

崇明区 2023 学年第二学期学业质量调研

九年级数学

(满分 150 分, 完成时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 在下列二次根式中, 最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{26}$

B. $\sqrt{0.5}$

C. $\sqrt{18}$

D. $\sqrt{\frac{1}{10}}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了最简二次根式, 解题的关键是正确理解最简二次根式的定义. 结合最简二次根式的概念, 被开方数不含分母, 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式进行解答即可.

【详解】 解: A: $\sqrt{26}$ 是最简二次根式, 该选项符合题意;

B: $\sqrt{0.5}$ 被开方数是小数, 可化为 $\sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

C: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 所以不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

D: $\sqrt{\frac{1}{10}}$ 被开方数是分数, 所以不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

故选: A

2. 下列运算中, 计算结果正确的是 ()

A. $2(a+2) = 2a+2$

B. $(2a^2)^3 = 8a^6$

C. $a^{10} \div a^2 = a^5$

D. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据多项式的乘法、幂的乘方、积的乘方、同底数幂的除法、完全平方公式的运算法则逐项分析

判断即可求解.

【详解】解：A. $2(a+2)=2a+4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $(2a^2)^3 = 2^3 \cdot a^{2 \times 3} = 8a^6$, 故该选项正确, 符合题意;

C. $a^{10} \div a^2 = a^{10-2} = a^8$, 故该选项不正确, 不符合题意;

D. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故该选项不正确, 不符合题意.

故选 B.

【点睛】本题考查了整式的乘法、幂的乘方、积的乘方、同底数幂的除法、完全平方公式等知识，熟练掌握各自运算方法及运算是解题的关键.

3. 下列函数中, 如果 $x > 0$, y 的值随 x 的值增大而减小, 那么这个函数是 ()

A. $y = 3x$

B. $y = -\frac{3}{x}$

C. $y = -2x - 3$

D. $y = 2x^2 - 1$

【答案】 C

【解析】

【分析】此题主要考查了二次函数、一次函数、正比例函数以及反比例函数的性质等知识，熟练应用函数的性质是解题关键，分别利用一次函数以及二次函数和反比例函数的性质分析得出即可.

【详解】解: A、 $y=3x$, y 随 x 的增大而增大, 故 A 选项错误;

B、 $y = -\frac{3}{x}$ ，当 $x > 0$ ，则 y 随 x 的增大而增大，故 B 选项错误；

C、 $y = -2x - 3$ ， y 值随 x 值的增大而减小，此 C 选项正确；

D、 $y=2x^2-1$ ，当 $x>0$ 时， y 值随 x 值的增大而增大，此D选项错误。

故选: C.

4. 某校准备组织八年级 500 名学生进行研学旅行活动，小慧同学随机抽取了部分同学进行研学目的地意向调查，调查结果发现选择航海博物馆的占 25%，辰山植物园的占 20%，世博文化园的占 50%，其他目的地的占 5%，要反映上述信息，宜采用的统计图是（ ）

A. 条形统计图

B. 折线统计图

C. 扇形统计图

D. 频数分布直方图

【答案】 C

【解析】

【分析】本题考查了统计图，根据统计图的特点（条形统计图能很容易看出数量的多少；折线统计图不仅容易看出数量的多少，而且能反映数量的增减变化情况；扇形统计图能反映部分与整体的关系）即可判断

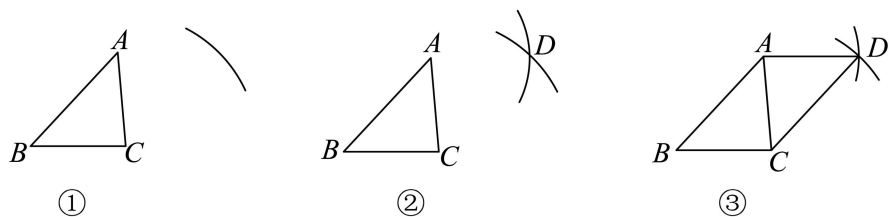
求解，掌握统计图的特点是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 已知的是各研学目的地意向的百分比，

$\therefore$ 宜采用的统计图是扇形统计图，

故选：C.

5. 探究课上，小明画出 $\triangle ABC$ ，利用尺规作图找一点 D ，使得四边形 $ABCD$ 为平行四边形. ①~③是其作图过程：①以点 C 为圆心， AB 长为半径画弧；②以点 A 为圆心， BC 长为半径画弧，两弧交于点 D ；③连接 CD 、 AD ，则四边形 $ABCD$ 即为所求作的图形. 在小明的作法中，可直接判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的条件是 ()



A. 两组对边分别平行

B. 两组对边分别相等

C. 对角线互相平分

D. 一组对边平行且相等

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判断，解题的关键是掌握基本的作图方法及平行四边形的判定定理.

根据作图步骤可知，得出 $CD = AB, AD = BC$ ，从而可以判断.

【详解】解：根据作图得， $CD = AB, AD = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

判定四边形 $ABCD$ 为平行四边形的条件是：两组对边分别相等，

故选：B.

6. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, AC = 12, BC = 5$ ，若以 C 为圆心， r 长为半径的圆 C 与边 AB 有交点，那么 r 的取值范围是 ()

A. $5 \leq r \leq 12$ 或 $r = \frac{60}{13}$

B. $5 < r < 12$

C. $\frac{60}{13} < r < 12$

D. $\frac{60}{13} \leq r \leq 12$

【答案】D

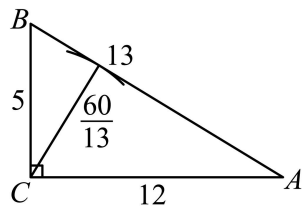
【解析】

【分析】此题注意两种情况：(1) 圆与 AB 相切时；(2) 点 A 在圆内部，点 B 在圆上或圆外时. 根据勾股

定理以及直角三角形的面积计算出其斜边上的高，再根据位置关系与数量之间的联系进行求解．本题考查了直线与圆的位置关系和三角形的面积等知识点，解此题的关键是画出符合条件的所有情况．

