

2024 年松江区初中毕业生学业模拟考试试卷九年级数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本考试设试卷和答题纸两部分, 试卷包括试题与答题要求, 所有答题必须涂 (选择题) 或写 (非选择题) 在答题纸上, 做在试卷上一律不得分.
2. 答题前, 务必在答题纸上填写姓名、学校和考号.
3. 答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的, 答题时应特别注意, 不能错位.

一、选择题 (本大题共 6 题) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列代数式中, 单项式是 ()

- A. $\frac{x}{2}$ B. $\frac{2}{x}$ C. $x+2$ D. $2\sqrt{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了单项式的定义, 根据数与字母的积的形式的代数式是单项式, 单独的一个数或一个字母也是单项式, 分母中含字母的不是单项式. 准确掌握定义即可解题.

【详解】解: A、 $\frac{x}{2}$ 是单项式, 符合题意;

B、 $\frac{2}{x}$ 是分式, 不符合题意;

C、 $x+2$ 是多项式, 不符合题意;

D、 $2\sqrt{x}$ 是二次根式, 不符合题意;

故选: A.

2. 当 $a > 0$ 时, 下列运算结果正确的是 ()

- A. $a^0 = 0$ B. $a^{-2} = -a^2$ C. $(-a)^3 = -a^3$ D. $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是零次幂, 负整数指数幂, 分数指数幂的含义, 整数指数幂的含义, 再逐一分析各选项即可.

【详解】解: $\because a > 0$,

$$\therefore a^0 = 1, a^{-2} = \frac{1}{a^2}, a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, (-a)^3 = -a^3,$$

$\therefore$ A, B, D 不符合题意, C 符合题意;

故选 C

3. 如果 $a > b$, c 为任意实数, 那么下列不等式一定成立的是 ()

- A. $ac > bc$ B. $ac < bc$ C. $c - a > c - b$ D. $c - a < c - b$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了不等式的性质, 根据不等式的性质分析判断即可.

【详解】解: A、 $\because a > b$, $\therefore$ 当 $c < 0$ 时, $ac < bc$, 故选项 A 不符合题意;

B、 $\because a > b$, 当 $c > 0$ 时, $ac > bc$, 故选项 B 不符合题意;

C、 $\because a > b$, c 为任意实数, $\therefore -a < -b$

$\therefore c - a > c - b$, 故选项 C 不符合题意;

D、 $\because a > b$, c 为任意实数, $\therefore -a < -b$

$\therefore c - a > c - b$, 故选项 D 符合题意.

故选: D.

4. 在一次演讲比赛中, 小明对 7 位评委老师打出的分数进行了分析, 如果去掉一个最高分和一个最低分后再次进行分析, 那么这两组数据的下列统计量一定相等的是 ()

- A. 中位数 B. 众数 C. 平均数 D. 方差

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了统计量的选择, 解题的关键是了解中位数的定义, 难度不大. 根据中位数的定义: 位于中间位置或中间两数的平均数是这组数据的中位数, 所以去掉一个最高分和一个最低分不影响中位数.

【详解】解: 一列数去掉最大的和最小的, 众数可能会改变, 方差, 平均数都可能会改变, 只有中位数一定不会变.

故选 A.

5. 下列四个命题中不正确的是 ()

- A. 对角线相等的平行四边形是矩形 B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
C. 对角线相等的菱形是正方形 D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方形、矩形、菱形及平行四边形的判定判断即可.

【详解】解：由题意可知：

A、对角线相等的平行四边形是矩形，为真命题，不合题意；

B、对角线互相垂直的平行四边形才是菱形，为假命题，符合题意；

C、对角线相等的菱形是正方形，为真命题，不合题意；

D、对角线互相平分的四边形是平行四边形，为真命题，不合题意；

故选：B.

【点睛】本题综合考查了正方形、矩形、菱形及平行四边形的判定. 解答此题时，必须理清矩形、正方形、菱形与平行四边形间的关系.

6. 已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=12$ ， $AD=5$ ，分别以 A ， C 为圆心的两圆外切，且点 D 在 $\odot A$ 内，点 B 在 $\odot C$ 内，那么 $\odot C$ 半径 r 的取值范围是（ ）

A. $5 < r < 6$

B. $5 < r < 6.5$

C. $5 < r < 8$

D. $5 < r < 12$

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理求出 AC 的长，再根据以 A ， C 为圆心的两圆外切得出 $\odot A$ 的半径，最后根据点和圆的位置关系，求出 r 的取值范围即可. 本题主要考查了相切两圆的性质以及点和圆的位置关系，求出 $\odot A$ 的半径是本题解题的关键.

