

2023 学年第二学期九年级数学练习

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列实数中, 是无理数的是 ()

- A. 0 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据无理数是无限不循环小数, 可得答案.

【详解】A. 0 是有理数, 故 A 错误;

B. -3 是有理数, 故 B 错误;

C. $\frac{1}{3}$ 是有理数, 故 C 错误;

D. $\sqrt{3}$ 是无理数, 故 D 正确;

故选 D.

【点睛】本题考查了无理数, 无理数是无限不循环小数, 有理数是有限小数或无限循环小数.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

- A. $a^4 + a^2 = a^6$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ C. $a^4 \div a^2 = a^2$ D. $(a^2)^4 = a^{16}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项, 同底数幂性的乘法, 同底数幂的除法, 幂的乘方, 根据以上运算法则进行计算即可求解.

【详解】解: A. $a^4 + a^2 \neq a^6$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $a^4 \cdot a^2 = a^6$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $a^4 \div a^2 = a^2$, 故该选项正确, 符合题意;

D. $(a^2)^4 = a^8$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

3. 下列关于 x 的方程中有实数根的是 ()

A. $x^2 - 4x - 1 = 0$

B. $x^2 + 1 = 0$

C. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

D. $\sqrt{x+1} + 1 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式, 分式方程有意义的条件, 二次根式的性质, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

根据一元二次方程根的判别式判断 A, 根据乘方的意义判断 B, 根据分式方程有意义的条件判断 C, 根据二次根式的性质判断 D.

【详解】解: A: $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20 > 0$, 故原方程有实数根, 符合题意;

B: 由题意可 $x^2 = -1$, 由乘方的意义可得 $x^2 \geq 0$, 故原方程无实数根, 不符合题意;

C: 解分式方程得 $x = 1$, 且当 $x = 1$ 时, $x - 1 = 0$, 故原方程无实数根, 不符合题意;

D: 由题意可 $\sqrt{x+1} = -1$, 由二次根式的性质可得 $\sqrt{x+1} \geq 0$, 故原方程无实数根, 不符合题意;

故选: A.

4. 运动会 200 米赛跑, 5 位运动员成绩如下表所示, 其中有两个数据被遮盖, 那么被遮盖的两个数据依次是 ()

运动员	A	B	C	D	E	平均成绩	标准差
时间(秒)	32	34		36	33	33	

A. 30,4

B. 30,2

C. 32,4

D. 32,2

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平均数、标准差, 由平均数求出 5 位运动员的总成绩, 即可求出运动员 C 的成绩, 再根据方差计算公式求出 5 个数据的方差, 即可得到标准差, 掌握平均数和方差的计算公式是解题的关键.

【详解】解: 由表可得, 运动员 C 的成绩为 $33 \times 5 - 32 - 34 - 36 - 33 = 30$,

∴ 5 位运动员成绩分别为 32, 34, 30, 36, 33

∴ 5 个数据的方差为 $S^2 = \frac{(32-33)^2 + (34-33)^2 + (30-33)^2 + (36-33)^2 + (33-33)^2}{5} = 4$,

∴ 标准差为 $S = \sqrt{4} = 2$,

故选: B.

5. 下列函数中, 能同时满足以下三个特征的是 ()

①函数图像经过点 (1, -1); ②图像经过第二象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

- A. $y = -x$ B. $y = x - 2$ C. $y = -\frac{1}{x}$ D. $y = x^2 - 1$.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数、正比例函数、一次函数及反比例函数的图像和性质, 熟练掌握知识点是解题的关键.

根据二次函数、正比例函数、一次函数及反比例函数的图像和性质进行判断即可.

【详解】解: A. $y = -x$, ①函数图像经过点 (1, -1); ②图像经过第二、四象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故此选项不符合题意;

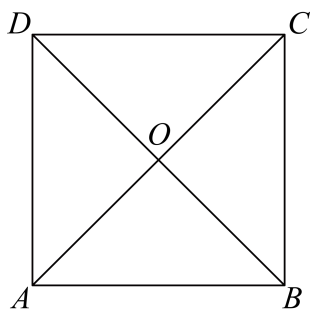
B. $y = x - 2$, ①函数图像经过点 (1, -1); ②图像经过第一、三、四象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故此选项不符合题意;

C. $y = -\frac{1}{x}$, ①函数图像经过点 (1, -1); ②图像经过第二、四象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故此选项符合题意;

D. $y = x^2 - 1$, ①函数图像经过点 (1, 0); ②图像经过第一、二、三、四象限; ③当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故此选项不符合题意.

故选: C.

6. 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 下列条件能判断四边形 $ABCD$ 是正方形的是 ()



A. $AC = DB$ 且 $DA \perp AB$

B. $AB = BC$ 且 $AC \perp BD$

C. $AB = BC$ 且 $\angle ABD = \angle CBD$

D. $DA \perp AB$ 且 $AC \perp BD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查正方形的判定，掌握特殊四边形的判定方法是解题的关键。

根据正方形的判定方法对各个选项进行分析从而得到答案。

【详解】解：A. 由 $AC = DB$ 且 $DA \perp AB$ 可判定 $ABCD$ 是矩形，故此选项不符合题意；

B. $AB = BC$ 且 $AC \perp BD$ 可判定 $ABCD$ 是菱形，故此选项不符合题意；

C. $AB = BC$ 且 $\angle ABD = \angle CBD$ 可判定 $ABCD$ 是菱形，故此选项不符合题意；

D. $DA \perp AB$ 且 $AC \perp BD$ 可判定 $ABCD$ 是正方形，故此选项不符合题意；

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 计算 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{3}{x}$

【解析】

【分析】根据同分母分式相加，分母不变，只把分子相加，进行计算即可。

【详解】解： $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$,

故答案为： $\frac{3}{x}$.