【详解】解：依题意， $\because BC < AC$ ，

根据勾股定理求得 $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ ．



当圆与 AB 相切时，此时半径最小，即 $r = CD = 5 \times 12 \div 13 = \frac{60}{13}$ ；

当点 A 在圆上，此时半径最大，即 $r = AC = 12$ ，

综上：即 $\frac{60}{13} \leq r \leq 12$ ．

故选：D．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. $\sqrt{2}$ 的相反数是 _____．

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】只有符号不同的两个数，我们称这两个数互为相反数．

【详解】解： $\sqrt{2}$ 的相反数为 $-\sqrt{2}$ ．

故答案为： $-\sqrt{2}$ ．

【点睛】本题主要考查的是相反数的定义，属于基础题型．解决这个问题只要明确相反数的定义即可．

8. 分解因式： $x^2 - 8x =$ _____．

【答案】 $x(x-8)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，利用提公因式法因式分解即可求解，掌握因式分解的方法是解题的关键．

【详解】解： $x^2 - 8x = x(x-8)$ ，

故答案为： $x(x-8)$ ．

9. 已知 $f(x) = 2x + 3$ ，那么 $f(-2) =$ _____．

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式即可求解，看懂函数解析式是解题的关键.

【详解】 解： $\because f(x) = 2x + 3$,

$$\therefore f(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1,$$

故答案为： -1.

10. 方程 $\sqrt{2x-1}-1=0$ 的根是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了利用算术平方根的定义求方程的解，由方程 $\sqrt{2x-1}-1=0$ 可得 $\sqrt{2x-1}=1$ ，根据算术平方根的定义即可得到 $2x-1=1$ ，解方程即可求解，理解算术平方根的定义是解题的关键.

【详解】 解： $\because \sqrt{2x-1}-1=0$,

$$\therefore \sqrt{2x-1}=1,$$

$$\therefore 2x-1=1,$$

$$\therefore x=1,$$

故答案为： 1.

11. 已知关于 x 的方程 $x^2-4x+3k=0$ 没有实数根，则实数 k 的取值范围为_____.

【答案】 $k > \frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2-4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2-4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2-4ac < 0$ ，则方程没有实数根，据此求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2-4x+3k=0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \cdot 3k < 0,$$

$$\therefore k > \frac{4}{3},$$

故答案为: $k > \frac{4}{3}$.

12. 一个不透明的箱子里放着分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的七个球, 它们除了数字不同外其余都相同, 从这个箱子里随机摸出一个球, 摸出的球上所标数字为偶数的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了概率的求法与运用, 根据概率公式求解即可: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{n}{m}$. 根据概率的求法, 用偶数球的个数除以球的总个数即可求解.

【详解】 解: $\because$ 摸出偶数球可能是 2, 4, 6 三种情况,

$\therefore$ 摸出的球上所标数字为偶数的概率为: $\frac{3}{7}$;

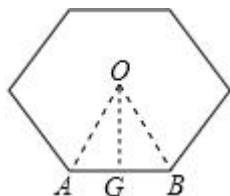
故答案为: $\frac{3}{7}$.

13. 已知正六边形的半径为 2cm, 那么这个正六边形的边心距为 _____cm

【答案】 3

【解析】

【详解】 如图,



连接 OA 、 OB , 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G .

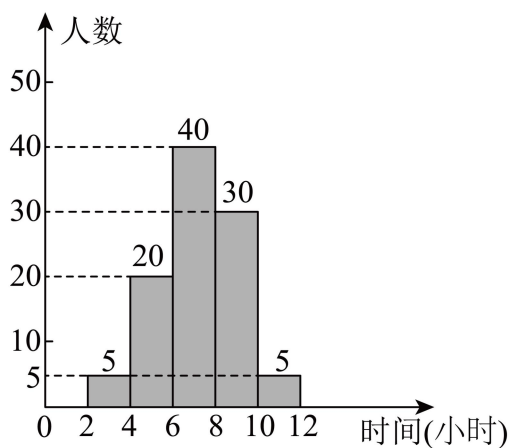
在 $Rt\triangle AOG$ 中,

$\because OA = 2cm, \angle AOG = 30^\circ,$

$\therefore OG = OA \cdot \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$

故答案为 $\sqrt{3}$.

14. 为了解某区初中学生每月参加社团活动时间的情况, 随机抽查了 100 名学生的社团活动时间进行统计, 并绘制成如图所示的频数分布直方图 (每组数据含最小值, 不含最大值), 已知该区初中生共有 8000 名, 依此估计, 该区每月参加社团活动的时间不少于 8 小时的学生数大约是_____名.



【答案】 2800

【解析】

【分析】 本题考查了频数分布直方图，样本估计总体，用 8000 乘以参加社团活动的时间不少于 8 小时的学生数占比即可求解，看懂统计图是解题的关键.

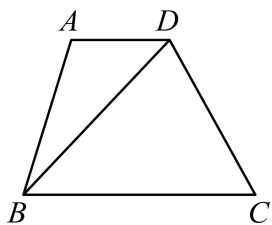
【详解】 解： $8000 \times \frac{30+5}{100} = 2800$ ，

$\therefore$ 估计该区每月参加社团活动的时间不少于 8 小时的学生数为 2800 名，

故答案为： 2800 .

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $2BC = 5AD$ ，若 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示

$\overrightarrow{DB} =$ _____.



【答案】 $\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量，熟练掌握三角形法则是解题的关键. 根据向量的三角形法则表示出 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ ，再根据 BC 、 AD 的关系解答即可.

【详解】 解： $\because AD \parallel BC$ ， $2BC = 5AD$ ，

$\therefore \overrightarrow{CB} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ ，

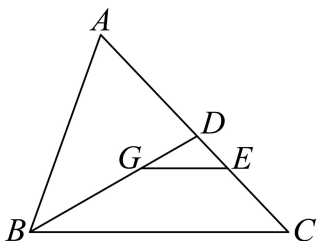
$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$ ， $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}.$$

故答案为: $\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{a}$.

16. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, BG 的延长线交 AC 于点 D , 过点 G 作 $GE \parallel BC$, 交 AC 于点 E , 则

$$\frac{S_{\triangle DGE}}{S_{\triangle ABD}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】此题主要考查三角形中线的性质和相似三角形的判定和性质的理解及运用. 利用该定理时要注意线段之间的对应关系.

由点 G 是 $\triangle ABC$ 重心, 得出 BD 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中线, 确定 $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$, $\frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}$,

再由相似三角形的判定和性质得出 $\frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{1}{9}$, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 重心,

$\therefore BD$ 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中线, $\frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore S_{\triangle ADB} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADC},$$

$\therefore GE \parallel BC$,

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle DBC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle DBC}} = \left(\frac{DG}{BD}\right)^2 = \left(\frac{BD-BG}{BD}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\frac{S_{\triangle DGE}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{1}{9},$$

$\therefore$ 故答案为: $\frac{1}{9}$.

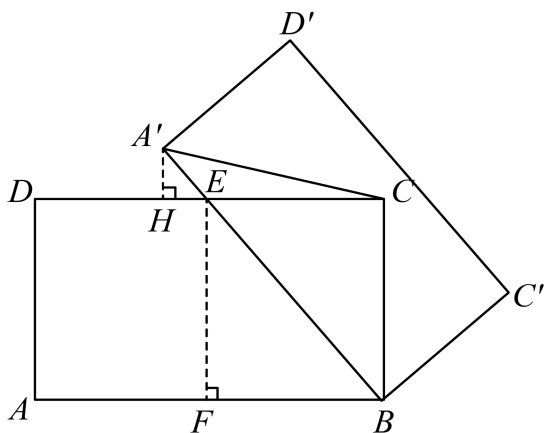
17. 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 4$, 将矩形 $ABCD$ 绕点 B 旋转, AB 的对应边 $A'B$ 与边 CD 相交于点 E , 连接 $A'C$, 当点 E 是 CD 中点时, $\tan \angle A'CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，矩形的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，三角函数，过 A' 作 $A'H \perp CD$ 于 H ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，可得四边形 $EFBC$ 为矩形，得到 $BF = CE = 3$ ， $EF = BC = 4$ ，进而得 $BE = 5$ ， $A'E = 1$ ，再证 $\triangle A'EH \sim \triangle EBF$ ，得到 $\frac{A'H}{EF} = \frac{EH}{BF} = \frac{A'E}{BE}$ ，可得 $A'H = \frac{4}{5}$ ， $EH = \frac{3}{5}$ ，得到 $CH = \frac{18}{5}$ ，最后根据正切的定义即可求解，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】 解：如图，过 A' 作 $A'H \perp CD$ 于 H ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，则 $\angle A'HE = \angle EFB = 90^\circ$ ，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \angle EFB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EFBC$ 为矩形，

$\therefore BF = CE$ ， $EF = BC = 4$ ，

$\therefore$ 点 E 是 CD 中点，

$\therefore BF = CE = \frac{1}{2}CD = 3$

$\therefore BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

又由旋转可得， $A'B = AB = 6$ ，

$\therefore A'E = A'B - BE = 6 - 5 = 1$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle A'EH = \angle EBF$ ，

$\therefore \triangle A'EH \sim \triangle EBF$ ，

$\therefore \frac{A'H}{EF} = \frac{EH}{BF} = \frac{A'E}{BE}$ ，

$$\text{即 } \frac{A'H}{4} = \frac{EH}{3} = \frac{1}{5},$$

$$\text{解得 } A'H = \frac{4}{5}, \quad EH = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CH = CE + EH = 3 + \frac{3}{5} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore \tan \angle A'CD = \frac{A'H}{CH} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{18}{5}} = \frac{2}{9},$$

故答案为: $\frac{2}{9}$.

18. 新定义: 我们把抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, (其中 $ab \neq 0$) 与抛物线 $y = bx^2 + ax + c$ 称为“关联抛物线”. 例如: 抛物线 $y = x^2 + 2x + 3$ 的“关联抛物线”为 $y = 2x^2 + x + 3$. 已知抛物线

$C_1: y = 6ax^2 + ax + 9a - 4 (a > 0)$ 的“关联抛物线”为 C_2 , 抛物线 C_2 的顶点为 P , 且抛物线 C_2 与 x 轴相交于 M, N 两点, 点 P 关于 x 轴的对称点为 Q , 若四边形 $PMQN$ 是正方形, 那么抛物线 C_1 的表达式为_____.

【答案】 $y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线新定义问题, 正确理解定义, 熟练掌握平行坐标轴直线上两点间距离计算方式是解题的关键. 根据定义, 得到抛物线 C_2 的表达式, 然后利用公式求出顶点 P 坐标和对称点 Q 坐标, 根据四边形 $PMQN$ 是正方形求出 MN 距离, 然后利用两点间距离公式和一元二次方程根与系数的关系求出 a 的值, 即可求解.

【详解】 解: $\because C_1: y = 6ax^2 + ax + 9a - 4 (a > 0),$

$\therefore$ “关联抛物线” C_2 为: $y = ax^2 + 6ax + 9a - 4 (a > 0),$

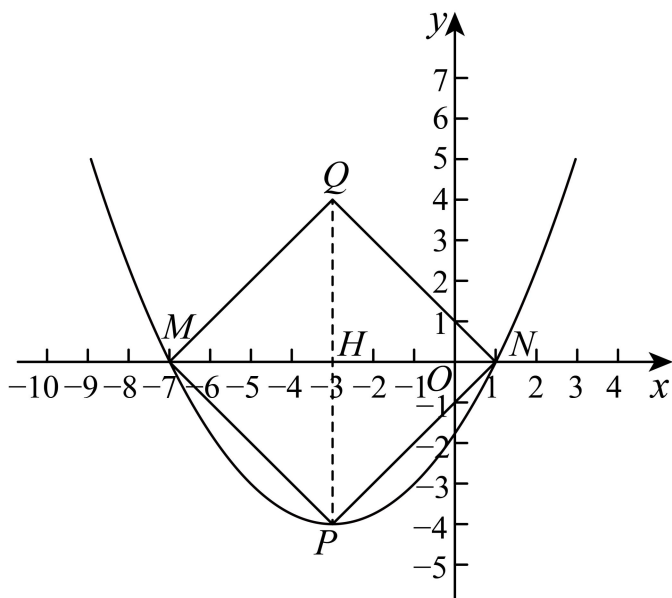
设抛物线 C_2 的顶点 $P(x, y)$, 则

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6a}{2a} = -3, \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4a(9a - 4) - (6a)^2}{4a} = -4,$$

