

2024 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列根式中， $\sqrt{3}$ 的同类二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{30}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{18}$

【分析】将各式化为最简二次根式后判断被开方数是否相同即可.

【解答】解： $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，则 A 不符合题意；

$\sqrt{30}$ 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，则 B 不符合题意；

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，它与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，则 C 符合题意；

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，它与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式，则 D 不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查同类二次根式，熟练掌握其定义是解题的关键.

2.（4 分）已知 $a > b$ ，下列不等式成立的是（ ）

- A. $-a > -b$ B. $2 - a < 2 - b$ C. $2a < 2b$ D. $a - b < 0$

【分析】根据不等式的性质逐项判断即可.

【解答】解：已知 $a > b$ ，

两边同乘 -1 得 $-a < -b$ ，则 A 不符合题意；

两边同乘 -1 ，再同时加 2 得 $2 - a < 2 - b$ ，则 B 符合题意；

两边同乘 2 得 $2a > 2b$ ，则 C 不符合题意；

两边同时减 b 得 $a - b > 0$ ，则 D 不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查不等式的性质，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握.

3.（4 分）如果 $k < 0$ ， $b < 0$ ，那么一次函数 $y = kx + b$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据一次函数图象与系数的关系进行判断即可.

【解答】解：当一次函数 $k < 0$ ， $b < 0$ ，经过第二三四象限，不经过第一象限，

故选：A.

【点评】本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数的性质是解答本题的关键．

4. (4分) 已知一组数据 $a, 2, 4, 1, 6$ 的中位数是 4，那么 a 可以是 ()

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

【分析】当总数个数是奇数的话，按从小到大的顺序，取中间的那个数就是这组数据的中位数．

而一组数 $a, 2, 4, 1, 6$ 的中位数是 4，所以前 3 个数是 1, 2, 4，那么剩下的两个就是 $a, 6$ ，这样就知道 a 与 4 的大小关系．

【解答】解：根据题意，得

$a, 2, 4, 1, 6$ 的中位数是 4，所以前 3 个数是 1, 2, 4，那么剩下的两个就是 $a, 6$ ，所以 a 可以是大于或等于 4 的任意一个数．

故选：D．

【点评】本题考查了中位数的意义．如果总数个数是奇数的话，按从小到大的顺序，取中间的那个数；如果总数个数是偶数个的话，按从小到大的顺序，取中间那两个数的平均数．

5. (4分) 下列命题中，真命题的是 ()

- A. 四条边相等的四边形是正方形
B. 四个内角相等的四边形是正方形
C. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形
D. 对角线互相垂直的矩形是正方形

【分析】根据矩形、菱形、正方形的判定定理判断即可．

【解答】解：A、四条边相等的四边形是菱形，不一定是正方形，故本选项命题错误，不符合题意；

B、四个内角相等的四边形是矩形，不一定是正方形，故本选项命题错误，不符合题意；

C、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，不一定是正方形，故本选项命题错误，不符合题意；

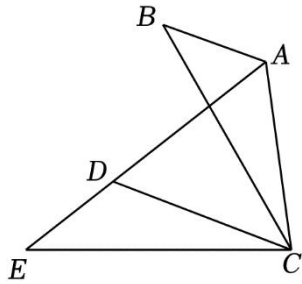
D、对角线互相垂直的矩形是正方形，命题正确，符合题意；

故选：D．

【点评】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理．

6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \neq AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转，

点 A 、 B 分别落在点 D 、 E 处，如果点 A 、 D 、 E 在同一直线上，那么下列结论错误的是
()



- A. $\angle ADC = 60^\circ$ B. $\angle ACD = 60^\circ$ C. $\angle BCD = \angle ECD$ D. $\angle BAD = \angle BCE$

【分析】由旋转的性质可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，则 $CD = CA$ ， $\angle BAC = \angle EDC = 120^\circ$ ，得出 $\angle ADC = 60^\circ$ ，进而得出 $\triangle ADC$ 是等边三角形，即可判断选项 A ， B ， D 结论正确。

【解答】解： $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转，点 A 、 B 分别落在点 D 、 E 处，

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC,$$

$$\therefore CD = CA, \angle BAC = \angle EDC = 120^\circ, \text{ 得}$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ, \text{ 故 } A \text{ 正确;}$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ, \text{ 故 } B \text{ 正确,}$$

$$\therefore \angle DAC = 60^\circ, \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCE, \text{ 故 } D \text{ 正确;}$$

$$\therefore \angle ECD = \angle BCA, BC \text{ 不一定平分 } \angle ACD,$$

$$\therefore \angle BCD \text{ 不一定等于 } \angle ECD,$$

故选：C.

【点评】本题考查旋转的性质，熟练掌握旋转的想知识解题关键。

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 计算： $6a^3 \div 2a^2 = \underline{3a}$.

【分析】根据整式除法的运算法则计算即可。

【解答】解： $6a^3 \div 2a^2 = 3a$.

故答案为： $3a$.

【点评】本题考查了整式的除法，熟练掌握整式除法的运算法则是关键。

8. (4分) 在实数范围内因式分解 $x^2 - 3 = \underline{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}$.