【点睛】本题要考查了同分母分式的加法，解题的关键是掌握：同分母分式相加，分母不变，只把分子相加。

8. 单项式 $-4ab^2$ 的次数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】

【分析】此题考查了单项式的次数的定义，根据单项式的次数就是所含字母的指数和，由此即可求解，解题的关键是熟练掌握相关的定义。

【详解】解： $-4ab^2$ 的次数是 $1+2=3$,

故答案为：3.

9. 因式分解： $4x^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(2x+1)(2x-1)$

【解析】

【分析】 将 $4x^2$ 看作 $(2x)^2$ ，应用平方差公式，即可求解，

本题考查了公式法因式分解，解题的关键是：熟练掌握平方差公式.

【详解】 解： $4x^2 - 1$

$$= (2x)^2 - 1^2$$

$$= (2x+1)(2x-1).$$

10. 函数 $y = \frac{1}{2x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 由于函数解析式是分式，则要求分母不为零，则可求得自变量的取值范围即函数的定义域.

【详解】 解：根据题意得： $2x-1 \neq 0$ ，

$$\text{解得： } x \neq \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为： } x \neq \frac{1}{2}.$$

【点睛】 本题考查了求函数自变量的取值范围，初中求自变量取值范围的常常是三类函数：解析式是整式时，自变量的取值范围是全体实数；解析式是分式时，分母不为零；解析式是二次根式时，被开方数非负.

11. 不等式组 $\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq -1$

【解析】

【分析】 本题考查了求不等式组的解集，分别求出每一个不等式的解集，找到它们的公共部分即可，正确求出每一个不等式的解集是解题的关键.

$$\text{【详解】 解： } \begin{cases} x+1 \leq 0 \text{ ①} \\ 3-x \geq 0 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\because \text{解不等式①得： } x \leq -1,$$

$$\text{解不等式②得： } x \leq 3,$$

$$\therefore \text{不等式组的解集是 } x \leq -1,$$

$$\text{故答案为： } x \leq -1.$$

12. 据国家航天局消息, 航天科技集团所研制的天问一号探测器由长征五号运载火箭发射, 并成功着陆于火星预选着陆区, 距离地球 320000000 千米, 其中 320000000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 3.2×10^8

【解析】

【分析】 利用科学记数法的定义解决. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】 解: 320000000 用科学记数法表示为 3.2×10^8 .

故答案为: 3.2×10^8 .

【点睛】 此题考查科学记数法的定义, 关键是理解运用科学记数法.

13. 在四张背面完全相同的卡片上分别印有等腰三角形、平行四边形、菱形和圆的图案, 现将印有图案的一面朝下, 混合后从中随机抽取两张, 则抽到卡片上印有图案都是轴对称图形的概率为_____.

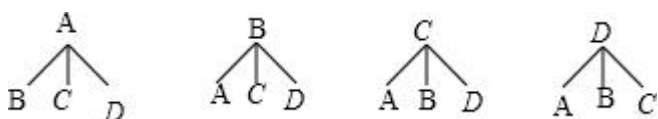
【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 用字母 A、B、C、D 分别表示等腰三角形、平行四边形、菱形和圆, 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出抽到卡片上印有图案都是轴对称图形的结果数, 然后根据概率公式求解.

【详解】 解: 用字母 A、B、C、D 分别表示等腰三角形、平行四边形、菱形和圆,

画树状图:



共有 12 种等可能的结果数, 其中抽到卡片上印有图案都是轴对称图形的结果数为 6,

所以抽到卡片上印有图案都是轴对称图形的概率 $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法和树状图法展示所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率. 也考查了轴对称图形.

14. 和线段 AB 两个端点距离相等的轨迹是_____.

【答案】 线段 AB 的垂直平分线

【解析】

【分析】 根据线段垂直平分线的性质解题即可.

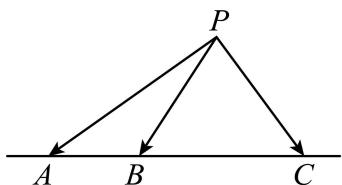
【详解】到线段 AB 两个端点的距离相等的点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线，

故答案为：线段 AB 的垂直平分线．

【点睛】本题考查线段垂直平分线的性质，是重要考点，难度容易，掌握相关知识是解题关键．

15. 如图，已知点 A、B、C 在直线 l 上，点 P 在直线 l 外， $BC = 2AB$ ， $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ ，那么

$\overrightarrow{PC} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $3\vec{b} - 2\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查平面向量，在 $\triangle ABP$ 中，利用三角形法则求得 $\overrightarrow{AB}$ ；然后结合 $BC = 2AB$ 求得 $\overrightarrow{AC}$ ；最后在 $\triangle PAC$ 中，再次利用三角形法则求得答案．

【详解】解： $\because \overrightarrow{PA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\because BC = 2AB,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} = 3(\vec{b} - \vec{a}) = 3\vec{b} - 3\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{a}$$

故答案为： $3\vec{b} - 2\vec{a}$.