【详解】解：连接 AC ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13,$$

$\because$ 以 A ， C 为圆心的两圆外切，

$$\therefore \odot A \text{ 的半径为 } AC - r = 13 - r,$$

$\because$ 点 D 在 $\odot A$ 内，

$$\therefore AD < 13 - r,$$

$$\therefore r < 8,$$

$\because$ B 在 $\odot C$ 内，

$$\therefore BC < r,$$

$$\therefore r > 5,$$

$$\therefore 5 < r < 8.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算： $\sqrt{8} - \sqrt{2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先把 $\sqrt{8}$ 化简为 $2\sqrt{2}$ ，再合并同类二次根式即可得解.

【详解】 $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

故答案为： $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的运算，正确对二次根式进行化简是关键.

8. 因式分解： $a^2 - a =$ _____.

【答案】 $a(a-1)$

【解析】

【分析】 利用提公因式法因式分解即可.

【详解】 解： $a^2 - a = a(a-1)$,

故答案为： $a(a-1)$.

【点睛】 本题考查提公因式法因式分解，是重要考点，难度较易，掌握相关知识是解题关键.

9. 不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 2x \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $1 \leq x < 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次不等式组的解法，先分别解两个不等式，求出它们的解集，再求两个不等式解集的公共部分. 不等式组解集的确定方法是：同大取大，同小取小，大小小大取中间，大大小小无解. 首先分别计算出两个不等式的解集，再确定不等式组的解集.

【详解】 解： $\begin{cases} x-1 \geq 0 \text{①} \\ x+2 > 2x \text{②} \end{cases}$,

由①得： $x \geq 1$,

由②得： $x < 2$,

$\therefore$ 不等式的解集为： $1 \leq x < 2$,

故答案为: $1 \leq x < 2$

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - x = 1$ 有两个相等的实数根, 那么 $k =$ ____.

【答案】 $-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】因为关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根, 所以 $k \neq 0$ 且判别式 $= b^2 - 4ac = 0$, 建立关于 k 的方程, 解方程即可求出 k 的值. 本题考查了一元二次方程根的判别式的应用. 切记不要忽略一元二次方程二次项系数不为零这一隐含条件.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - x - 1 = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore k \neq 0$ 且判别式 $= (-1)^2 - 4 \times k \times (-1) = 1 + 4k = 0$,

解得: $k = -\frac{1}{4}$.

故答案为: $-\frac{1}{4}$.

11. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像经过点 $(-1, 2)$, 那么在每个象限内, y 随 x 的增大而 _____. (填“增大”或“减小”)

【答案】 增大

【解析】

【分析】根据题意, 先确定 $k < 0$, 再依据反比例函数性质解答本题即可. 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征, 熟练掌握反比例函数性质是解答本题的关键.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-1, 2)$,

$\therefore k < 0$, 反比例函数图象分布在第二四象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大,

故答案为: 增大.

12. 我国新能源汽车发展迅速, 某品牌电动车第一季度销量达 10 万辆, 预计第二季度的销量比第一季度增长 10%, 第三季度的销量比第二季度增长 20%, 那么预计第三季度的销量为 ____ 万辆.

【答案】 13.2

【解析】

【分析】本题考查了销售增长率的问题, 利用“第二季度的销量=第一季度的销量 $\times$ (1+增长率 10%), 第三季度的销量=第二季度的销量 $\times$ (1+增长率 20%)”, 即可求解.

【详解】 $10 \times (1+10\%) \times (1+20\%) = 13.2$,

故答案为：13.2.

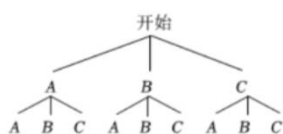
13. 一个公园有东、南、西三个入口，小明和小红分别随机从一个入口进入该公园游玩，那么他们从同一入口进入该公园游玩的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查的是用树状图法求概率，画树状图，共有 9 种等可能的结果，其中小明和小红从同一入口进入该公园游玩的结果有 3 种，再由概率公式求解即可.

【详解】 把公园的东、南、西三个入口分别记为 A 、 B 、 C ，
画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中小明和小红从同一入口进入该公园游玩的结果有 3 种，

$\therefore$ 他们从同一入口进入该公园游玩的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$.

14. 平移抛物线 $y = x^2 + 2x + 1$ ，使得平移后的抛物线经过原点，且顶点在第四象限，那么平移后的抛物线的表达式可以是_____。（只需写出一个符合条件的表达式）

【答案】 $y = x^2 - x$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数图象的平移. 根据题意可设平移后的抛物线的解析式为 $y = x^2 + ax$ ，可得该抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$ ，再由顶点在第四象限，可得 $a > 0$ ，即可.