【分析】根据平方差公式分解因式即可.

【解答】解: $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

故答案为: $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

【点评】本题考查了实数范围内分解因式, 掌握 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解题的关键.

9. (4分) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是 $\underline{x > 1}$.

【分析】本题考查了函数式有意义的 x 的取值范围. 一般地从两个角度考虑: 分式的分母不为 0; 偶次根式被开方数大于或等于 0; 当一个式子中同时出现这两点时, 应该是取让两个条件都满足的公共部分.

【解答】解: 根据题意得到: $x - 1 > 0$,

解得 $x > 1$.

故答案为: $x > 1$.

【点评】判断一个式子是否有意义, 应考虑分母上若有字母, 字母的取值不能使分母为零, 二次根号下字母的取值应使被开方数为非负数. 易错易混点: 学生易对二次根式的非负性和分母不等于 0 混淆.

10. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有两个实数根, 那么 m 的取值范围是 $\underline{m \leq 9}$.

【分析】由方程有两个实数根结合根的判别式, 即可得出 $\Delta = 36 - 4m \geq 0$, 解之即可得出 m 的取值范围.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4m = 36 - 4m \geq 0,$$

解得: $m \leq 9$.

故答案为: $m \leq 9$.

【点评】本题考查了根的判别式, 牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有两个实数根”是解题的关键.

11. (4分) 布袋中有大小、质地完全相同的 5 个小球, 每个小球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 如果从布袋中随机抽一个小球, 那么这个小球上的数字是合数的概率是 $\underline{\frac{1}{5}}$.

【分析】直接由概率公式求解即可.

【解答】解: $\because$ 布袋中有大小、质地完全相同的 5 个小球, 每个小球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 其中 4 是合数,

∴从布袋中随机抽一个小球，这个小球上的数字是合数的概率是 $\frac{1}{5}$ ，

故答案为： $\frac{1}{5}$ ．

【点评】本题考查了概率公式以及合数，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

12. (4分) 若反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象在每一个象限中， y 随着 x 的增大而减小，则 m 的取值范围是 $m > 1$ ．

【分析】根据反比例函数的性质可得 $m - 1 > 0$ ，再解不等式即可．

【解答】解：∵图象在每一个象限中 y 随着 x 的增大而减小，

$$\therefore m - 1 > 0,$$

解得： $m > 1$ ，

故答案为： $m > 1$ ．

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，关键是掌握对于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，

(1) $k > 0$ ，反比例函数图象在一、三象限；(2) $k < 0$ ，反比例函数图象在第二、四象限内．

13. (4分) 根据上海市统计局数据，上海市 2021 年的地区生产总值约是 4.32 万亿，2023 年的地区生产总值约是 4.72 万亿，设这两年上海市地区生产总值的年平均增长率都为 x ，根据题意可列方程 $4.32(1+x)^2 = 4.72$ ．

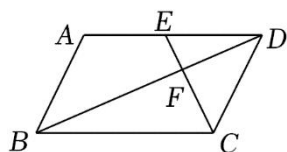
【分析】根据上海市 2021 年的地区生产总值约是 4.32 万亿，2023 年的地区生产总值约是 4.72 万亿，列方程即可．

【解答】解：根据题意得， $4.32(1+x)^2 = 4.72$ ，

故答案为： $4.32(1+x)^2 = 4.72$ ．

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列出方程．

14. (4分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是边 AD 的中点， CE 与对角线 BD 相交于点 F ，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，向量 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ ．(用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【分析】根据平面向量的平行四边形法则结合相似三角形对应边成比例即可求解.

【解答】解: $\because$ 量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 向量 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim BCF,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{BF},$$

$\because E$ 是边 AD 的中点, $AD = BC$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = \frac{2}{3}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a},$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$.

【点评】本题考查了平面向量, 相似三角形的判定与性质, 平行四边形的性质, 正确得出 $BF = \frac{2}{3}BD$ 是解题的关键.

15. (4分) 近年来越来越多的“社区食堂”出现在街头巷尾, 它们是城市服务不断丰富的缩影. 已知某社区食堂推出了 15 元、18 元、20 元三种价格的套餐, 每人限购一份. 据统计, 3 月 16 日该食堂销售套餐共计 160 份, 其中 15 元的占总份数的 40%, 18 元的卖出 40 份, 其余均为 20 元, 那么食堂这一天卖出一份套餐的平均价格是 17.5 元.

【分析】分别用单价乘以相应的百分比, 计算即可得解.

【解答】解: 其中 18 元的占总份数的 $40 \div 160 = 25\%$,

其中 20 元的占总份数的 $1 - 40\% - 25\% = 35\%$,

$$15 \times 40\% + 18 \times 25\% + 20 \times 35\% = 17.5 \text{ (元)},$$

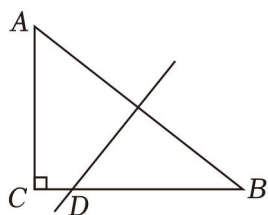
即食堂这一天卖出一份套餐的平均价格是 17.5 元.

故答案为: 17.5.