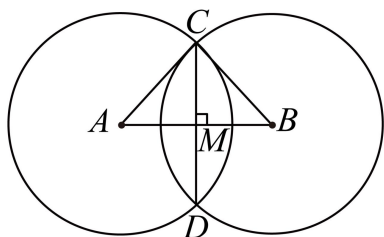
16. 已知两个半径都为 4 的 $\odot A$ 与 $\odot B$ 交于点 C、D， $CD = 6$ ，那么圆心距 AB 的长是_____.

【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】本题考查了圆与圆相交，根据两个圆相交，两个圆心所在的直线垂直平分相交弦，且圆心距被相交弦垂直平分即可求解，掌握相交圆的性质是解题的关键．

【详解】解：如图，由题意可得，AB 垂直平分 CD， $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ ，



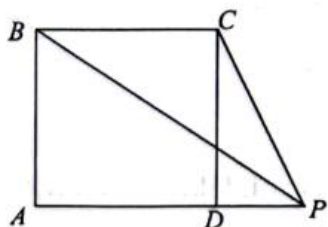
$$\therefore CM = \frac{1}{2}CD = 3, \quad \angle AMC = 90^\circ,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore AB = 2AM = 2\sqrt{7},$$

故答案为: $2\sqrt{7}$.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 P 在 AD 延长线上 ($PD < CD$), 连接 PB 、 PC , 如果 $\triangle CDP$ 与 $\triangle PAB$ 相似, 那么 $\tan \angle BPA =$ _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质, 三角函数, 设 $DP = x$, 利用相似三角形的性质可得 $\frac{DP}{AB} = \frac{CD}{PA}$,

即 $\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1}$, 求出 x , 得到 $DP = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 再根据正切的定义计算即可求解, 利用相似三角形的性质求得 DP

是解题的关键.

【详解】 解: 设 $DP = x$, 则 $PA = x + 1$

$\because PD < CD$, $\triangle CDP$ 与 $\triangle PAB$ 相似,

$$\therefore \frac{DP}{AB} = \frac{CD}{PA},$$

$$\therefore \frac{x}{1} = \frac{1}{x+1},$$

$$\therefore x^2 + x - 1 = 0,$$

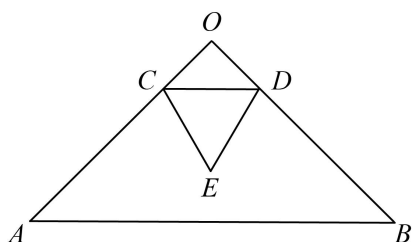
$$\text{解得 } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{不合, 舍去}),$$

$$\therefore DP = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle BPA = \frac{AB}{PA} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

18. 如图, $\triangle OAB$ 是等腰直角三角形, $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = OB = 3\sqrt{2}$, 点 C 、 D 分别在边 OA 、 OB 上, 且 $CD \parallel AB$, 已知 $\triangle CDE$ 是等边三角形, 且点 E 在 $\triangle OAB$ 形内, 点 G 是 $\triangle CDE$ 的重心, 那么线段 OG 的取值范围是_____.



【答案】 $0 < OG < \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰直角三角形的性质, 等边三角形的性质, 三角形重心的性质, 解直角三角形, 勾股定理, 直角三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 连接 EG 并延长交 CD 于 F , 连接 OF , 连接 CG 并延长交 DE 于 M , 由点 G 是 $\triangle CDE$ 的重心, 可得 F 、 M 分别为 CD 、 ED 的中点, 进而由 $\triangle CDE$ 是等边三角形可得 $EF \perp CD$, $CM \perp DE$, $\angle MCD = \frac{1}{2} \angle ECD = 30^\circ$, 设 $CD = x$, 则 $CF = \frac{1}{2}x$, 解 $\text{Rt}\triangle CFG$ 得 $FG = \frac{\sqrt{3}}{6}x$, 又证明 $\triangle OCD \sim \triangle OAB$ 得 $\triangle OCD$ 是等腰直角三角形, 得到 $OF \perp CD$, 点 O 、 F 、 G 、 E

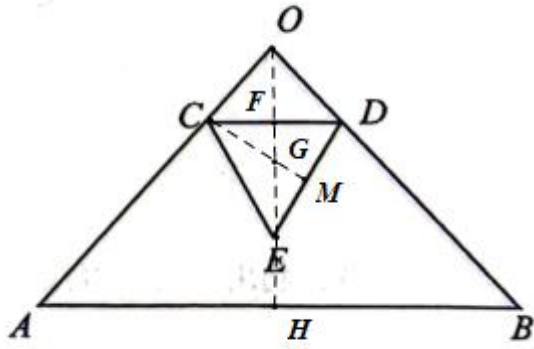
四点共线, 即得 OE 平分 $\angle COD$, OE 平分 $\angle AOB$, 延长 OE 交 AB 于 H , 则 OH 垂直平分 AB , 由勾股定理可得 $AB = 6$, 由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $OH = \frac{1}{2}AB = 3$, $OF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}x$,