【详解】 解：根据题意可设平移后的抛物线的解析式为 $y = x^2 + ax$ ，

$$\therefore y = x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$\therefore \text{该抛物线的顶点坐标为 } \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right),$$

$\therefore$ 顶点在第四象限，

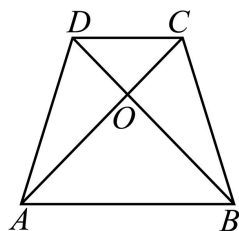
$$\therefore \frac{a}{2} > 0,$$

即 $a > 0$,

$\therefore$ 平移后的抛物线的解析式为 $y = x^2 - x$.

故答案为: $y = x^2 - x$ (答案不唯一).

15. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, AC 、 BD 交于点 O . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AO}$ 可用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的线性计算. 熟练掌握三角形法则, 是解题的关键. 先证明 $OB = \frac{2}{3}DB$, 再利用三角形法则, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD},$$

$$\because AB = 2CD,$$

$$\therefore OB = 2OD,$$

$$\therefore OB = \frac{2}{3}DB,$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB},$$

$$\because \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \vec{a} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b};$$

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

16. 某学习小组就本校学生的上学交通方式进行了一次随机抽样调查, 并绘制了两幅不完整的统计图, 如图 1 和图 2 所示. 已知该校有 1200 名学生, 估计该校步行上学的学生约为____人.

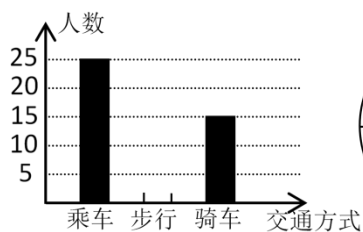


图 1

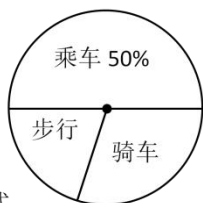


图 2

【答案】 240

【解析】

【分析】 本题考查了样本百分比估计总体百分比，先求出步行所占百分比，再用学生总数乘以步行学生所占的百分比即可估计全校步行上学的学生人数

【详解】 解：抽查的人数为： $25 \div 50\% = 50$ （人）

$\therefore$ 步行上学在扇形图中所占比例为 $\frac{50 - 25 - 15}{50} \times 100\% = 20\%$ ，

$\therefore$ 全校步行上学的学生人数为： $1200 \times 20\% = 240$ （人）

故答案为： 240

17. 一种弹簧秤称重不超过 8 千克的物体时，弹簧的长度 y （厘米）与所挂重物质量 x （千克）是一次函数关系，又已知挂 2 千克重物时弹簧的长度为 11 厘米，挂 4 千克重物时弹簧的长度为 12 厘米，那么挂 5 千克重物时弹簧的长度为_____厘米.

【答案】 12.5

【解析】

【分析】 利用待定系数法求出 y 与 x 之间的函数关系式，并标明 x 的取值范围，将 $x = 5$ 代入求出对应 y 的值即可． 本题考查一次函数的应用，利用待定系数法求出 y 与 x 之间的函数关系式是本题的关键．

【详解】 解：设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数，且 $k \neq 0$)．

将 $x = 2$ ， $y = 11$ 和 $x = 4$ ， $y = 12$ 代入 $y = kx + b$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 2k + b = 11 \\ 4k + b = 12 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = 10 \end{cases},$$

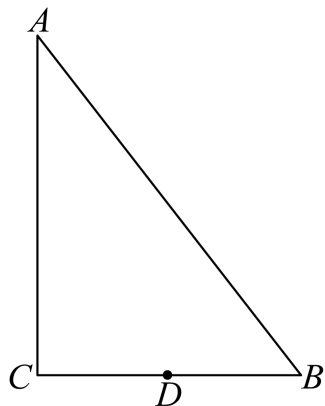
$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y = \frac{1}{2}x + 10$ ($0 \leq x \leq 8$)．

当 $x = 5$ 时， $y = \frac{1}{2} \times 5 + 10 = 12.5$ ，

$\therefore$ 挂 5 千克重物时弹簧的长度为 12.5 厘米．

故答案为：12.5.