【点评】本题考查了百分数的应用, 解题的关键是求出相应的百分比.

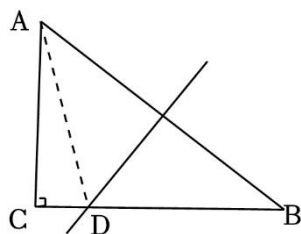
16. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB 的垂直平分线交边 BC 于点 D , 如果 BD

$$= 4CD, \text{ 那么 } \tan B = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$



【分析】连接 AD ，根据垂直平分线的性质可知 $AD = DB$ ，根据勾股定理求出 AC 的值，即可求解 $\tan B$ 。

【解答】解：连接 AD ，



$$\because BD = 4CD,$$

$$\text{设 } CD = x, \text{ 则 } BD = 4x, BC = 5x,$$

$$\because AB \text{ 的垂直平分线交边 } BC \text{ 于点 } D,$$

$$\therefore AD = DB = 4x,$$

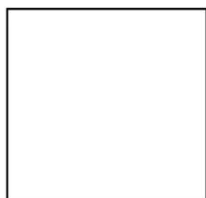
$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{(4x)^2 - x^2} = \sqrt{15}x,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

【点评】本题考查解直角三角形，正确记忆相关知识点是解题关键。

17. (4分) 如图，已知一张正方形纸片的边长为 6 厘米，将这个正方形纸片剪去四个角后成为一个正八边形，那么这个正八边形的边长是 $(6\sqrt{2} - 6)$ 厘米。



【分析】根据正方形和正八边形的性质以及勾股定理列方程求解即可》

【解答】解：如图，设 $EF = x$ 厘米，则 $AE = AQ = \frac{6-x}{2} = (3 - \frac{1}{2}x)$ 厘米，

由勾股定理得，

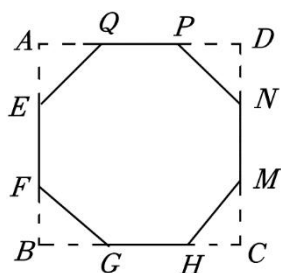
$$AQ^2 + AE^2 = QE^2,$$

$$\text{即 } \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = 6\sqrt{2} - 6, \text{ 或 } x = -6\sqrt{2} - 6 \text{ (舍去),}$$

$$\text{即正八边形的边长为 } (6\sqrt{2} - 6) \text{ 厘米,}$$

$$\text{故答案为: } (6\sqrt{2} - 6).$$



【点评】 本题考查正多边形和圆，掌握正方形，正八边形的性质以及勾股定理是正确解答的关键.

18. (4分) 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5$, 以 AD 为半径的圆 A 和以 CD 为半径的圆 C 相交于点 D 、 E , 如果点 E 到直线 BC 的距离不超过 3, 设 AD 的长度为 m , 则 m 的取值范围是 $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$.

【分析】 如图, 当 E 在 AB 的左侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R , 作 $ES \perp AB$ 于 S , 如图, 当 E 在 AB 的右侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 交 AD 于 Q , 再分别求解 m 的值, 从而得到答案.

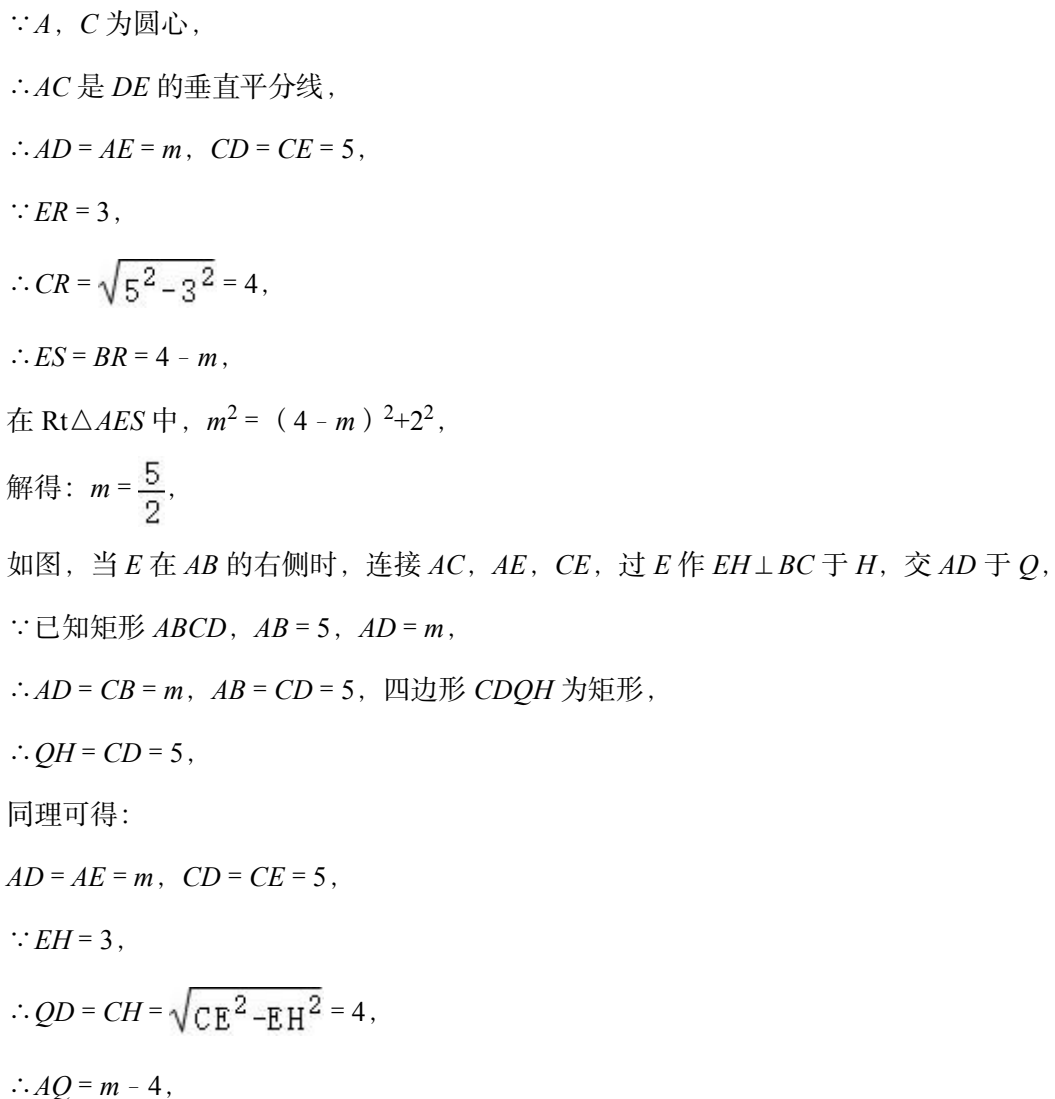
【解答】 解: 如图, 当 E 在 AB 的左侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R , 作 $ES \perp AB$ 于 S ,

