

2024 学年度初三年级第二次学生学习能力诊断练习

数学 练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

2025.4

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列根式中, 最简二次根式是
A. $\sqrt{8}$; B. $\sqrt{6}$; C. $\sqrt{0.5}$; D. $\sqrt[3]{3}$.
2. 如果单项式 $2x^n y z^2$ 的次数是 8, 那么 n 的值是
A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.
3. 下列函数中, y 的值随 x 的增大而减小的是
A. $y = -2x + 1$; B. $y = 2x + 1$; C. $y = x^2$; D. $y = -\frac{1}{x}$.
4. 小明对学校戏剧社 20 名成员进行年龄调查, 结果如表 1 所示, 其中有部分数据被墨迹遮挡, 那么关于这 20 名成员年龄的统计量中, 能够分析得出的是
A. 平均数; B. 众数; C. 中位数; D. 方差.

表 1

年龄 (岁)	11	12	13	14
人数 (名)	6	5		

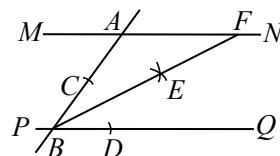


图 1

5. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 下列条件中, 不能判定四边形 $ABCD$ 是矩形的是
A. $AC=BD$; B. $OA=OB$; C. $\angle DAC=\angle BAC$; D. $\angle ABC=\angle BAD$.
6. 如图 1, 直线 $MN \parallel PQ$, 直线 AB 分别与 MN 、 PQ 相交于点 A 、 B , MN 与 PQ 之间的距离为 8, $\sin \angle MAB = \frac{4}{5}$. 小明同学利用尺规按以下步骤作图: ①以点 B 为圆心, 以任意长为半径作弧交 AB 于点 C , 交 BQ 于点 D ; ②分别以 C 、 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle ABQ$ 内交于点 E ; ③作射线 BE 交 MN 于点 F . 那么 AF 的长是
A. 6; B. 6.4; C. 8; D. 10.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算: $(-2a)^2 = \blacktriangle$.
8. 计算: $\frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} = \blacktriangle$.

9. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是 ▲ .
10. 不等式组 $\begin{cases} x-3 < 0, \\ 2(x+2) \geq x \end{cases}$ 的解集是 ▲ .
11. 已知反比例函数的图像经过点 $A(2, m)$ 和点 $B(n, -1)$, 如果点 A 与 B 关于原点对称, 那么该反比例函数的解析式是 ▲ .
12. 如果将抛物线 $y = (x-4)^2$ 先向下平移 3 个单位, 再向左平移 5 个单位, 那么所得新抛物线的表达式是 ▲ .
13. 某学校的一个小品节目入选区艺术节汇演. 参与该小品表演的全体成员中, 六年级学生有 4 名, 七年级学生有 6 名, 八年级学生有 5 名, 九年级学生有 3 名. 如果随机选取参加该小品表演的 1 位成员接受采访, 那么选到九年级学生的概率是 ▲ .
14. 如图 2, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 点 E 是边 BC 的中点, 联结 AE 、 BD 交于点 F , 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BF}$ 是 ▲ .
15. 如图 3, 由六块相同的含 30° 的直角三角形拼成一个大的正六边形, 内部留下一个小的正六边形空隙. 如果直角三角形最短边的长为 2, 那么小正六边形的边心距是 ▲ .