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点 $P(-3, -4),$

$\therefore$ 点 P 关于 x 轴的对称点 $Q(-3, 4),$

连接 PQ 交 x 轴于 H , 如图所示,



∵ 四边形 $PMQN$ 是正方形,

$$\therefore MH = QH = HN = 4,$$

$$\therefore MN = 8,$$

设抛物线 C_2 : $y = ax^2 + 6ax + 9a - 4 (a > 0)$ 与 x 轴交点 $M(x_1, 0)$, $N(x_2, 0)$, x_1, x_2 即为方程

$$ax^2 + 6ax + 9a - 4 = 0 \text{ 的根,}$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6a}{a} = -6, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{9a - 4}{a} = 9 - \frac{4}{a},$$

$$MN = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{(-6)^2 - 4(9 - \frac{4}{a})} = \sqrt{36 - 36 + \frac{16}{a}} = 8,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_1 \text{ 的表达式为 } y = 6 \times \frac{1}{4} \times x^2 + \frac{1}{4}x + 9 \times \frac{1}{4} - 4, \text{ 即 } y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{4},$$

$$\therefore \text{故答案为: } y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \sqrt{18} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + |\sqrt{3} - 2|$$

【答案】 $3\sqrt{2} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了实数的混合运算, 根据二次根式的性质、负整数指数幂、绝对值的性质分别运算, 再合并即可求解, 掌握实数的运算法则是解题的关键.

【详解】解：原式 $= 3\sqrt{2} - 3 + 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$,

$$= 3\sqrt{2} + 1.$$

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x^2 - xy - 6y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了高次方程的解法，二元一次方程组的解法. 把原方程组转化为两个二元一次方程组是解决本题的关键. 因式分解方程组中的②，转化为两个二元一次方程，与原方程组中的①组成两个一次方程组，求解即可.

【详解】解：由②，得 $(x - 3y)(x + 2y) = 0$,

$$\therefore x - 3y = 0 \text{ ③}, \quad x + 2y = 0 \text{ ④}.$$

由①③，①④组成新的方程组
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x - 3y = 0 \text{ ③} \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x + 2y = 0 \text{ ④} \end{cases},$$

解方程组
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x - 3y = 0 \text{ ③} \end{cases},$$

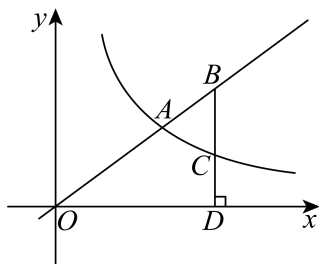
得
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases};$$

解方程组
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \text{ ①} \\ x + 2y = 0 \text{ ④} \end{cases},$$

得
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

$\therefore$ 方程组的解为:
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

21. 如图，正比例函数 $y = \frac{3}{4}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$ 的图像相交于点 $A(a, 3)$ ，点 B 为直线 OA 上位于点 A 右侧的一点，且 $OA = 2AB$ ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为 D ，交反比例函数的图像于点 C .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式;

(2) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【答案】 (1) $y = \frac{12}{x}$;

(2) $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数和反比例函数的交点问题, 待定系数法求反比例函数解析式, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定, 正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 利用正比例函数求出点 A 坐标, 再利用待定系数法即可求出反比例函数解析式;

(2) 如图, 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E, 可得 $\triangle AOE \sim \triangle BOD$, 得到 $\frac{AE}{BD} = \frac{OE}{OD} = \frac{OA}{OB}$, 进而由 $OA = 2AB$, $A(4, 3)$ 可得 $\frac{3}{BD} = \frac{4}{OD} = \frac{2}{3}$, $AB = \frac{1}{2}OA = \frac{5}{2}$, 得到 $BD = \frac{9}{2}$, $OD = 6$, 再得到 $CD = 2$, 最后得到 $AB = BC$, 即可求解;

【小问 1 详解】

解: 把 $A(a, 3)$ 代入正比例函数 $y = \frac{3}{4}x$ 得, $3 = \frac{3}{4}a$,

$\therefore a = 4$,

$\therefore A(4, 3)$,

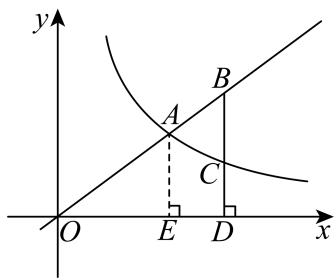
把 $A(4, 3)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 得, $3 = \frac{k}{4}$,

$\therefore k = 12$,

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E,



$\because BD \perp x$ 轴,

$\therefore AE \parallel BD$,

$\therefore \triangle AOE \sim \triangle BOD$,

$$\therefore \frac{AE}{BD} = \frac{OE}{OD} = \frac{OA}{OB},$$

$\because OA = 2AB$,

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{2}{3},$$

$\therefore A(4, 3)$,

$$\therefore OE = 4, \quad AE = 3, \quad OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\therefore \frac{3}{BD} = \frac{4}{OD} = \frac{2}{3}, \quad AB = \frac{1}{2}OA = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BD = \frac{9}{2}, \quad OD = 6,$$

把 $x = 6$ 代入 $y = \frac{12}{x}$ 得, $y = 2$,

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore BC = BD - CD = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB = BC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