$$\because \text{已知矩形 } ABCD, AB = 5, AD = m,$$

$$\therefore \text{四边形 } ERBS \text{ 为矩形, } AD = CB = m, AB = CD = 5,$$

$$\because ES = BR, ER = BS = 3,$$

$$\therefore AS = 5 - 3 = 2,$$


$$\therefore AQ = m - 4,$$

【解答】解：
$$\begin{cases} x+2y=12 \text{①} \\ x^2-4xy+4y^2-4=0 \text{②} \end{cases},$$

由②，得 $(x-2y)^2=4$,

$$\therefore x-2y=\pm 2.$$

当 $x+2y=12$, $x-2y=2$ 时，

$$x=7, y=2.5;$$

当 $x+2y=12$, $x-2y=-2$ 时，

$$x=5, y=3.5.$$

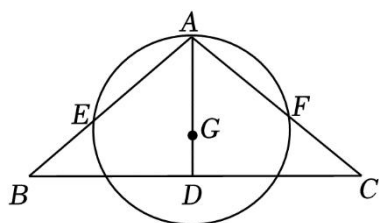
$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x=7 \\ y=2.5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=3.5 \end{cases}.$$

【点评】本题考查了二元二次方程组，把组中的二元二次方程化为一元一次方程，掌握二元一次方程组的解法是解决本题的关键.

21. (10分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=9$, $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，延长 AG 交边 BC 于点 D ，以 G 为圆心， GA 为半径的圆分别交边 AB 、 AC 于点 E 、 F .

(1) 求 AG 的长；

(2) 求 BE 的长.



【分析】(1) 由重心的性质得到 D 是 BC 中点， $AG=\frac{2}{3}AD$ ，由锐角的余弦求出 $BD=3\sqrt{5}$ ，

由勾股定理求出 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6$ ，得到 $AG=\frac{2}{3}\times 6=4$ ；

(2) 连接 EG ，过 G 作 $GH\perp AE$ 于 H ，由等腰三角形的性质得到 $AE=2AH$ ，由锐角的余弦求出 AH 的长，即可得到 AE 的长，即可得到 BE 的长.

【解答】解：(1) $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore D \text{ 是 } BC \text{ 中点}, AG=\frac{2}{3}AD,$$

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore AD\perp BC,$$

$$\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad AB = 9,$$

$$\therefore BD = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 6,$$

$$\therefore AG = \frac{2}{3} \times 6 = 4;$$

(2) 连接 EG , 过 G 作 $GH \perp AE$ 于 H ,

$$\because GA = GE,$$

$$\therefore AE = 2AH,$$

$$\because \angle AHG = \angle ADB = 90^\circ, \quad \angle GAH = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle AGH = \angle B,$$

$$\therefore \cos \angle AGH = \cos B = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \frac{GH}{AG} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