得到 $FH = OH - OF = 3 - \frac{1}{2}x$, 根据点 E 在 $\triangle OAB$ 形内, $EF < FH$, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}x < 3 - \frac{1}{2}x$, 得到

$x < 3\sqrt{3} - 3$, 又根据 $x > 0$ 可得 $0 < x < 3\sqrt{3} - 3$, 由 $OG = OF + FG = \frac{3+\sqrt{3}}{6}x$, $0 < x < 3\sqrt{3} - 3$, 即可

求出线段 OG 的取值范围, 正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】 解: 如图, 连接 EG 并延长交 CD 于 F , 连接 OF , 连接 CG 并延长交 DE 于 M ,



$\because$ 点 G 是 $\triangle CDE$ 的重心,

$\therefore F$ 、 M 分别为 CD 、 ED 的中点,

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$\therefore EF \perp CD$, $CM \perp DE$, $\angle MCD = \frac{1}{2} \angle ECD = 30^\circ$,

设 $CD = x$, 则 $CF = \frac{1}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle CFG$ 中, $\angle FCG = 30^\circ$,

$$\therefore FG = \frac{\sqrt{3}}{3} CF = \frac{\sqrt{3}}{6} x,$$

$\therefore CD \parallel AB$,

$\therefore \triangle OCD \sim \triangle OAB$,

$\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \triangle OCD$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OF \perp CD$,

$\therefore$ 点 O 、 F 、 G 、 E 四点共线,

$\therefore OE$ 平分 $\angle COD$, OE 平分 $\angle AOB$,

延长 OE 交 AB 于 H , 则 OH 垂直平分 AB ,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$, $OA = OB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2} AB = 3,$$

同理可得 $OF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} x$,

$$\therefore FH = OH - OF = 3 - \frac{1}{2} x,$$

在 $\text{Rt}\triangle CFE$ 中, $\angle ECF = 60^\circ$,

$$\therefore EF = \sqrt{3}CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$\because$ 点 E 在 $\triangle OAB$ 形内,

$$\therefore EF < FH,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}x < 3 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore x < 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\text{又} \because x > 0,$$

$$\therefore 0 < x < 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\because OG = OF + FG = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}x, \quad 0 < x < 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore 0 < OG < \frac{3+\sqrt{3}}{6} \times (3\sqrt{3} - 3),$$

$$\therefore 0 < OG < \sqrt{3},$$

故答案为: $0 < OG < \sqrt{3}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + |\sqrt{3} - 2|$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算, 掌握二次根式的性质, 分数指数幂, 负整数指数幂的运算法则是正确解答的前提.

先计算分数指数幂, 负整数指数幂, 化简绝对值, 分母有理化, 然后再算加减法.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & 8^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + |\sqrt{3} - 2| \\ &= \sqrt[3]{8} + \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - 4 + 2 - \sqrt{3} \\ &= 2 + 2 + \sqrt{3} - 4 + 2 - \sqrt{3} \\ &= 2. \end{aligned}$$

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-4y^2=-3 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了代入消元法解方程及二元二次方程的解法，熟练掌握代入消元法，运算过程中细心即可.

由第一个方程得到 $x=2-y$ ，再代入第二个方程中，解一元二次方程即可求出 y ，再回代第一个方程中即可求出 x .

【详解】 解：由题意:
$$\begin{cases} x+2y=1 \text{①} \\ x^2-4y^2=-3 \text{②} \end{cases},$$

由方程①得到: $x=1-2y \text{③},$

将③代入方程②中: 得到: $(1-2y)^2-4y^2=-3,$

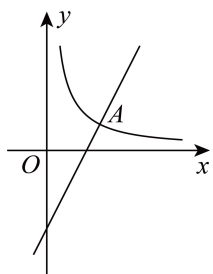
进一步整理为: $1-4y=-3,$

解得 $y=1,$

把 $y=1$ 代入方程③中, 解得 $x=1-2 \times 1=-1,$

故方程组的解为:
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

21. 如图, 已知一次函数图像 $y=2x-3$ 与反比例函数图像 $y=\frac{k}{x}$ 交于点 $A(2, m)$.



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 已知点 M 在点 A 右侧的反比例函数图像上, 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N , 如果 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4}$, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x}$;

(2) $M\left(\frac{8}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

【解析】

【分析】 (1) 求出点 A 坐标，再利用待定系数法求出反比例函数解析式即可；

(2) 设 $M(m, 2)$ ，则 $N(m, 0)$ ，根据三角形面积公式可得分式方程，解方程即可求解；

本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，待定系数法求反比例函数解析式，利用待定系数法求出反比例函数解析式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一次函数图象 $y = 2x - 3$ 与反比例函数图象 $y = \frac{k}{x}$ 交于点 $A(2, m)$,

$$\therefore m = 2 \times 2 - 3 = 1,$$

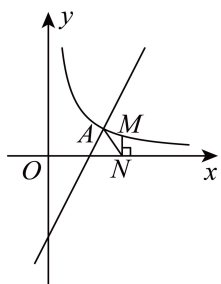
$$\therefore A(2, 1),$$

$$\therefore k = 1 \times 2 = 2,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{2}{x};$$