22. 某工程队购进几台新型挖掘机 (如图 1), 该挖掘机是由基座、主臂和伸展臂构成, 图 2 是其侧面结构示意图: PQ 是基座 (基座高度忽略不计), AB 是主臂, BC 是伸展臂, 若主臂 AB 长为 4.8 米, 主臂伸展角 $\angle QAB$ 的范围是: $25^\circ \leq \angle QAB \leq 60^\circ$, 伸展臂伸展角 $\angle ABC$ 的范围是: $45^\circ \leq \angle ABC \leq 110^\circ$, 当主臂伸展角 $\angle QAB$ 最小, 伸展臂伸展角 $\angle ABC$ 最大时, 伸展臂 BC 恰好能接触水平地面 (点 C 、 Q 、 A 、 P 在一直线上). (参考数据: $\sin 25^\circ \approx 0.4$, $\cos 25^\circ \approx 0.9$)



图1

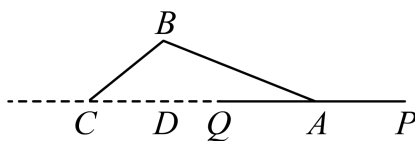


图2

- (1) 当挖掘机在 A 处时, 能否挖到距 A 水平正前方 6 米远的土石? (请通过计算说明)
- (2) 该工程队承担了新农村景观河的建设任务, 计划用该型号的挖掘机进行施工. 已知景观河全长 1200 米, 实际开工后每天比原计划多挖 20 米, 因此提前 3 天完成任务, 求工程队原计划每天挖多少米?

【答案】 (1) 能挖到距 A 水平正前方 6 米远的土石

(2) 工程队原计划每天挖 80 米

【解析】

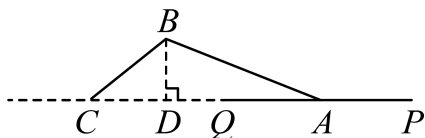
【分析】 本题主要考查解直角三角形和分式方程的应用,

(1) 过点 B 作 $BD \perp CP$ 于点 D , 可求得 $BD = AB \cdot \sin$, $AD = AB \cdot \cos 25^\circ$, 进一步求得 $\angle DBA = 65^\circ$, 则 $\angle DBC = 45^\circ$, 有 $CD = BD$, 即可求得 AC 判断能否挖到;

(2) 设工程队原计划每天挖 x 米, 则实际开工后每天挖 $(20 + x)$ 米, 列出分式方程求解即可.

【小问 1 详解】

过点 B 作 $BD \perp CP$ 于点 D , 如图,



由题意可知: $\angle QAB = 25^\circ$, $\angle ABC = 110^\circ$, $AB = 4.8$ 米,

则 $BD = AB \cdot \sin \approx 4.8 \times 0.4 \approx 1.92$, $AD = AB \cdot \cos 25^\circ \approx 4.8 \times 0.9 \approx 4.32$,

$\therefore BD \perp CP$,

$\therefore \angle DBA = 65^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 110^\circ$,

$\therefore \angle DBC = 45^\circ$,

$\therefore CD = BD = 1.92$,

则 $CA = CD + DA = 6.24 > 6$,

故能挖到距 A 水平正前方 6 米远的土石;

【小问 2 详解】

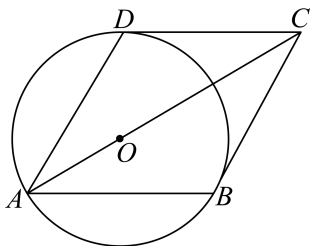
设工程队原计划每天挖 x 米，则实际开工后每天挖 $(20+x)$ 米，则

$$\frac{1200}{x} - \frac{1200}{20+x} = 3, \text{ 解得 } x = 80, x = -100 \text{ (舍去),}$$

经检验 $x = 80$ 是原方程的解，

故工程队原计划每天挖 80 米.

23. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC 平分 $\angle DAB$ ，点 O 是 AC 上一点，以 OA 为半径的 $\odot O$ 过 B, D 两点.



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 设 $\odot O$ 与 AC 交于点 E ，连接 DE 并延长，交 AB 的延长线于点 F ，若 $AB^2 = AC \cdot EC$ ，求证：

$$AE = EF.$$

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 证明见解析.

【解析】

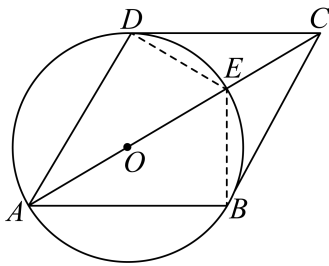
【分析】(1) 设 AC 与 $\odot O$ 的交点为点 E ，连接 BE 、 DE ，由圆周角定理可得 $\angle ABE = \angle ADE = 90^\circ$ ，进而证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADE$ (AAS)，得到 $AB = AD$ ，又由角平分线和平行线的性质可得 $\angle DAC = \angle DCA$ ，得到 $AB = CD$ ，证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，即可求证；

(2) 证明 $\triangle ABC \sim \triangle CEB$ ，得到 $\angle BAC = \angle ACB = \angle CBE$ ，可得 $\angle BAE = 30^\circ$ ，得到 $\angle AED = \angle AEB = 60^\circ$ ，进而可得 $\angle EAF = \angle F = 30^\circ$ ，即可求证；

本题考查了圆周角定理，角平分线的定义，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定，菱形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，三角形外角性质，三角形内角和定理，正确作出辅助线是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明：设 AC 与 $\odot O$ 的交点为点 E ，连接 BE 、 DE ，



$\because AE$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABE = \angle ADE = 90^\circ$,

$\because AC$ 平分 $\angle DAB$,

$\therefore \angle BAE = \angle DAE$,

又 $\because AE = AE$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE$ (AAS),

$\therefore AB = AD$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$,

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$,

$\therefore AD = CD$,

$\therefore AB = CD$,

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\because AB = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB = CB$,

$\therefore \angle BAC = \angle BCA$,

$\because AB^2 = AC \cdot EC$,

$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{AC}{AB}$,

$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{AC}{CB}$,

$\because \angle BAC = \angle BCA$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CEB$,

(3) 将抛物线 C_1 平移, 得到抛物线 C_2 , 平移后抛物线 C_1 的顶点 D 落在 x 轴上的点 M 处, 将 $\triangle MAB$ 沿直线 AB 翻折, 得到 $\triangle QAB$, 如果点 Q 恰好落在抛物线 C_2 的图像上, 求平移后的抛物线 C_2 的表达式.