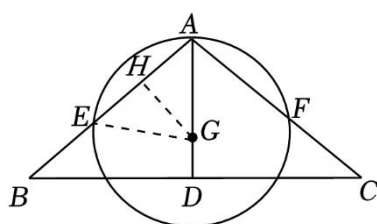
$$\because AG = 4,$$

$$\therefore GH = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AG^2 - GH^2} = \frac{8}{3},$$

$$\therefore AE = 2AH = \frac{16}{3},$$

$$\therefore BE = 9 - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}.$$

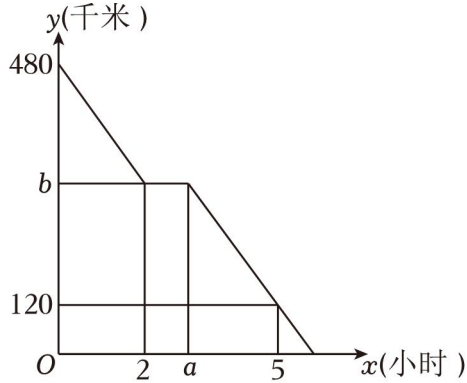


【点评】 本题考查解直角三角形，等腰三角形的性质，三角形的重心，关键是由重心的性质得到 $AG = \frac{2}{3}AD$ ，由锐角的余弦求出 GH 的长。

22. (10分) 寒假期间，小华一家驾车去某地旅游，早上 6:00 点出发，以 80 千米/小时的速度匀速行驶一段时间后，途经一个服务区休息了 1 小时，再次出发时提高了车速。如图，这是她们离目的地的路程 y (千米) 与所用时间 x (小时) 的函数图象。

根据图象提供的信息回答下列问题：

- (1) 图中的 $a = \underline{3}$, $b = \underline{320}$;
- (2) 求提速后 y 关于 x 的函数解析式 (不用写出定义域);
- (3) 她们能否在中午 12:30 之前到达目的地? 请说明理由.



【分析】 (1) 根据图象求出 a 的值, 根据 “离目的地的路程 = 家与目的地之间的距离 - 行驶的路程” 可计算 b 的数值;

(2) 利用待定系数法求解即可;

(3) 当 $y = 0$ 时求出对应 x 的值, 计算出到达目的地的时间, 从而作出判断即可.

【解答】 解: (1) $a = 2 + 1 = 3$, $b = 480 - 80 \times 2 = 320$,

故答案为: 3, 320.

(2) 设提速后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, 且 $k \neq 0$).

将坐标 (3, 320) 和 (5, 120) 代入 $y = kx + b$,

$$\text{得} \begin{cases} 3k + b = 320 \\ 5k + b = 120 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -100 \\ b = 620 \end{cases},$$

$\therefore$ 提速后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -100x + 620$.

(3) 能. 理由如下:

当她们到达目的地时, $y = 0$,

得 $-100x + 620 = 0$,

解得 $x = 6.2$,

6.2 小时 = 6 时 12 分,

$\therefore$ 她们于 12:12 分到达目的地.

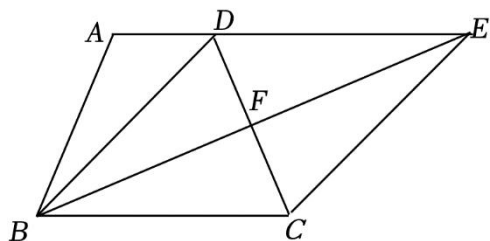
【点评】 本题考查一次函数的应用, 掌握待定系数法求函数的解析式是本题的关键.

23. (12 分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $BD = BC$, $\angle DBC$ 的平分

线交 AD 延长线于点 E , 交 CD 于点 F .

(1) 求证: 四边形 $BCED$ 是菱形;

(2) 联结 AC 交 BF 于点 G , 如果 $AC \perp CE$, 求证: $AB^2 = AG \cdot AC$.



【分析】(1) 根据角平分线定义可得 $\angle DBF = \angle CBF$, 根据平行线的性质可得 $\angle CBF = \angle DEF$, 等量代换可得 $\angle DBF = \angle DEF$, 于是 $BD = DE$, 又因为 $BC \parallel DE$, 所以四边形 $BCED$ 是平行四边形, 再根据邻边相等的平行四边形是菱形即可得证; (2) 如图, 设 BD 与 AC 交于点 H , 根据等腰梯形的性质可得 $\angle ABC = \angle DCB$, 根据 $BD = BC$, 可得 $\angle BCD = \angle BDC$, 根据菱形的性质和垂直的定义可得 $\angle DFG = 90^\circ$, $\angle DHG = 90^\circ$, 根据四边形的内角和为 360° , 可得 $\angle BDC + \angle HGF = 180^\circ$, 又因为 $\angle BGA + \angle HGF = 180^\circ$, 可得 $\angle BGA = \angle BDC$, 于是 $\angle ABC = \angle BGA$, 再根据 $\angle BAC = \angle GAB$ 即可得到 $\triangle ABC \sim \triangle AGB$, 利用相似三角形对应边的比相等即可得证.