【小问 2 详解】

解： 如图，



设 $M\left(m, \frac{2}{m}\right)$ ，则 $N(m, 0)$

$$\therefore MN = \frac{2}{m},$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{m} \times (m - 2) = \frac{1}{4},$$

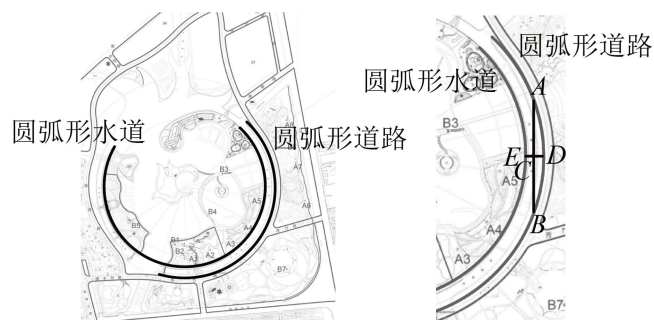
$$\text{整理得, } \frac{2}{m} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } m = \frac{8}{3},$$

经检验, $m = \frac{8}{3}$ 是原方程的解, 符合题意,

$$\therefore M\left(\frac{8}{3}, \frac{3}{4}\right).$$

22. 上海之鱼是奉贤区的核心景观湖, 湖面成鱼型. 如图, 鱼身外围有一条圆弧形水道, 在圆弧形水道外侧有一条圆弧形道路, 它们的圆心相同. 某学习小组想要借助所学的数学知识探索上海之鱼的大小.



(1) 利用圆规和直尺, 在图上作出圆弧形水道的圆心 O . (保留作图痕迹)

(2) 如图, 学习小组来到了圆弧形道路内侧 A 处, 将所携带的 200 米绳子拉直至圆弧形道路内侧另一点 B 处, 并测得绳子中点 C 与圆弧形道路内侧中点 D 的距离为 10 米, 圆弧形水道外侧到道路内侧的距离 DE 为 22 米 (点 D 、 C 、 E 在同一直线上), 请计算圆弧形水道外侧的半径.

【答案】 (1) 见解析 (2) 圆弧形水道外侧的半径为 483 米

【解析】

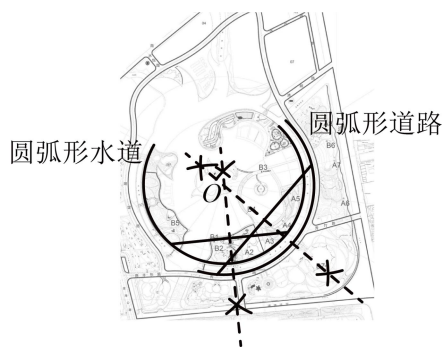
【分析】 本题主要考查了垂径定理, 勾股定理, 线段垂直平分线的尺规作图:

(1) 如图所示, 分别在圆弧形水道, 圆弧形道路上取一条弦, 分别作两条弦的垂直平分线, 二者的交点即为点 O ;

(2) 如图所示, 连接 OA , OC , OD , 由垂径定理可得 $OC \perp AB$, $OD \perp AB$, $AC = \frac{1}{2}AB = 100$ 米, 则 O 、 E 、 C 、 D 四点共线, 设 $OA = OD = r$ 米, 则 $OC = (r - 10)$ 米, 由勾股定理得 $r^2 = (r - 10)^2 + 100^2$, 解得 $r = 505$, 则 $OE = OD - DE = 505 - 22 = 483$ 米.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 分别在圆弧形水道, 圆弧形道路上取一条弦, 分别作两条弦的垂直平分线, 二者的交点即为点 O ;



【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 OA , OC , OD ,

$\because C$ 为 AB 的中点，点 D 为圆弧形道路内侧中点，

$\therefore OC \perp AB$, $OD \perp AB$, $AC = \frac{1}{2}AB = 100$ 米，

$\therefore O, E, C, D$ 四点共线，

设 $OA = OD = r$ 米，则 $OC = (r - 10)$ 米，

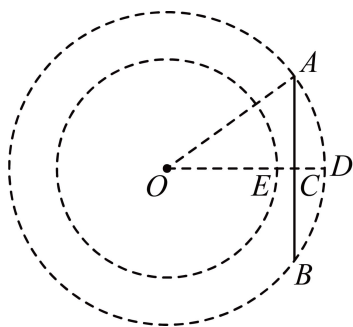
在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，由勾股定理得 $OA^2 = OC^2 + AC^2$,

$$\therefore r^2 = (r - 10)^2 + 100^2,$$

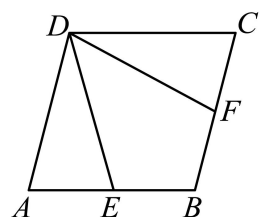
解得 $r = 505$,

$$\therefore OE = OD - DE = 505 - 22 = 483 \text{ 米}.$$

答：圆弧形水道外侧的半径为 483 米.



23. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$, $\angle B = \angle ADC$, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上，且 $\angle ADE = \angle CDF$.