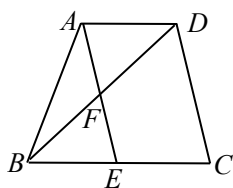


图 2

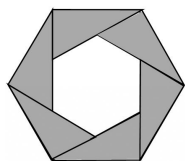


图 3

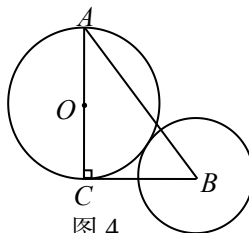


图 4

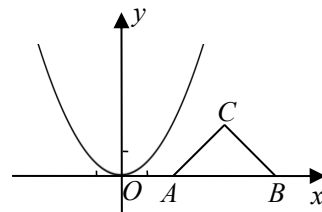


图 5

16. 如图 4, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $AB = 5$, 如果以点 B 为圆心的 $\odot B$ 与以边 AC 为直径的 $\odot O$ 外切, 那么 $\odot B$ 的半径长是 ▲ .
17. 如图 5, 已知点 $A(2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 和 $C(4, 2)$, 平移 $\triangle ABC$ 得到 $\triangle A'B'C'$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与顶点 A' 、 B' 、 C' 对应. 如果点 A' 、 B' 都在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上, 那么点 C 到点 C' 的距离是 ▲ .
18. 我们把只有一组邻边相等, 且对角互补的四边形叫做“邻补四边形”.
如图 6, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $\cos B = \frac{1}{3}$, 点 M 、 N 分别在边 AC 、 BC 上. 如果四边形 $ABNM$ 是“邻补四边形”, 那么四边形 $ABNM$ 的面积是 ▲ .

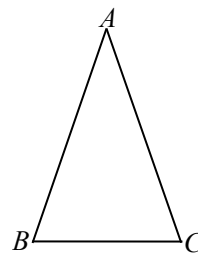


图 6

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

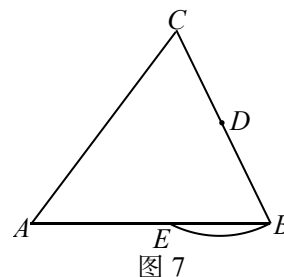
计算: $(\pi - 3.14)^0 + (3 - 2\sqrt{2})^{-1} - \sqrt[3]{-8} + (\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$.

20. (本题满分 10 分)

解方程组: $\begin{cases} 3x - y = 4, & \text{①} \\ 9x^2 + 6xy + y^2 = 4. & \text{②} \end{cases}$

21. (本题满分 10 分)

如图 7, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5\sqrt{5}$, $\tan C=2$, 点 D 为边 BC 的中点, 以 D 为圆心, 以 DB 为半径作弧交边 AB 于点 E , 求 BC 和 BE 的长.



22. (本题满分 10 分, 第 (1) 小题 3 分, 第 (2) 小题 3 分, 第 (3) 小题 4 分)

某工厂采购蓝莓并加工成蓝莓蜜饯进行销售, 该工厂一年最多能生产 200 吨蓝莓蜜饯.

已知蓝莓的采购成本价 y (万元/吨) 与蓝莓的采购量 x (吨) 成一次函数关系, 其中的几组数据如表 2 所示. 每吨原材料 (蓝莓) 的加工费为 1 万元, 减重率为 50%. 蓝莓蜜饯销售价格会随季节、市场供需等波动, 从一年中随机抽取若干单交易作为样本进行统计, 并绘制了条形统计图 (如图 8).

(1) 求 y 与 x 的函数解析式 (不写定义域);

(2) 求样本中蓝莓蜜饯的平均销售价;

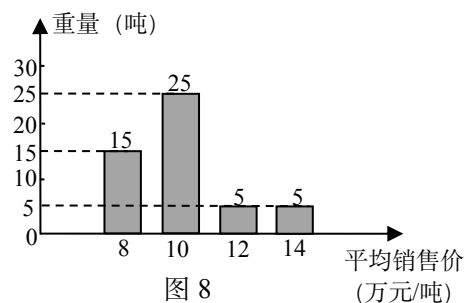
(3) 根据样本中蓝莓蜜饯的平均销售价, 该工厂一年能否恰好获得 780 万元的利润? 如果能, 求需要采购蓝莓的重量; 如果不能, 请说明理由.

(备注: 蓝莓从新鲜状态制成蓝莓蜜饯后重量减轻, 衡量这一变化的指标通常叫做“减重率”,

$$\text{其计算公式: 减重率} = \frac{\text{原始重量} - \text{最终重量}}{\text{原始重量}} \times 100\%)$$

表 2

x (吨)	50	100	150	200
y (万元/吨)	1.9	1.8	1.7	1.6

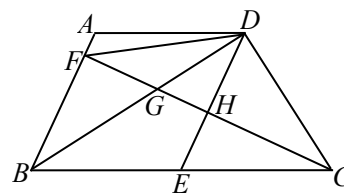


23. (本题满分 12 分, 第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 6 分)

如图 9, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 联结 BD , $\angle BDC=90^\circ$, 点 E 在 BC 上, 联结 DE , 使得 $\angle EDC=\angle ECD$, 点 F 在边 AB 上, 联结 CF , 分别交 BD 、 ED 于点 G 、 H , 且 $FH=CH$, 联结 DF .