【解答】证明: (1) $\because BF$ 平分 $\angle DBC$,

$$\therefore \angle DBF = \angle CBF,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle DEF,$$

$$\therefore BD = DE,$$

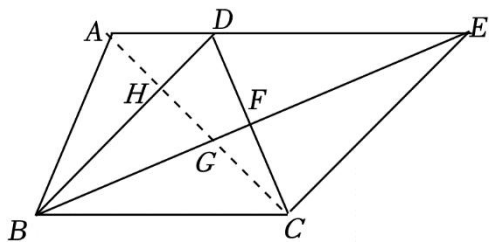
$$\because BC \parallel DE,$$

$$\therefore \text{四边形 } BCED \text{ 是平行四边形},$$

$$\because BD = BC,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } BCED \text{ 是菱形};$$

(2) 如图, 连接 AC , 交 BD 于点 H , 交 BE 于点 G ,



在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$,

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\because BD = BC,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCED$ 是菱形,

$$\therefore BE \perp CD, BD \parallel CE,$$

$$\therefore \angle DFG = 90^\circ,$$

$$\because AC \perp CE,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle DHG = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDC + \angle HGF + \angle DHG + \angle DFG = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC + \angle HGF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BGA + \angle HGF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BGA,$$

$$\because \angle BAC = \angle GAB,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AGB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore AB^2 = AG \cdot AC.$$

【点评】 本题考查了等腰梯形性质、等腰三角形的判定和性质、菱形的判定和性质定理、相似三角形的判定和性质等知识, 熟练掌握相关知识是解答本题的关键.

24. (12 分) 定义: 我们把平面内经过已知直线外一点并且与这条直线相切的圆叫做这个点与已知直线的点切圆. 如图 1, 已知直线 l 外有一点 H , 圆 Q 经过点 H 且与直线 l 相切, 则称圆 Q 是点 H 与直线 l 的点切圆.

阅读以上材料，解决问题；

已知直线 OA 外有一点 P , $PA \perp OA$, $OA = 4$, $AP = 2$, 圆 M 是点 P 与直线 OA 的点切圆.

(1) 如果圆心 M 在线段 OP 上, 那么圆 M 的半径长是 $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ (直接写出答案).

(2) 如图 2, 以 O 为坐标原点、 OA 为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy , 点 P 在第一象限, 设圆心 M 的坐标是 (x, y) .

①求 y 关于 x 的函数解析式;

②点 B 是①中所求函数图象上的一点, 联结 BP 并延长交此函数图象于另一点 C . 如果 $CP:BP = 1:4$, 求点 B 的坐标.

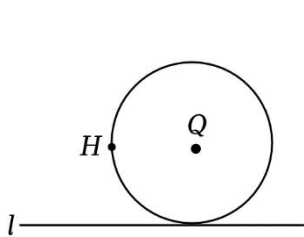


图1

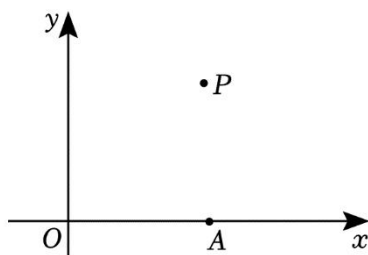


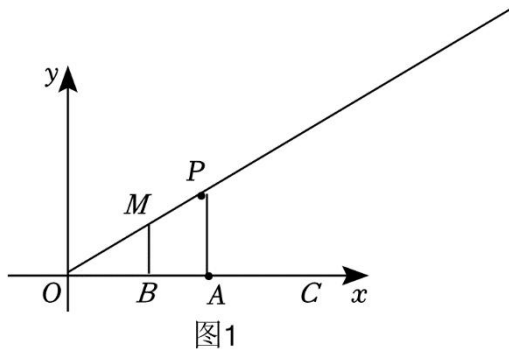
图2

【分析】(1) 作 $MB \perp x$ 轴于点 B , 则 $MB = MP = r$, 可证得 $\triangle OBM \sim \triangle OAP$, 从而 $\frac{OM}{OP} = \frac{BM}{PA}$, 从而 $\frac{2\sqrt{5}-r}{2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}$, 从而求得 r ;

(2) ①根据圆心 M 到 P 的距离等于点 P 到 x 轴的距离得出 $(x-4)^2 + (y-2)^2 = y^2$, 化简得出结果;

②设点 $B(m, n)$, $C(a, b)$, 从而得出 $n = \frac{1}{4}(m-4)^2 + 1$ ①, 接 PA , 作 $BD \perp x$ 轴, 作 $CE \perp PA$, 交 BD 于 D , 可证得 $\triangle CEP \sim \triangle CDB$, 从而 $\frac{CE}{CD} = \frac{PE}{BD} = \frac{CP}{CB} = \frac{1}{5}$, 即 $\frac{4-a}{m-a} = \frac{2-b}{n-b} = \frac{1}{5}$, 从而得出 $a = \frac{20-m}{4}$, $b = \frac{10-n}{4}$, 代入解析式得出 $\frac{10-n}{4} = \frac{1}{4}(\frac{20-m}{4}-4)^2 + 1$ ②, 由①②得出 m, n , 进而得出结果.