(1) 求证： $CF \cdot CB = AE \cdot AB$;

(2) 连接 AC, EF , 如果 $EF \parallel AC$, 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

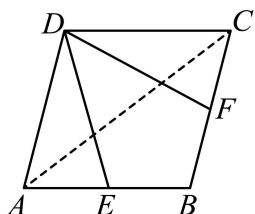
【解析】

【分析】(1) 连接 AC ，先证明 $\triangle ABC \sim \triangle CDA$ 得 $\frac{AB}{DC} = \frac{BC}{AD}$ ，再证明 $\triangle CDF \sim \triangle ADE$ ，得 $\frac{CD}{AD} = \frac{CF}{AE}$ ，从而得出 $\frac{AB}{BC} = \frac{CF}{AE}$ ，即可由比例的性质得出结论。

(2) 由平行线分线段使得 $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC}$ ，即 $\frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB}$ ，由 (1) 知 $\frac{AB}{BC} = \frac{CF}{AE}$ ，从而得 $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ，即可得出 $AB = BC$ ，再证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (AAS)，得出 $AB = AD$ ， $BC = CD$ ，从而得出 $AB = BC = CD = AD$ ，可由菱形的判定得出结论。

【小问 1 详解】

证明：连接 AC ，



$$\therefore AB \parallel DC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DCA$$

$$\therefore \angle B = \angle ADC$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CDA$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BC}{AD}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DC}{AD}$$

$$\therefore AB \parallel DC$$

$$\therefore \angle B + \angle BCD = 180^\circ, \quad \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADC$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle ADE$$

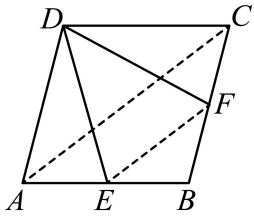
$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{CF}{AE}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{CF}{AE}$$

$$\therefore CF \cdot CB = AE \cdot AB.$$

【小问 2 详解】

证明：如图，



$$\because EF \parallel AC$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BC}$$

$$\therefore \frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{由 (1) 知 } \frac{AB}{BC} = \frac{CF}{AE}$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore AB = BC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA$$

$$\because AB \parallel DC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DCA$$

$$\therefore \angle BCA = \angle DCA$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle ADC \\ \angle BCA = \angle DCA \\ AC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC \text{ (AAS)}$$

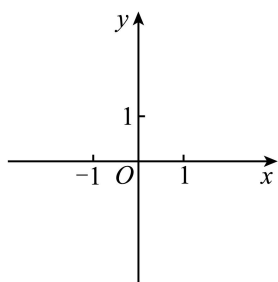
$$\therefore AB = AD, \quad BC = CD,$$

$$\therefore AB = BC = CD = AD$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，平行线的性质，平行线分线段成比例，等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，菱形的判定．熟练掌握相似三角形的判定与性质、菱形的判定是解题的关键．

24. 如图，在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 与 x 轴交于点 A 、 B ，与 y 轴正半轴交于点 C ，顶点为 P ，点 A 坐标为 $(-1, 0)$ ．



- (1) 写出这条抛物线的开口方向，并求顶点 P 的坐标（用 a 的代数式表示）；
- (2) 将抛物线向下平移后经过点 $(0, 1)$ ，顶点 P 平移至 P' 。如果锐角 $\angle CP'P$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$ ，求 a 的值；
- (3) 设抛物线对称轴与 x 轴交于点 D ，射线 PC 与 x 轴交于点 E ，如果 $\angle EDC = \angle BPE$ ，求此抛物线的表达式。

【答案】(1) 抛物线开口向下， $P(1, -4a)$

$$(2) a = -\frac{3}{2}$$

$$(3) y = -x^2 + 2x + 3$$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的综合应用，角度问题，正切的定义，相似三角形的性质与判定；

(1) 将点 $(-1, 0)$ 代入解析式可得 $c = -3a$ ，根据抛物线与 y 轴正半轴交于点 C ，得出 $a < 0$ ，即抛物线开口向下，然后化为顶点式求得顶点坐标，即可求解；

(2) 过点 C 作 $CH \perp PP'$ 于点 H ，设向下平移 m 个单位 $m > 0$ ，平移后的抛物线为 $y = a(x-1)^2 - 4a - m$ ，根据题意得出 $P'H = 2$ ，得出 $-3a - 2 = -4a - m$ ，点 $(0, 1)$ 代入 $y = a(x-1)^2 - 4a - m$ ，得出 $a - 4a - m = 1$ ，联立解方程组，即可求解；