(1) 求证: 四边形 $ABED$ 为菱形;

(2) 如果 $\angle BDE=\angle DFC$, 求证: $4EH \cdot BE = BG \cdot BD$.



24. (本题满分 12 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 4 分, 第 (3) 小题 4 分)

如图 10, 已知抛物线 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 交 y 轴于点 C .

(1) 求直线 AC 的表达式, 并用含 n 的代数式表示该抛物线的对称轴;

(2) 已知直线 $x = -4$ 与抛物线交于点 D , 与直线 AC 交于点 E , 如果 $m < 0$ 且 $DE = 12$, 求抛物线的表达式;

(3) 已知抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 点 P 在抛物线上且位于第一象限, 联结 AP 、 BC , 线段 AP 与 y 轴相交于点 E , 点 F 在线段 BC 上, 联结 PF 、 EF , 如果 $\angle PFE = 90^\circ$, 且 $S_{\triangle PEF} = 4AE^2$, 试判断能否求点 P 的坐标, 并说明理由.

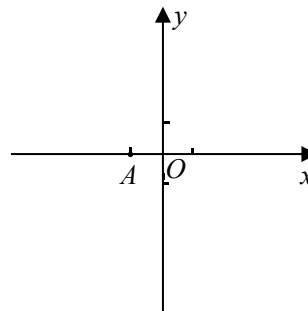


图 10

25. (本题满分 14 分, 第 (1) ①小题 4 分, 第 (1) ②小题 5 分, 第 (2) 小题 5 分)

阅读材料:

我们学过有关直角三角形的性质定理: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 这条定理的逆命题“如果一个三角形一边上的中线等于这条边的一半, 那么这个三角形是直角三角形”也是真命题.

如图 11, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 为 AB 上的中线, 如果 $CD = \frac{1}{2}AB$, 那么 $\angle ACB = 90^\circ$. 也可以说, 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $CD = AD = BD$, 那么 $\angle ACB = 90^\circ$.

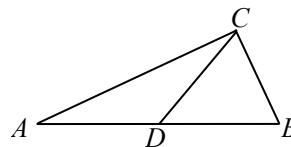


图 11

根据上面的阅读材料, 完成下列问题: (若需要, 可直接运用直角三角形性质定理的逆命题)

如图 12, AB 为半圆 O 的直径, CD 是半圆 O 上的弦, 以 CD 为直径作 $\odot M$.

(1) 如图 12①, 过点 C 作 $CE \perp AB$, 垂足为 E .

①求证: $CE^2 = AE \cdot BE$;

②已知 $BE = 1$, $CE = 3$, 如果 $\odot M$ 经过点 O (如图 12②), 求直线 CD 与直线 AB 夹角的正弦值;

(2) 已知 $\odot M$ 与线段 AB 相交于点 P 、 Q , $CD = 6\sqrt{2}$, 如果 $AP : PQ : BQ = 7 : 4 : 9$, 求 AB 的长.

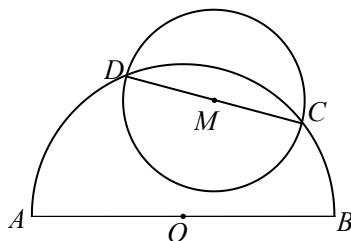


图 12

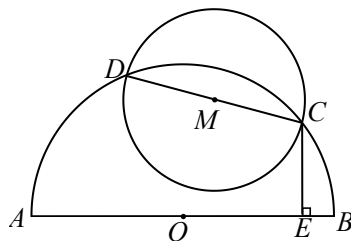


图 12①

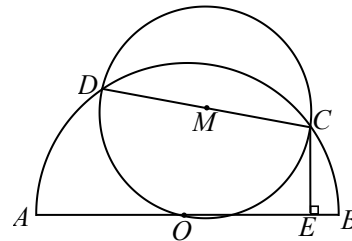


图 12②