【解答】解: 如图 1,



作 $MB \perp x$ 轴于点 B ,

则 $MB = MP = r$,

$\because PA \perp x$ 轴,

$\therefore MB \parallel PA$,

$\therefore \triangle OBM \sim \triangle OAP$,

$$\therefore \frac{OM}{OP} = \frac{BM}{PA},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5} - r}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{r},$$

$$\therefore r = \frac{5 - \sqrt{5}}{2},$$

故答案为: $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$;

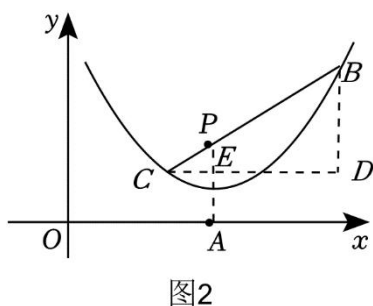
(2) ①由题意得,

圆心 M 到 P 的距离等于点 P 到 x 轴的距离,

$$\therefore (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = y^2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}(x - 4)^2 + 1;$$

②如图 2,



设点 $B(m, n)$, $C(a, b)$,

$$\therefore n = \frac{1}{4}(m - 4)^2 + 1 \text{ ①},$$

连接 PA ，作 $BD \perp x$ 轴，作 $CE \perp PA$ ，交 BD 于 D ，

$$\therefore PA \parallel BD,$$

$$\therefore \triangle CEP \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{PE}{BD} = \frac{CP}{CB} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{4-a}{m-a} = \frac{2-b}{n-b} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore a = \frac{20-m}{4}, \quad b = \frac{10-n}{4},$$

$$\therefore \frac{10-n}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{20-m}{4} - 4 \right)^2 + 1 \text{ ②},$$

由①②得，

$$\begin{cases} m_1 = 8 \\ n_1 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} m_2 = 0 \\ n_2 = 5 \end{cases},$$

$$\therefore B(8, 5) \text{ 或 } (0, 5).$$

【点评】 本题考查了圆的切线的性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，解一元二次方程等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形．

25. (14分) 已知以 AB 为直径的半圆 O 上有一点 C ， $CD \perp OA$ ，垂足为点 D ，点 E 是半径 OC 上一点（不与点 O 、 C 重合），作 $EF \perp OC$ 交弧 BC 于点 F ，联结 OF ．

(1) 如图 1，当 FE 的延长线经过点 A 时，求 $\frac{CD}{AF}$ 的值；

(2) 如图 2，作 $FG \perp AB$ ，垂足为点 G ，联结 EG ．

①试判断 EG 与 CD 的大小关系，并证明你的结论；

②当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形，且 $\sin \angle COD = \frac{4}{5}$ ，求 $\frac{OE}{OD}$ 的值．

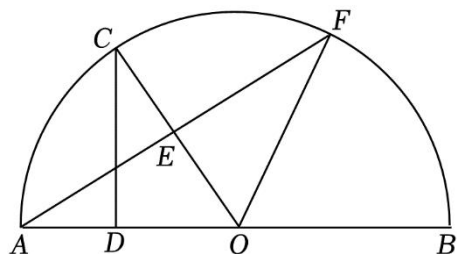


图1

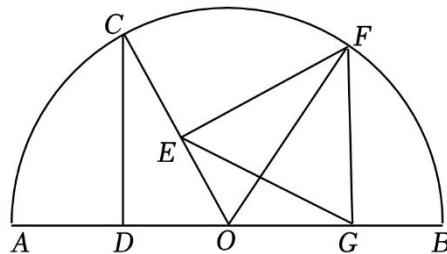


图2

【分析】 (1) 利用垂径定理，直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质解答即可；

(2) ①延长 FE 交 $\odot O$ 于点 M ，延长 FG 交 $\odot O$ 于点 N ，延长 CD 交 $\odot O$ 于点 H ，连接 MN ， OH ， ON ， OM ，利用垂径定理，三角形的中位线定理得到 $EG = \frac{1}{2}MN$ ，利用垂径

定理得到 $CD = DH = \frac{1}{2}CH$, 再利用四边形的内角和定理和邻补角的性质得到 $\angle AOC = \angle EFG$, 再利用相等的圆心角所对的弧相等的性质, 等弧对等弦的性质得到 $CH = MN$, 则结论可得;

②利用分类讨论的方法分三种情况解答: I. 当 $EF = EG$ 时, 利用全等三角形的判定与性质和勾股定理解答即可; II. 当 $FG = EF$ 时, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 利用直角三角形的边角关系定理和勾股定理解答即可; III. 当 $FG = EG$ 时, 则 $FG = 4k$, 连接 FC , 利用矩形的判定与性质和勾股定理解答即可.

【解答】解: (1) 当 FE 的延长线经过点 A 时,

$$\because EF \perp OC,$$

$$\therefore AE = FE = \frac{1}{2}AF, \quad \angle A + \angle AOE = 90^\circ.$$

$$\because CD \perp OA,$$

$$\therefore \angle C + \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C.$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COD \text{ (ASA)},$$

