的点 C 在 x 轴上,

$\therefore$ 抛物线向上平移了 3 个单位,

$\therefore t - 3 = -1$, 即 $t = 2$,

$\therefore$ 此时抛物线的解析式是 $y = (x-2)^2 + 2 - 3$, 即 $y = x^2 - 4x + 3$.

② 抛物线 $y = (x-t)^2 + t - 3$, 与 y 轴的交点是 $D(0, t^2 + t - 3)$,

如果 $\angle BDQ = 90^\circ$, 即 $DQ \perp y$ 轴不合题意,

如果 $\angle BQD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \quad AO = BO,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle QBD = \angle BDQ = 45^\circ,$$

$$\therefore QB = QD,$$

作 $QE \perp y$ 轴, 则 $BE = DE$,

$$\therefore QE = \frac{1}{2}BD,$$

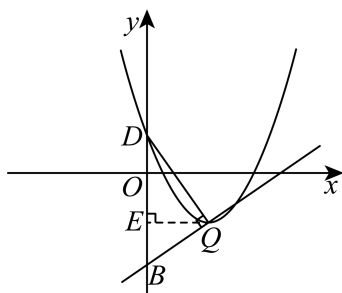
$$\therefore QE = t, \quad BD = t^2 + t,$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}(t^2 + t),$$

解得 $t_1 = 0$ (不合题意, 舍去) 或 $t_2 = 1$,

$$\therefore t = 1,$$

此时抛物线的解析式是 $y = (x-1)^2 + 1 - 3$, 即 $y = x^2 - 2x - 1$.



【点睛】 本题考查待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数的图象及性质, 二次函数的平移, 二次函数与直角三角形综合, 掌握二次函数的图象及性质, 综合运用二次函数的知识解决问题是解题的关键.

25. 如图, 已知: 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 以 A 为圆心, AB 为半径的圆与 BC 相交于点 E , 与 CD 相交于点 F , 联结 AE 、 AC 、 BF , 设 AE 、 AC 分别与 BF 相交于点 G 、 H , 其中 H 是 AC 的中点.

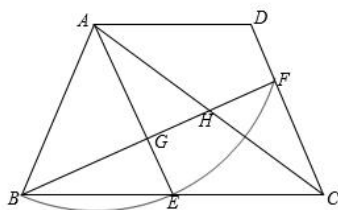


图 1

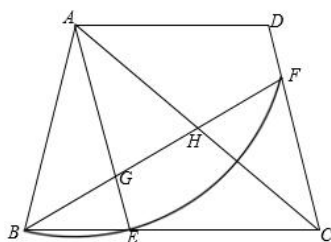


图 2

(1) 求证: 四边形 $AECD$ 为平行四边形;

(2) 如图 1, 如果 $AE \perp BF$, 求 $\frac{AB}{BC}$ 的值;

(3) 如图 2, 如果 $BG = GH$, 求 $\angle ABC$ 的余弦值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

(3) $\cos \angle ABC = \frac{\sqrt{30}}{24}$

【解析】

【分析】(1) 由题意知, $AB = AE$, 则 $\angle ABE = \angle AEB$, $AE = DC$, 由等腰梯形 $ABCD$, 可得 $\angle AEB = \angle BCD$, 则 $AE \parallel DC$, 进而结论得证;

(2) 由垂径定理得 $BG = GF$, 证明 $\triangle BEG \sim \triangle BCF$, 则 $\frac{BE}{BC} = \frac{EG}{CF} = \frac{BG}{BF} = \frac{1}{2}$, 设 $GE = a$, 则 $CF = 2a$, 证明 $\triangle AHG \cong \triangle CHF$ (AAS), 则 $AG = CF = 2a$, $AB = AE = 3a$, 由勾股定理得, $BG = \sqrt{5}a$, $BE = \sqrt{6}a$, 则 $BC = 2\sqrt{6}a$, 根据 $\frac{AB}{BC} = \frac{3a}{2\sqrt{6}a}$, 求解作答即可;

(3) 由 (2) 可知, $\triangle AHG \cong \triangle CHF$ (AAS), 则 $GH = HF$, $AG = CF$, $BG = GH = HF$, 由 (2) 可知, $\triangle BEG \sim \triangle BCF$, 则 $\frac{EG}{CF} = \frac{BE}{BC} = \frac{BG}{BF} = \frac{1}{3}$, $\frac{EG}{AG} = \frac{1}{3}$, 如图, 作 $AI \perp BC$, 垂足为点 I , 连接 AF ,

则 $BI = IF$, 设 $AB = x$, $BI = a$, 则 $AG = \frac{3}{4}x$, $IC = 5a$, 证明 $\triangle ABG \cong \triangle AFH$ (SAS), 可得

$AG = AH = \frac{3}{4}x$, $AC = 2AH = \frac{3}{2}x$, 由勾股定理得 $AI^2 = AB^2 - BI^2 = x^2 - a^2$,

$AI^2 = AC^2 - CI^2 = \frac{9}{4}x^2 - 25a^2$, 即 $x^2 - a^2 = \frac{9}{4}x^2 - 25a^2$, 可得 $\frac{a}{x} = \frac{\sqrt{30}}{24}$, 根据 $\cos \angle ABC = \frac{a}{x}$, 求解作答

即可.

【小问 1 详解】

证明: 由题意知, $AB = AE$,

$\therefore \angle ABE = \angle AEB$,

$\therefore AB = DC$,

$\therefore AE = DC$,

∵ 等腰梯形 $ABCD$,

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle BCD,$$

$$\therefore AE \parallel DC,$$

∴ 四边形 $AECD$ 为平行四边形.

【小问 2 详解】

解: ∵ $AE \perp BF$,

$$\therefore BG = GF,$$

$$\therefore AE \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{EG}{CF} = \frac{BG}{BF} = \frac{1}{2},$$

设 $GE = a$, 则 $CF = 2a$,

$$\therefore AE \parallel DC,$$

$$\therefore \angle AGH = \angle CFH,$$

又 ∵ $\angle AHG = \angle CHF$, $AH = CH$,

$$\therefore \triangle AHG \cong \triangle CHF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AG = CF = 2a,$$

$$\therefore AB = AE = 3a,$$

由勾股定理得, $BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \sqrt{5}a$,

$$\therefore BE = \sqrt{BG^2 - GE^2} = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{6}a,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{3a}{2\sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知, $\triangle AHG \cong \triangle CHF (\text{AAS})$,

$$\therefore GH = HF, AG = CF,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{\sqrt{30}}{24}.$$

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质，平行四边形的判定，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，垂径定理，余弦等知识. 熟练掌握等腰梯形的性质，平行四边形的判定，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，垂径定理，余弦是解题的关键.

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com