18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 6$, $AC = 8$. D 是边 BC 的中点, E 是边 AC 上一点, 将 $\triangle CDE$ 沿着 DE 翻折, 点 C 落在点 F 处, 如果 DF 与 $\triangle ABC$ 的一边平行, 那么 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】5 或 6.5

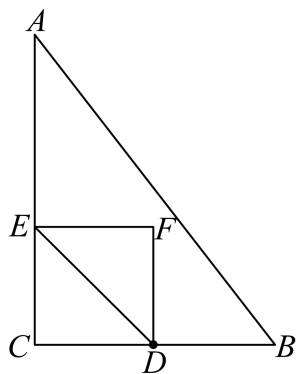
【解析】

【分析】根据 DF 与 $\triangle ABC$ 三边分别平行分类讨论, 由翻折的性质以及勾股定理求出 CE 的长, 从而求得 AE 的长即可. 本题主要考查了翻折变换, 合理运用正方形的判定与性质以及中位线定理和勾股定理是本题解题的关键.

【详解】解: ①当 $DF \parallel BC$ 时, DF 与 BC 重合,

$\therefore C, D, E$ 不构成三角形, 不符合题意;

②当 $DF \parallel AC$, 如图:



$\therefore DF \perp BC$,

$\therefore \angle CDF = 90^\circ$,

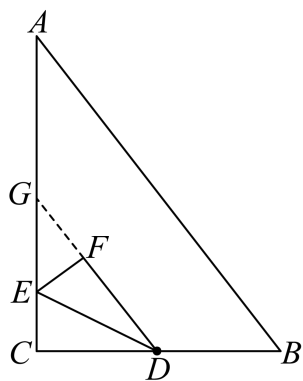
由翻折的性质可知, $CD = DF$, $CE = CF$,

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为正方形,

$\therefore CE = CD = 3$,

$\therefore AE = AC - CE = 5$;

③当 $DF \parallel AB$ ，延长 DF 交 AC 于 G ，如图：



$$\therefore CG = \frac{1}{2}AC = 4, \quad DG = \sqrt{CG^2 + CD^2} = 5,$$

$$\therefore FG = DG - DF = DG - CD = 2,$$

设 $CE = EF = x$ ，则 $EG = 4 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中， $(4 - x)^2 = x^2 + 4$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AE = AC - CE = 6.5,$$

综上所述， $AE = 5$ 或 6.5 。

故答案为：5 或 6.5。

三、解答题（本大题共 7 题）

19. 计算： $\left(1\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + |2 - \sqrt{3}| + \frac{4}{\sqrt{3} - 1} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$ 。

【答案】 $5\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算，根据分数指数幂，负整数指数幂，二次根式的混合运算进行计算即可求解。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：原式} &= \frac{4}{3} + (2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3} \\ &= \frac{4}{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 5\frac{1}{3} \end{aligned}$$

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组的解法等知识. 先将方程①变形为 $x-y=0$ 或 $x-2y=0$, 分别与方程②组成方程组, 利用代入法即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \text{ ①} \\ x^2 + y^2 = 5 \text{ ②} \end{cases}$

由方程①得 $(x-y)(x-2y)=0$, 得到 $x-y=0$ 或 $x-2y=0$.

将它们与方程②分别组成方程组, 得

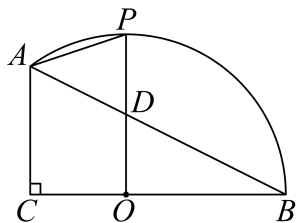
(I) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 或 (II) $\begin{cases} x-2y=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

解方程组 (I), 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases};$

解方程组 (II), 得 $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{cases};$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -2 \\ y_4 = -1 \end{cases}.$

21. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 8$. 点 O 在边 BC 上, 以 O 为圆心, OB 为半径的弧经过点 A .



(1) 求 $\odot O$ 的半径长;

(2) P 是 $\widehat{AB}$ 上一点, $PO \perp BC$, 交 AB 于点 D , 连接 AP . 求 $\angle PAB$ 的正切值.

【答案】 (1) 5 (2) 1

【解析】

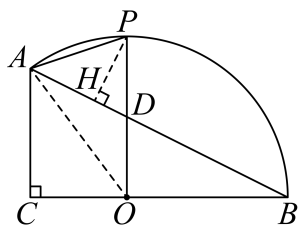
【分析】 本题主要考查了解直角三角形，圆的基本性质，勾股定理：

(1) 联结 AO ，设 $AO = BO = r$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，根据勾股定理，求出 x 的值，即可；

(2) 过点 P 作 $PH \perp AB$ ，垂足为 H 。根据锐角三角函数可得 $OD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{5}{2}\sqrt{5}$, $PD = \frac{3}{2}$ ，再由 $\angle PDH = \angle OBD$ ，可得 $HD = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $PH = \sqrt{5}$, $AH = \sqrt{5}$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解：联结 AO ，设 $AO = BO = r$ ，



$$\because BC = 8,$$

$$\therefore CO = 8 - r,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 4,$$

$$\therefore 4^2 + (8 - r)^2 = r^2$$

解得： $r = 5$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径长是 5.