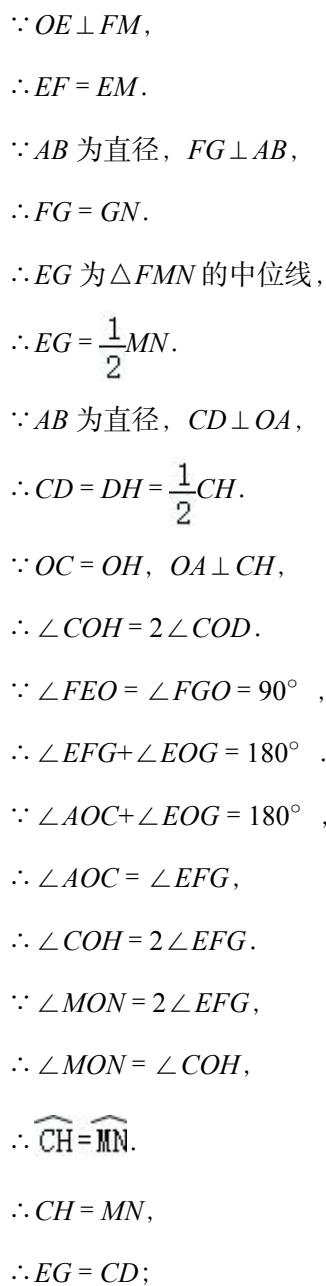
$$\therefore AE = CD,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AF,$$

$$\therefore \frac{CD}{AF} = \frac{1}{2};$$

(2) ① EG 与 CD 的大小关系为: $EG = CD$. 理由:

延长 FE 交 $\odot O$ 于点 M , 延长 FG 交 $\odot O$ 于点 N , 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 H , 连接 MN , OH , ON , OM , 如图,



第 20 页 (共 23 页)

$$\therefore \frac{CD}{OC} = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 设 $CD = 4k$, 则 $OC = 5k$,

$$\therefore OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = 3k.$$

I. 当 $EF = EG$ 时,

由 (2) ① 知: $EG = CD = 4k$,

$$\therefore EF = 4k, OF = OC = 5k,$$

$$\because EF \perp OC,$$

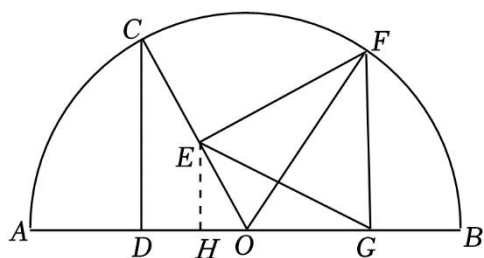
$$\therefore OE = \sqrt{OF^2 - EF^2} = 3k.$$

$$\therefore OE = OD,$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = 1;$$

II. 当 $FG = EF$ 时,

过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 如图,



在 $\text{Rt}\triangle FEO$ 和 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中,

$$\begin{cases} FO = FO \\ FE = FG \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FEO \cong \text{Rt}\triangle FGO \text{ (HL)},$$

$$\therefore OE = OG,$$

设 $OE = OG = m$,

$$\because \sin \angle COD = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{EH}{OE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore EH = \frac{4}{5}m,$$

$$\therefore OH = \frac{3}{5}m,$$

$$\therefore HG = \frac{8}{5}m.$$

$$\because EH^2 + GH^2 = EG^2,$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5}m\right)^2 + \left(\frac{8}{5}m\right)^2 = (4k)^2,$$

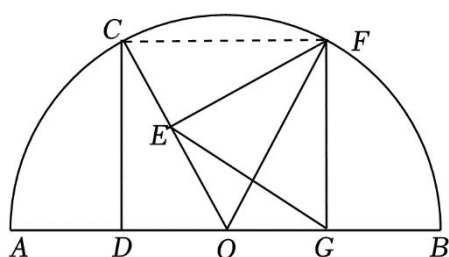
$$\therefore m = \sqrt{5}k,$$

$$\therefore OE = \sqrt{5}k.$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{\sqrt{5}}{3};$$

Ⅲ. 当 $FG = EG$ 时, 则 $FG = 4k$,

连接 FC , 如图,



$$\because CD = FG = 4k, CD \perp AB, FG \perp AB,$$

$\therefore$ 四边形 $CDGF$ 为矩形,

$$\therefore CF = DG.$$

在 $\text{Rt}\triangle CDO$ 和 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中,

$$\begin{cases} CD = FG \\ OC = OF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDO \cong \text{Rt}\triangle FGO \text{ (HL)},$$

$$\therefore OD = OG = 3k,$$

$$\therefore FC = DG = 6k,$$

设 $OE = x$, 则 $CE = OC - OE = 5k - x$,

$$\because EF^2 = CF^2 - CE^2, EF^2 = OF^2 - OE^2,$$

$$\therefore (6k)^2 - (5k - x)^2 = (5k)^2 - x^2,$$

$$\therefore x = \frac{7}{5}k,$$

$$\therefore OE = \frac{7}{5}k.$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{\frac{7}{5}k}{3k} = \frac{7}{15}.$$

综上，当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形，且 $\sin \angle COD = \frac{4}{5}$ ， $\frac{OE}{OD}$ 的值为1或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 或 $\frac{7}{15}$ 。

【点评】 本题主要考查了圆的有关性质，圆周角定理，垂径定理，直角三角形的性质，直角三角形的边角关系定理，勾股定理，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，矩形的判定与性质，三角形的中位线定理，添加适当的辅助线和利用分类讨论的思想方法解答是解题的关键。