(3) 根据题意可得 $\triangle EDC \sim \triangle EPB$ 则 $\frac{ED}{EP} = \frac{EC}{EB}$ ，根据题意得出直线 PC 的解析式为 $y = -ax - 3a$ ，进而得出 $E(-3, 0)$ ，由抛物线对称轴与 x 轴交于点 D ，得出 $D(1, 0)$ ，则 $ED = 4$ ， $EB = 6$ ，勾股定理可得 CE ， PE ，进而代入比例式，即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 与 x 轴交于点 $(-1, 0)$

$$\therefore a + 2a + c = 0$$

$$\therefore c = -3a$$

∵ 抛物线与 y 轴正半轴交于点 C ，

$$\therefore -3a > 0$$

$$\therefore a < 0$$

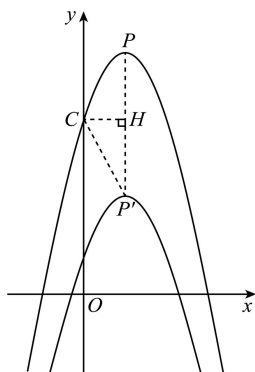
$\therefore$ 抛物线开口向下,

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x-1)^2 - 4a$$

$$\therefore P(1, -4a)$$

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 C 作 $CH \perp PP'$ 于点 H ,



设向下平移 m 个单位 $m > 0$, 平移后的抛物线为 $y = a(x-1)^2 - 4a - m$

$\therefore P(1, -4a)$, 锐角 $\angle CP'P$ 的正切值为 $\frac{1}{2}$,

$$\therefore CH = 1, \text{ 则 } P'H = 2, \quad P'(1, -4a - m)$$

$$\therefore -3a - 2 = -4a - m \quad \text{①}$$

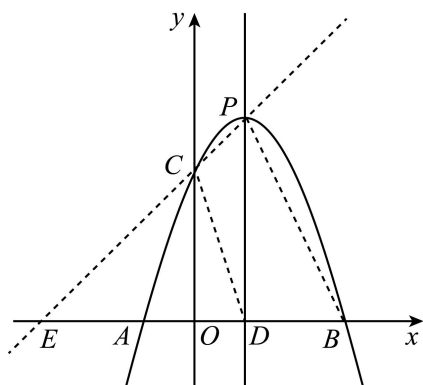
将点 $(0, 1)$ 代入 $y = a(x-1)^2 - 4a - m$

$$a - 4a - m = 1 \quad \text{②}$$

$$\text{联立①②得} \begin{cases} m = \frac{7}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

【小问 3 详解】

解: 如图所示



$$\because y = ax^2 - 2ax - 3a = a(x+1)(x-3)$$

当 $y=0$ 时, $x_1 = -1, x_2 = 3$

$$\therefore B(3,0)$$

$$\because C(0, -3a), P(1, -4a)$$

设直线 PC 的解析式为 $y = kx + t$

$$\therefore \begin{cases} t = -3a \\ k + t = -4a \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = -a \\ t = -3a \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 PC 的解析式为 $y = -ax - 3a$,

当 $y=0$ 时, $x = -3$

$$\therefore E(-3,0)$$

$\because$ 抛物线对称轴与 x 轴交于点 D ,

$$\therefore D(1,0)$$

$$\therefore ED = 4, EB = 6,$$

$$\text{勾股定理可得 } CE = \sqrt{CO^2 + EO^2} = \sqrt{9 + 9a^2} = 3\sqrt{1 + a^2}, \quad PE = \sqrt{ED^2 + PD^2} = \sqrt{16 + 16a^2} = 4\sqrt{1 + a^2}$$

$$\therefore \angle CED = \angle BEP, \quad \angle EDC = \angle BPE$$

$$\therefore \triangle EDC \sim \triangle EPB$$

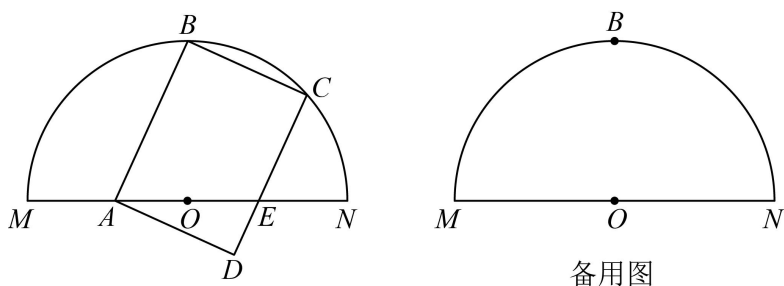
$$\therefore \frac{ED}{EP} = \frac{EC}{EB}$$

$$\therefore \frac{4}{4\sqrt{1+a^2}} = \frac{3\sqrt{1+a^2}}{6}$$

解得: $a = -1$ (正值舍去)

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$.

25. 如图, 已知半圆 O 的直径为 MN , 点 A 在半径 OM 上, B 为 $\widehat{MN}$ 的中点, 点 C 在 $\widehat{BN}$ 上, 以 AB 、 BC 为邻边作矩形 $ABCD$, 边 CD 交 MN 于点 E .



- (1) 如果 $MN = 6$, $AM = 2$, 求边 BC 的长;
- (2) 连接 CN , 当 $\triangle CEN$ 是以 CN 为腰的等腰三角形时, 求 $\angle BAN$ 的度数;
- (3) 连接 DO 并延长, 交 AB 于点 P , 如果 $BP = 2AP$, 求 $\frac{BC}{AB}$ 的值.