【答案】(1) $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 3$, $D(5, -\frac{16}{3})$;

(2) $P(0, \frac{27}{4})$;

(3) $y = \frac{1}{3}(x - 3\sqrt{3})^2$;

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B 和点 $C(1, 0)$, 解方程组即可求得解析式, 利用公式法即可求顶点坐标.

(2) 求出抛物线与 x 轴的另一个交点 $E(x_E, 0)$, 设 $P(0, y_P)$, 利用勾股定理即可求得 P 点坐标.

(3) 由于经过平移后顶点 D 落在 x 轴上, 因此可以将抛物线 C_2 可以看作是先将 C_1 平移到顶点 D 在原点的抛物线 $C_3: y = \frac{1}{3}x^2$, 然后由抛物线 C_3 再进行左右平移得到的一条抛物线, 设由抛物线 C_3 平移后抛物线 C_2 解析式为: $y = \frac{1}{3}(x - t)^2$, 利用经过将 $\triangle MAB$ 沿直线 AB 翻折, 得到 $\triangle QAB$, 连接 QM , 可得到 $\triangle QAM$ 为等边三角形, 根据等边三角形性质, 求出 Q 坐标, 利用 Q 在抛物线 C_2 上, 即可解得 t .

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$ 与 x 轴相交于点 A , 与 y 轴相交于点 B ,

$\therefore A(-3\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 3)$,

$\because$ 抛物线 $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过点 B 和点 $C(1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 3 = c \\ 0 = \frac{1}{3} + b + c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} c = 3 \\ b = -\frac{10}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的表达式为: $C_1: y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 3$,

$\therefore$ 顶点坐标 $D(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$, 即 $D(5, -\frac{16}{3})$.

【小问 2 详解】

解: 设抛物线与 x 轴的另一个交点为 $E(x_E, 0)$,

则 $x_E + 1 = -\frac{b}{a} = 10$, 即 $x_E = 9$,

$\therefore E(9, 0)$,

点 P 在 y 轴上, 设 $P(0, y_P)$,

$\because \angle PED = 90^\circ$, $D(5, -\frac{16}{3})$, $E(9, 0)$,

根据勾股定理得, $PD^2 = PE^2 + DE^2$,

$\therefore PD^2 = (0-5)^2 + (y_P + \frac{16}{3})^2$, $PE^2 = (0-9)^2 + (y_P - 0)^2$, $DE^2 = (5-9)^2 + (-\frac{16}{3}-0)^2$,

$\therefore (0-5)^2 + (y_P + \frac{16}{3})^2 = (0-9)^2 + (y_P - 0)^2 + (5-9)^2 + (-\frac{16}{3}-0)^2$,

解得 $y_P = \frac{27}{4}$,

$\therefore P(0, \frac{27}{4})$.

【小问3详解】

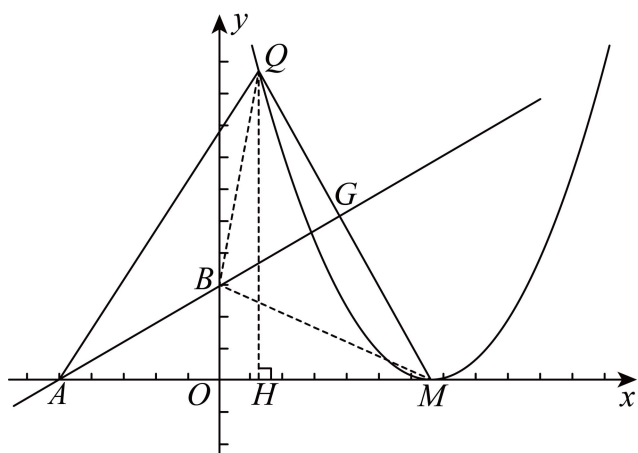
解: $\because C_1: y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 3$, 顶点为 $D(5, -\frac{16}{3})$, 由于抛物线 C_2 的顶点由 $D(5, -\frac{16}{3})$ 平移到了点 M , M 在 x 轴上,

$\therefore$ 抛物线 C_2 可以看作是先将 C_1 平移到顶点 D 在原点的抛物线 C_3 , 然后由抛物线 C_3 再进行左右平移得到的一条抛物线,

$\therefore$ 抛物线 C_3 : 顶点为 $O(0, 0)$, 解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2$,

设 $M(t, 0)$, 则由抛物线 C_3 平移后抛物线 C_2 解析式为: $y = \frac{1}{3}(x-t)^2$,

设经过将 $\triangle MAB$ 沿直线 AB 翻折, 得到 $\triangle QAB$ 后, 图形如图所示,



连接 QM , 过点 Q 作 $QH \perp x$ 轴于 H ,

若 H 落在原点 O 右侧, 则

$$\because A(-3\sqrt{3}, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$\because \triangle MAB$ 沿直线 AB 翻折, 得到 $\triangle QAB$,

$$\therefore \triangle MAB \cong \triangle QAB,$$

$$\therefore \angle QAB = \angle BAO = 30^\circ, AQ = AM,$$

$\therefore \triangle QAM$ 为等边三角形,

$$AM = t - (-3\sqrt{3}) = t + 3\sqrt{3}, AH = HM = \frac{1}{2}(t + 3\sqrt{3}),$$

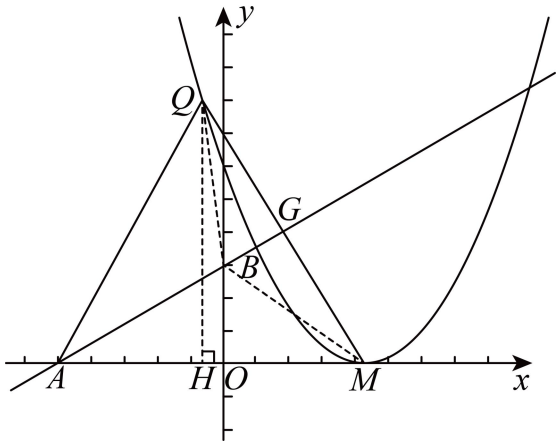
$$QH = (t + 3\sqrt{3}) \cdot \sin 60^\circ = (t + 3\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t + 9),$$

$$OH = OM - HM = t - \frac{1}{2}(t + 3\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(t - 3\sqrt{3}),$$