【小问 2 详解】

解：过点 P 作 $PH \perp AB$ ，垂足为 H 。

$$\because \tan \angle OBD = \frac{OD}{OB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OD = \frac{5}{2}, BD = \frac{5}{2}\sqrt{5},$$

$$\therefore PD = \frac{3}{2},$$

又 $\because \angle OBD + \angle ODB = \angle DPH + \angle PDH = 90^\circ$, $\angle PDH = \angle ODB$,

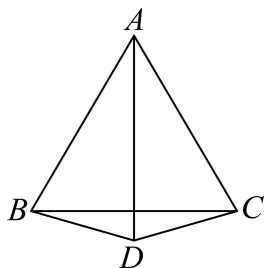
$$\therefore \angle PDH = \angle OBD,$$

$$\therefore \sin \angle DPH = \frac{DH}{PD} = \sin \angle OBD = \frac{OD}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore HD = \frac{\sqrt{5}}{2}, PH = \sqrt{5}, AH = \sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle PAB = \frac{PH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1.$$

22. 一个凸四边形的四条边及两条对角线共 6 条线段中, 如果只有两种大小不同的长度, 那么称这个四边形为“精致四边形”. 如正方形的四条边都相等, 两条对角线相等, 且边长与对角线长度不等, 所以正方形是一个“精致四边形”.



(1) 如图所示的四边形 $ABDC$ 是一个“精致四边形”, 其中 $AB = AC = BC = AD$, $BD = CD$. 试写出该“精致四边形”的两条性质 ($AB = AC = BC = AD$, $BD = CD$ 除外);

(2) 如果一个菱形 (除正方形外) 是“精致四边形”, 试画出它的大致图形, 并求出该“精致四边形”的 6 条线段中较长线段与较短线段长度的比值;

(3) 如果一个梯形是“精致四边形”, 试画出它的大致图形, 指出两种长度的线段各是哪几条, 并求出它的各内角度数.

【答案】 (1) ① $AD \perp BC$, AD 平分 BC ; ② 四边形 $ABDC$ 是轴对称图形, 直线 AD 所在的直线是它的对称轴; ③ $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABD = \angle ACD = 75^\circ$, $\angle BDC = 150^\circ$

(2) 画图形见解析, 该“精致四边形”的 6 条线段中较长线段与较短线段长度的比值为 $\sqrt{3}$

(3) 画图形见解析, 两种长度的线段各是 $AB = AD = CD$, $BD = AC = BC$, 它的各内角度数 $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查了新定义, 菱形的性质, 梯形的性质, 解题的关键是正确理解题目所给“精致四边形”的定义, 正确画出图形, 以及熟练掌握相关性质定理.

(1) 根据题意易得 AD 是 BC 的垂直平分线, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 即可得出结论;

(2) 根据题意画出图形, 则在菱形 $ABCD$ 中, 且 $AB = BC = CD = DA = BD$, 根据菱形的性质得出 $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $AC \perp BD$, 进而得出 $\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\frac{AC}{AB} = \frac{2AO}{AB} = \sqrt{3}$;

(3) 根据题意画出图形, 推出 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 1 = \angle 4$, $\angle 5 = 2\angle 1$, 再根据平行线的性质得出 $5\angle 1 = 180^\circ$, 求出 $\angle 1 = 36^\circ$, 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because AB = AC, BD = CD,$

$\therefore AD$ 是 BC 的垂直平分线,

则 $AD \perp BC, AD$ 平分 BC ;

$\because AB = AC, BD = CD, AD = AD,$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD,$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \angle ABD = \angle ACD, \angle BDA = \angle CDA,$

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是轴对称图形, 直线 AD 所在的直线是它的对称轴;

$\because AB = AC = BC,$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, 则 $\angle BAC = 60^\circ,$

$\because AD \perp BC,$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 30^\circ,$

$\because AB = AC = AD,$

$\therefore \angle ABD = \angle ACD = 75^\circ,$

$\therefore \angle BDC = 360^\circ - \angle BAC - \angle ABD - \angle ACD = 150^\circ,$

综上: 该“精致四边形”的性质有:

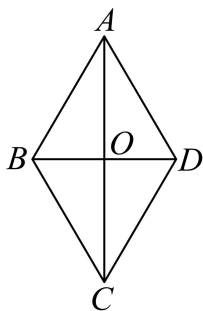
① $AD \perp BC, AD$ 平分 BC ;

② 四边形 $ABDC$ 是轴对称图形, 直线 AD 所在的直线是它的对称轴;

③ $\angle BAC = 60^\circ, \angle ABD = \angle ACD = 75^\circ, \angle BDC = 150^\circ.$