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$;

(2) $\angle BAN = 67.5^\circ$;

(3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 连接 OB , 过点 O 作 $OH \perp BC$, 垂足为 H , 由圆周角定理可得 $\angle MOB = 90^\circ$, 进而可得 $AB = \sqrt{10}$, 再证明 $\angle ABO = \angle BOH$, 根据 $\sin \angle ABO = \sin \angle BOH$, 可得 $\frac{OA}{AB} = \frac{BH}{BO}$, 即可求解;

(2) 连接 OC , 设 $\angle CON = \alpha$, 则 $\angle CNO = \angle NCO = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\angle COH = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$, 求出 $\angle OCH = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$, 得到 $\angle OCE = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, 进而得到 $\angle ECN = 45^\circ$, $\angle CEN = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$, 分 $CE = CH$ 和 $CN = EN$ 两种情况解答即可求解;

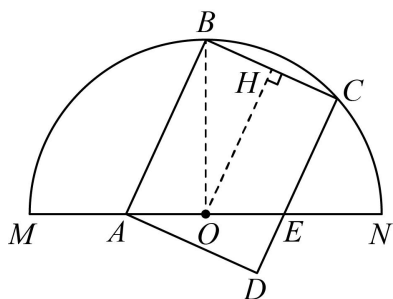
(3) 由 $AB \parallel OH \parallel CE$ 可得, $\frac{CH}{BH} = \frac{OE}{AO} = 1$, 进而得到 $AO = OE$, 可证明 $\triangle AOP \cong \triangle EOD$ (ASA), 得到 $PA = DE$, $PD = AE$, 设 $AO = OE = x$, $AP = ED = y$, 则 $AB = 3y$, $AE = 2x$, 证明 $\triangle AOB \sim \triangle EDA$,

得到 $\frac{OA}{ED} = \frac{AB}{AE}$,

即可到 $2x^2 = 3y^2$, 由勾股定理 $BC = AD = \sqrt{5}y$, 即可求解;

【小问 1 详解】

解: 连接 OB , 过点 O 作 $OH \perp BC$, 垂足为 H ,



$\because$ 点 B 是 $\widehat{MN}$ 中点,

$$\therefore \angle MOB = \frac{1}{2} \angle NOM = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\because MN = 6,$$

$$\therefore OM = ON = OB = \frac{1}{2} MN = 3,$$

$$\therefore OA = OM - AM = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore AB \perp BC,$$

$$\because OH \perp BC,$$

$$\therefore AB \parallel OH, \quad BH = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BOH,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 与 $\text{Rt}\triangle BOH$ 中, $\sin \angle ABO = \sin \angle BOH$,

$$\therefore \frac{OA}{AB} = \frac{BH}{BO},$$

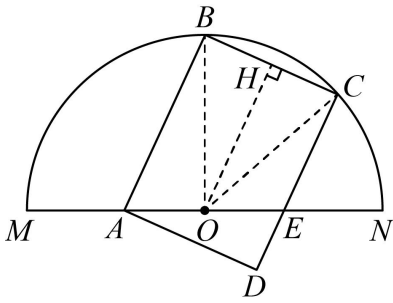
$$\therefore \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{BH}{3},$$

$$\text{解得 } BH = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore BC = 2 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5};$$

【小问 2 详解】

解：连接 OC ，



$$\text{设 } \angle CON = \alpha, \text{ 则 } \angle CNO = \angle NCO = \frac{180^\circ - \alpha}{2}, \quad \angle COH = \frac{90^\circ - \alpha}{2},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OCH \text{ 中, } \angle OCH = 90^\circ - \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle OCE = 90^\circ - \angle OCH = 90^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ECN = \angle NCO - \angle OCE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ,$$

$$\angle CEN = \angle COE + \angle OCE = \alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

当 $CE = CN$ 时, $\angle CEN = \angle CNE$,

$$\text{即 } 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

解得 $\alpha = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CEN = 45^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 67.5^\circ,$$

$\therefore AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAN = \angle CEN = 67.5^\circ;$$

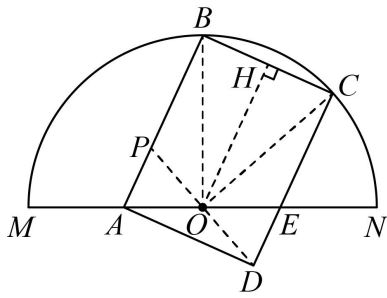
当 $CN = EN$ 时, $\angle CEN = \angle ECN$,

$$\text{即 } 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ, \text{ 不存在;}$$

$$\therefore \angle BAN = 67.5^\circ;$$

【小问 3 详解】

解：如图，



由 $AB \parallel OH \parallel CE$ 可得, $\frac{CH}{BH} = \frac{OE}{AO} = 1$, $\angle PAO = \angle DEO$, $\angle APO = \angle EDO$,

$$\therefore AO = OE,$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle EOD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PA = DE, \quad PD = AE,$$

设 $AO = OE = x$, $AP = ED = y$, 由题意得 $AB = 3y$, $AE = 2x$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = \angle ADE = 90^\circ, \quad \angle BAO + \angle DAE = 90^\circ, \quad \angle AED + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle AED,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{OA}{ED} = \frac{AB}{AE},$$

$$\text{即 } \frac{x}{y} = \frac{3y}{2x},$$

$$\therefore 2x^2 = 3y^2,$$

$$\therefore BC = AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{(2x)^2 - y^2} = \sqrt{6y^2 - y^2} = \sqrt{5}y,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}y}{3y} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 圆周角定理, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 平行线等分线段定理, 三角函数, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 正确作出辅助线是解题的关键.

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