设点 Q 坐标为 (x_Q, y_Q)

$$\therefore x_Q = \frac{1}{2}(t - 3\sqrt{3}), y_Q = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t + 9),$$

若 H 落在原点 O 左侧, 如图所示,



$$OH = HM - OM = \frac{1}{2}(t + 3\sqrt{3}) - t = -\frac{1}{2}(t - 3\sqrt{3}),$$

$$\therefore x_Q = \frac{1}{2}(t - 3\sqrt{3}), y_Q = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t + 9),$$

$\therefore$ 无论 H 落在原点 O 哪一侧, Q 点坐标表示都一样,

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 在抛物线 } C_2: y = \frac{1}{3}(x - t)^2 \text{ 上,}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\sqrt{3}t+9) = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}(t-3\sqrt{3})-t]^2,$$

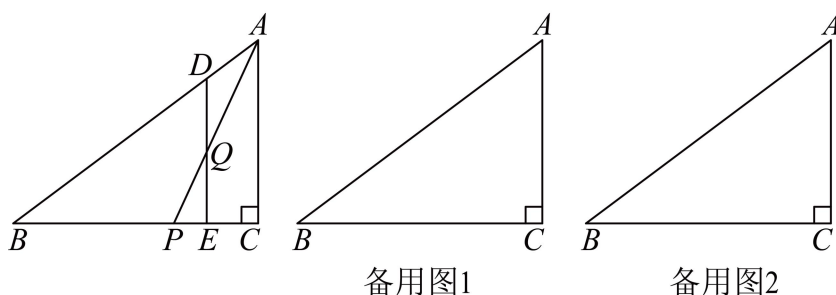
解得 $t_1 = 3\sqrt{3}$, $t_2 = -3\sqrt{3}$ (舍去, M 不与 A 重合)

$$\therefore t = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{平移后的抛物线 } C_2 \text{ 的表达式为: } y = \frac{1}{3}(x-3\sqrt{3})^2.$$

【点睛】本题综合考查了二次函数、一次函数的性质和图象、勾股定理、图象的翻折特征、二次函数图象的平移、解直角三角形等知识, 熟悉其性质和图象, 待定系数法求解析式, 图象平移后解析式的表示, 解直角三角形, 分类讨论是解决问题的关键.

25. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 点 D 是射线 BA 上一动点 (不与 A 、 B 重合), 过点 D 作 $DE \parallel AC$, 交射线 BC 于点 E , 点 Q 为 DE 中点, 连接 AQ 并延长, 交射线 BC 于点 P .



(1) 如图, 当点 D 在线段 AB 上时,

①若 $AD = 2$, 求 PC 的长;

②当 $\triangle ADQ$ 与 $\triangle ABP$ 相似时, 求 AD 的长.

(2) 当 $\triangle ADQ$ 是以 AD 为腰的等腰三角形时, 试判断以点 A 为圆心、 AD 为半径的 $\odot A$ 与以 C 为圆心、 CE 为半径的 $\odot C$ 的位置关系, 并说明理由.

【答案】(1) ① $\frac{8}{3}$, ② $\frac{90}{23}$

(2) 外离, 理由见解析;

【解析】

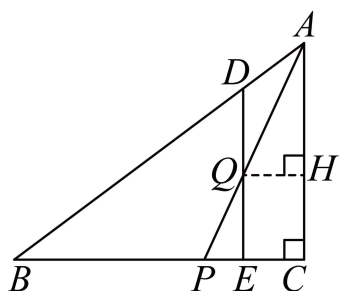
【分析】(1) ① 过点 Q 作 $QH \perp AC$, 交 AC 于 H , 根据已知可得四边形 $QHCE$ 为矩形, 要求 PC , 可先求得 $\angle PAC$ 的正切值, 由 $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $\sin B = \frac{3}{5}$, $AD = 2$, 可依次求得 BC, BD, DE, BE 长, 点 Q 为 DE 中点, 可得 QE, HC , $EC = BC - BE$, 由此在 $\text{Rt}\triangle QHA$ 可求得 $\tan \angle QAH$, 即可求得 PC 的长;

② 当 $\triangle ADQ$ 与 $\triangle ABP$ 相似时, 利用 $\frac{AD}{AP} = \frac{AQ}{AB} = \frac{DQ}{PB}$, 要求 AD , 求出 AP, AQ 即可, 利用 $\angle B = \angle AQD = \angle PAC$, 在 $Rt\triangle ACP$ 中解直角三角形可求得 AP , 设 $EC = x$, 再通过解直角三角形求出 x , 可求得 QH 的长, 由此得解;

(2) 要判断两圆的位置关系, 需求出两圆的半径, AD , CE , 通过利用 $\triangle ADQ$ 是以 AD 为腰的等腰三角形, 解直角三角形求出 AD 和 CE , 然后半径之和与两圆心距离 AC 比较, 即可得到解决.

【小问 1 详解】

解: ① 过点 Q 作 $QH \perp AC$, 交 AC 于 H , 如图所示,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 6, \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{AB} = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{4}{5},$$

解得 $AB = 10$,

$$\therefore BC = AB \cdot \cos B = 10 \times \frac{4}{5} = 8,$$

$$\because AD = 2,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 10 - 2 = 8,$$

$$\because DE \parallel AC, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle DEB$ 中,

$$DE = BD \cdot \sin B = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}, BE = BD \cdot \cos B = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5},$$

$$\therefore EC = BC - BE = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5},$$

$\because$ 点 Q 为 DE 中点,

$$\therefore DQ = QE = \frac{1}{2}DE = \frac{12}{5},$$

$$\because QH \perp AC, DE \parallel AC, \angle ACB = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $QHCE$ 为矩形,

$$\therefore HC = QE = \frac{12}{5}, \quad QH = EC = \frac{8}{5},$$

$$\therefore AH = AC - HC = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5},$$