【小问 2 详解】

解: 画图



$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中, 且 $AB = BC = CD = DA = BD,$

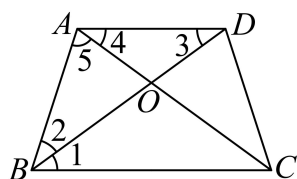
$\therefore \angle BAD = 60^\circ, \angle BAC = 30^\circ, AC \perp BD,$

$$\therefore \cos \angle BAC = \cos 30^\circ = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{2AO}{AB} = \sqrt{3}.$$

【小问3详解】

解：画图，如图： $AB = AD = CD$ ， $BD = AC = BC$ ，



$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1,$$

$$\because AB = CD, \quad BD = AC, \quad AD = AD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3,$$

$$\text{则 } \angle 2 = \angle 3 = \angle 1 = \angle 4,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1,$$

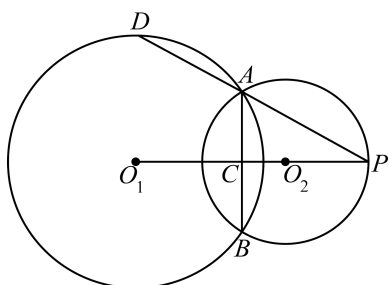
$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ, \text{ 则 } 5\angle 1 = 180^\circ,$$

$$\text{解得： } \angle 1 = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 72^\circ, \quad \angle BAD = \angle ADC = 108^\circ.$$

23. 如图，已知 AB 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦， O_1O_2 与 AB 交于点 C ， O_1O_2 的延长线与 $\odot O_2$ 交于点 P ，连接 PA 并延长，交 $\odot O_1$ 于点 D 。



(1) 连接 O_1A 、 O_2A ，如果 $AB = AD = AP$ 。求证： $O_1A \perp O_2A$ ；

(2) 如果 $PO_1 = 3PO_2$ ，求证： $PA = AD$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

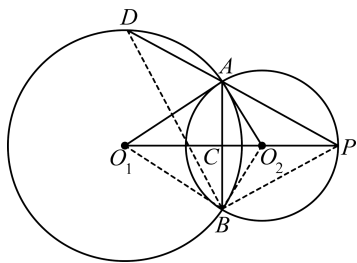
【分析】本题主要考查了相交圆的性质，综合运用垂径定理、直角三角形的判定以及平行线分线段成比例是本题解题的关键.

(1) 连接 O_1B , O_2B , BD , BP , 由直角三角形的判定可知 $\triangle DPB$ 为直角三角形, 然后根据圆周角定理求出 $\angle AO_1O_2 + \angle AO_2O_1$ 的度数即可证明;

(2) 过 O_1 作 $O_1E \perp DP$ 于 E , 过 O_2 作 $O_2F \perp DP$ 于 F , 根据垂径定理和平行线分线段成比例来证明即可.

【小问 1 详解】

连接 O_1B , O_2B , BD , BP , 如图:



$$\because AB = AD = AP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ABP, \quad \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\because \angle APB + \angle ABP + \angle ADB + \angle ABD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DBP = \angle ABP + \angle ABD = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle DPB$ 为直角三角形,

$$\therefore \angle D + \angle APB = 90^\circ,$$

由圆周角定理可知, $\angle AO_1B = 2\angle D$, $\angle AO_2B = 2\angle APB$,

$\because AB$ 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦, $O_1A = O_1B$, $O_2A = O_2B$,

$\therefore O_1O_2$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore \angle AO_1C = \frac{1}{2}\angle AO_1B, \quad \angle AO_2C = \frac{1}{2}\angle AO_2B,$$

$$\therefore \angle AO_1C + \angle AO_2C = \angle D + \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore AO_1 \perp AO_2;$$

【小问 2 详解】

【分析】本题主要考查了二次函数的综合，掌握平移变换后，点以及抛物线变化的规律是本题解题的关键.

(1) 先求出 AB 所在直线的表达式，然后将抛物线解析式化为顶点式，根据 A 和 C 都在线段 AB 上，求解即可.