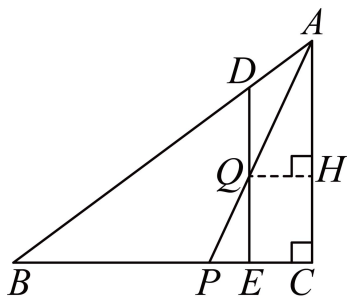
$$\therefore \tan \angle QAH = \frac{QH}{AH} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore PC = AC \cdot \tan \angle QAH = 6 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{3}.$$

② 当 $\triangle ADQ$ 与 $\triangle ABP$ 相似时, 过点 Q 作 $QH \perp AC$, 交 AC 于 H ,

∵ $\triangle ADQ \sim \triangle APB$,

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{AQ}{AB} = \frac{DQ}{PB}, \quad \angle AQD = \angle B,$$



$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin \angle AQD = \frac{3}{5}, \quad \cos \angle AQD = \cos B = \frac{4}{5}, \quad \tan \angle AQD = \tan B = \frac{3}{4},$$

∵ $DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle AQD = \angle PAC,$$

$$\therefore \cos \angle PAC = \frac{AC}{AP} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle PAC = \frac{PC}{AP} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AP = \frac{5}{4} AC = \frac{5}{4} \times 6 = \frac{15}{2}, \quad PC = \frac{3}{5} AP = \frac{3}{5} \times \frac{15}{2} = \frac{9}{2},$$

设 $EC = x$, 则 $BE = BC - x = 8 - x$, $QH = x$,

$$\therefore DE = BE \cdot \tan \angle B = \frac{3}{4}(8 - x),$$

∵ 点 Q 为 DE 中点,

$$\therefore QE = \frac{1}{2} DE = \frac{3}{8}(8 - x) = 3 - \frac{3}{8}x,$$

∵ $\angle PQE = \angle AQD$, $DE \parallel AC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle PEQ \text{ 中, } \tan \angle PQE = \tan \angle AQD = \frac{3}{4},$$

$$\therefore PE = QE \cdot \tan \angle PQE = \frac{3}{4} \times (3 - \frac{3}{8}x) = \frac{9}{4} - \frac{9}{32}x,$$

$$\therefore PE + EC = PC, \text{ 即 } \frac{9}{4} - \frac{9}{32}x + x = \frac{9}{2},$$

$$\text{解得: } x = \frac{72}{23},$$

$$\therefore QH = \frac{72}{23},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHQ \text{ 中, } \sin \angle PAC = \frac{QH}{AQ} = \frac{3}{5},$$

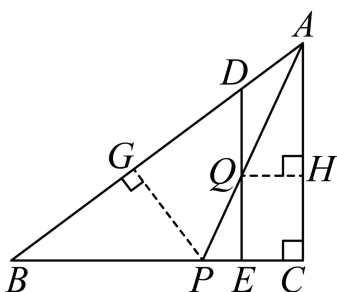
$$\therefore AQ = \frac{5}{3}QH = \frac{5}{3} \times \frac{72}{23} = \frac{120}{23},$$

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{AQ}{AB},$$

$$\therefore AD = \frac{AP \cdot AQ}{AB} = \frac{\frac{15}{2} \times \frac{120}{23}}{10} = \frac{90}{23}.$$

【小问 2 详解】

解: 当 $\triangle ADQ$ 是以 AD 为腰的等腰三角形时, 过点 P 作 $PG \perp AB$ 于 G , 过点 Q 作 $QH \perp AC$, 交 AC 于 H , 如图所示,



则 $AD = DQ$, $\angle DAQ = \angle DQA$,

$\therefore$ 点 Q 为 DE 中点,

$$\therefore QE = DQ = AD,$$

$\therefore DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle DQA = \angle QAH,$$

$\therefore \angle QAH = \angle DAQ$, 即 PA 为 $\angle BAC$ 角平分线,

$\therefore PG \perp AB$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore PG = PC, \quad AG = AC = 6,$$

设 $BP = a$,

$$\therefore PG = BP \cdot \sin \angle B = \frac{3}{5}a, \quad BG = BP \cdot \cos B = \frac{4}{5}a,$$

$$\therefore BG = AB - AG = 10 - 6 = 4,$$

$$\therefore a = 5, \quad PG = 3, \quad BG = 4,$$

$$\therefore PC = 3, \quad \tan \angle PAC = \frac{PC}{AC} = \frac{1}{2}, \quad AP = \sqrt{PC^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle PEQ$ 中, 设 $PE = b$,

$$\therefore \angle PQE = \angle DQA = \angle QAH,$$

$$\therefore QE = \frac{PE}{\tan \angle PQE} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = 2b,$$

$$\therefore AD = DQ = QE = 2b,$$

$$\therefore GD = AG - AD = 6 - 2b,$$

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中,

$$\sin B = \frac{DE}{BD} = \frac{2DQ}{BG + GD} = \frac{3}{5}, \quad \text{即} \quad \frac{4b}{4 + 6 - 2b} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } b = \frac{15}{13}, \quad \text{即 } PE = \frac{15}{13},$$

$$\therefore AD = 2b = \frac{30}{13}, \quad CE = PC - PE = 3 - \frac{15}{13} = \frac{24}{13},$$

$$\text{以点 } A \text{ 为圆心、} AD \text{ 为半径的 } \odot A, \quad \text{即半径为 } r_1 = AD = \frac{30}{13}$$

$$\text{与以 } C \text{ 为圆心、} CE \text{ 为半径的 } \odot C, \quad \text{即半径为 } r_2 = CE = \frac{24}{13},$$

$$AD + CE = \frac{30}{13} + \frac{24}{13} = \frac{54}{13}, \quad \text{两圆心距离 } d = AC = 6,$$

$$\therefore r_1 + r_2 = \frac{54}{13} < d = 6,$$

$\therefore$ 两圆的位置关系为外离.

【点睛】 本题综合考查了解直角三角形, 相似三角形, 等腰三角形, 平行线的性质, 圆的位置关系, 勾股定理, 熟练掌握解直角三角形的正弦, 余弦, 正切的计算, 以及相似三角形, 等腰三角形的性质, 勾股定理的运用, 圆的位置关系判定是解决问题的关键.