(2) ①根据抛物线平移的性质求出 P 点坐标以及平移后的抛物线解析式，然后求出 D 点坐标，进而求出 PD 的直线表达式，最后求出 E 点坐标，然后根据三角形面积公式求解即可；

②根据 $EC = EP$ ，可知 E 在 CP 的垂直平分线上，再过点 E 做与 y 轴平行的直线 l ，与 CP 相交于点 M ，由垂直平分线的性质可得 $EM \perp CP$ ， $\angle PCE = \angle CPE$ ， $\angle CEM = \angle PEM$ ，再由线段 CD 与 ME 平行，推出 $\angle CDE = \angle PEM$ ， $\angle DCE = \angle CEM$ ，即 $\angle CDE = \angle DCE$ ， $CE = DE$ ，得出即 FE 垂直平分 CD ， $CF = DF$ ， C 与 D 点关于 x 对称，即可得出点 D 的坐标，由平移的性质可得平移后抛物线的表达式，最后根据 D 在平移后的抛物线上，求出 m 的值即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线过点 $A(2, 0)$ ，

$$\therefore -4 + 2b + c = 0, \quad c = 4 - 2b,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2 \times (-1)} = \frac{b}{2}, \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 8b + 16}{4},$$

$$\therefore C\left(\frac{b}{2}, \frac{b^2 - 8b + 16}{4}\right)$$

将 $B(0, 2)$ ， $A(2, 0)$ 两点分别代入到 AB 所在的一次函数 $y = kx + b_1$ ($k \neq 0$) 中，

$$\text{得} \begin{cases} 2 = b_1 \\ 0 = 2k + b_1 \end{cases},$$

$$\text{连列可得解答} \begin{cases} b_1 = 2 \\ k = -1 \end{cases},$$

故直线 AB 的解析式为: $y = -x + 2$,

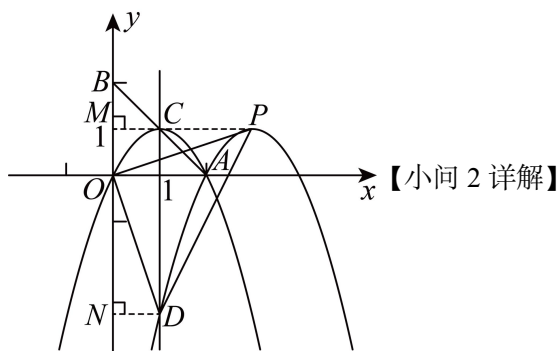
又因为顶点 C 在线段 AB 上,

$$\therefore \frac{b^2 - 8b + 16}{4} = -\frac{b}{2} + 2,$$

得 $b = 4$ (舍去) 或 $b = 2$,

$$\therefore c = 4 - 2 \times 2 = 0,$$

$$\therefore b = 2, \quad c = 0.$$



① $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$ ，顶点 C 为 $(1, 1)$ ，

当 $m=2$ 时， $y = -(x-3)^2 + 1$ ，

顶点 $P(3, 1)$ ，

当 $x=1$ 时， $y=-3$ ，

$\therefore D(1, -3)$ ，

过点 P ， D ，作 y 轴垂线 垂足分别为 M ， N ，

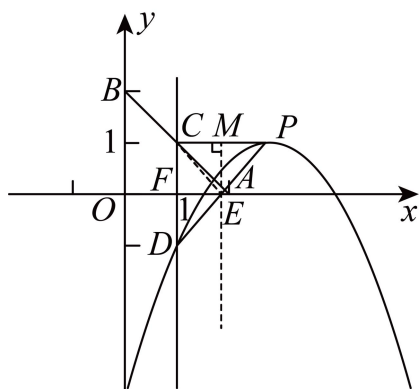
$$S_{\triangle ODP} = S_{\text{梯}PMND} - S_{\triangle OMP} - S_{\triangle ODN} = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times 2 = 5,$$

② 由平移的性质可知， $P(m+2, 1)$ ，

$\because EC = EP$ ，

$\therefore E$ 在 CP 的垂直平分线上，

如图，过点 E 做与 y 轴平行的直线 l ，与 CP 相交于点 M ，



由垂直平分线的性质可得 $EM \perp CP$ ， $\angle PCE = \angle CPE$ ，

故 $\angle CEM = \angle PEM$ ，

由图可得线段 CD 与 ME 平行，

故 $\angle CDE = \angle PEM$, $\angle DCE = \angle CEM$,

$\therefore \angle CDE = \angle DCE$,

$\therefore CE = DE$

即 FE 垂直平分 CD , $CF = DF$, C 与 D 点关于 x 对称,

$\therefore$ 顶点 C 为 $(1, 1)$,

$\therefore D$ 的坐标为 $(1, -1)$,

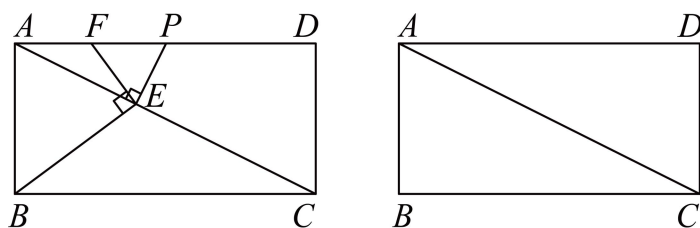
由平移的性质可得平移后抛物线的表达式为: $y = -(x-1-m)^2 + 1$,

将 $D(1, -1)$ 代入平移后的抛物线得: $-1 = -(1-1-m)^2 + 1$,

解得: $m = \sqrt{2}$ 或 $m = -\sqrt{2}$ ($m > 0$, 舍去),

$\therefore m = \sqrt{2}$.

25. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = 2$, 点 P 是边 AD 上一动点, 过点 P 作 $PE \perp AC$, 垂足为点 E , 连接 BE , 过点 E 作 $EF \perp BE$, 交边 AD 于点 F (点 F 与点 A 不重合).



备用图

(1) 当 F 是 AP 的中点时, 求证: $BA = BE$;

(2) 当 AP 的长度取不同值时, 在 $\triangle PEF$ 中是否存在长度保持不变的边? 如果存在, 请指出并求其长度, 如果不存在, 请说明理由;

(3) 延长 PE 交边 BC 于点 G , 连接 FG , $\triangle EFG$ 与 $\triangle AEF$ 能否相似, 若能相似, 求出此时 AP 的长; 若不能相似, 请说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 存在, PF 的长度不变, $PF = \frac{1}{2}$

(3) 能相似, $AP = \frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质和判定, 等腰三角形的性质及判定, 相似三角形的性质和判定, 锐角三角函数的比值关系等知识点, 灵活运用角的等量关系建立边的比值关系是解题的关键.

- (1) 利用斜边的中线是斜边的一半的性质和矩形的性质，通过角的等量代换得到 $\angle BAE = \angle BEA$ 即可；
- (2) 通过角的等量代换和相似三角形的判定方法证出 $\triangle EPF \sim \triangle EAB$ ，即可根据比值关系求解；
- (3) 连接 FG ，过点 P 作 $PH \perp BC$ ，垂足为 H ，通过角的等量代换和边的比值关系判定出四边形 $PFGH$ 是矩形，然后再利用角的等量代换证出 $\angle PAE = \angle FGP$ ，当 $\angle AFE = \angle FEG$ 时（均为钝角）时，可得到 $\triangle EFG \sim \triangle EFA$ ，从而得到 $PE = PF = \frac{1}{2}$ ，再利用勾股定理运算求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because PE \perp AC$ ， F 为 AP 的中点，

$$\therefore AF = EF,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle FEA,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because EF \perp BE,$$

$$\therefore \angle FEB = 90^\circ = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle FEB - \angle FEA = \angle BAD - \angle FAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA,$$

$$\therefore AB = BE;$$

【小问 2 详解】

解： PF 的长度不变，理由如下：

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $PE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle PEA = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{PE}{AE} = \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle FAE + \angle BAC = \angle FAE + \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle APE,$$

$$\text{又} \because \angle PEA = \angle FEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEA - \angle FEA = \angle FEB - \angle FEA,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FEP,$$

$$\therefore \triangle EPF \sim \triangle EAB,$$

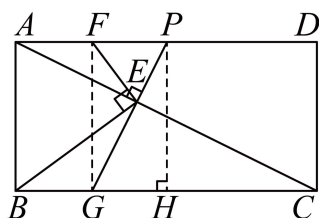
$$\therefore \frac{PF}{AB} = \frac{PE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = 1,$$

$$\therefore PF = \frac{1}{2};$$

【小问3 详解】

连接 FG ，过点 P 作 $PH \perp BC$ ，垂足为 H ，如图所示：



$$\therefore PH = AB = 1, \quad \angle PHG = 90^\circ,$$

由题意可得： $PG \perp AC$ ，

$$\therefore \angle GEC = \angle PEC = \angle PHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECG + \angle EGC = \angle GPH + \angle EGC,$$

$$\therefore \angle ECG = \angle GPH,$$

$$\therefore \tan \angle ECG = \tan \angle GPH = \frac{AB}{BC} = \frac{GH}{PH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore GH = \frac{1}{2} = PF,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore PF \parallel GH,$$

$\therefore$ 四边形 $PFGH$ 是矩形，

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAE + \angle APE = \angle APE + \angle FGP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAE = \angle FGP,$$

$\therefore$ 当 $\angle AFE = \angle FEG$ 时（均为钝角）， $\triangle EFG \sim \triangle EFA$ ，

$$\therefore \angle PFE = \angle FEP,$$

$$\therefore PE = PF = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{PE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = 1,$$

$$\therefore AP = \sqrt{AE^2 + PE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$