

2023 学年嘉定区第二次质量调研

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列实数中, 属于有理数的是 ()

A. $\sqrt{27}$ B. 2π C. $\frac{22}{7}$ D. $\sin 60^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查有理数的定义, 掌握有理数的定义是解题的关键.

根据有理数的定义依次判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ 是无理数, 故本选项不符合题意;

B、 2π 是无理数, 故本选项不符合题意;

C、 $\frac{22}{7}$ 是分数, 是有理数, 本选项符合题意;

D、 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数, 故本选项不符合题意.

故选: C.

2. 关于 x 的方程 $x^2 - 6x - k = 0$ (k 为常数) 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是 ()

A. $k > -9$ 且 $k \neq 0$ B. $k > -9$ C. $k \geq -9$ 且 $k \neq 0$ D. $k \geq -9$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

根据一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式的意义得到 $\Delta > 0$, 解不等式即可.

【详解】解：∵关于 x 的方程 $x^2 - 6x - k = 0$ （ k 为常数）有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta > 0, \text{ 即 } (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-k) > 0,$$

解得 $k > -9$,

∴ k 的取值范围为 $k > -9$.

故选：B.

3. 如果将抛物线 $y = (x-1)^2$ 向下平移2个单位，那么平移后抛物线与 y 轴的交点坐标是（ ）

- A. $(-1, 0)$ B. $(0, -1)$ C. $(-2, 0)$ D. $(3, 0)$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减. 根据“左加右减、上加下减”的原则写出新抛物线解析式，然后令 $x=0$ ，通过解方程求解.

【详解】解：把抛物线 $y = (x-1)^2$ 的图象向下平移2个单位，则平移后的抛物线的表达式为 $y = (x-1)^2 - 2$,

令 $x=0$ ，则 $y = (0-1)^2 - 2 = -1$.

所以所得抛物线与 y 轴的交点的坐标为 $(0, -1)$.

故选 B.

4. 已知一组数据 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 ，如果这组数据中的每一个数都减去常数 $a(a \neq 0)$ ，得到新的一组数据，那么下列描述这组新数据的信息中正确的是（ ）

- A. 平均数改变，方差不变； B. 平均数改变，方差改变；
C. 平均数不变，方差不变； D. 平均数不变，方差改变.

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了方差和平均数，一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2], \text{ 掌握平均数和方差的特点是本题的关键.}$$

根据平均数和方差的特点，一组数都加上或减去同一个不等于0的常数后，方差不变，平均数改变，即可得出答案.

【详解】解：记原先平均数为 $\bar{x}$ ， $\bar{x} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\bar{x}$,

新的平均数为 $\bar{x}'$ ，则 $\bar{x}' = \frac{1}{4}(x_1 - a + x_2 - a + x_3 - a + x_4 - a) = \frac{1}{4}(\bar{x} - 4a) = \bar{x} - a$ ，所以平均数改变；

记原先方差为 S^2 ，则 $S^2 = \frac{1}{4}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_4 - \bar{x})^2]$ ，

则新的方差 $S'^2 = \frac{1}{4}[(x_1 - a - \bar{x}')^2 + (x_2 - a - \bar{x}')^2 + (x_3 - a - \bar{x}')^2 + (x_4 - a - \bar{x}')^2]$ ，

而 $\bar{x}' = \bar{x} - a$ ，代入得 $S'^2 = \frac{1}{4}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_4 - \bar{x})^2]$ ，

$\therefore S^2 = S'^2$ ，

$\therefore$ 平均数改变，方差不变，

故选：A.

5. 下列命题正确的是 ()

A. 对角线相等的平行四边形是正方形；

B. 对角线相等的四边形是矩形；

C. 对角线互相垂直的四边形是菱形；

D. 对角线相等的梯形是等腰梯形.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是牢记特殊的四边形的判定定理，利用特殊的四边形的判定和性质定理逐一判断后即可确定正确的选项.

【详解】解：A、对角线相等的平行四边形是矩形，命题错误，不符合题意；

B、对角线相等的四边形是等腰梯形或矩形，命题错误，不符合题意；

C、对角线互相垂直的四边形是菱形或等腰梯形，命题错误，不符合题意；

D、对角线相等的梯形是等腰梯形，命题正确，符合题意.

故选：D.

6. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 8$ ， $\cos \angle B = \frac{1}{4}$ ，以点 C 为圆心，半径为 6 的圆记作圆 C ，那么下列说法正确的是 ()

A. 点 A 在圆 C 外，点 B 在圆 C 上；

B. 点 A 在圆 C 上，点 B 在圆 C 内；

C. 点 A 在圆 C 外，点 B 在圆 C 内；

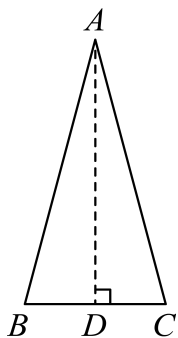
D. 点 A 、 B 都在圆 C 外.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形，点与圆的位置关系，等腰三角形的性质，掌握解直角三角形和会判断点与圆的位置关系是解决问题的关键. 由解直角三角形求出 $BD = 2$ ，由等腰三角形的性质求出 $BC = 4$ ，即可判断出点 B 和点 A 与 $\odot C$ 的位置关系，即可得出答案.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，如图所示：



$$\because AB = AC = 8, \cos \angle B = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BD = AB \times \cos B = 8 \times \frac{1}{4} = 2,$$

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore BC = 2BD = 4,$$

$$\because \odot C \text{ 的半径为 } 6,$$

$$\because 4 < 6 < 8,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 在圆 } C \text{ 外, 点 } B \text{ 在圆 } C \text{ 内;}$$

故选: C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 4 的平方根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【详解】解: $\because (\pm 2)^2 = 4,$

$\therefore 4$ 的平方根是 ± 2 .

故答案为 ± 2 .

8. 计算: $(a+1)(a-2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $a^2 - a - 2$

【解析】

【分析】 本题考查的是多项式乘多项式的运算法则. 第一个整式的每一项与另一个整式的每一项相乘再相加即可. 熟练掌握多项式乘多项式的运算是解决此题的关键.

【详解】解: $(a+1)(a-2) = a^2 - 2a + a - 2 = a^2 - a - 2$

故答案为: $a^2 - a - 2$.

9. 随着某产品制造技术的不断发展, 某地区用于这个技术开发的资金约为 5200000000 元, 这个数字用科学记数法表示为_____.

【答案】 5.2×10^9

【解析】

【分析】 本题考查了科学记数法 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) 的表示方法, 解题的关键是正确表示 a 和 n 的值. 由科学记数法的表示方法, 表示出 a 和 n 的值, 得到答案.

【详解】 $5200000000 = 5.2 \times 10^9$

10. 不等式 $x - 3 > 1$ 的最小整数解是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一元一次不等式的整数解. 求出不等式的解集, 即可求解.

【详解】 解: $x - 3 > 1$,

解得: $x > 4$,

$\therefore$ 不等式 $x - 3 > 1$ 的最小整数解是 5.

故答案为: 5

11. 用换元法解方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 2$ 时, 如果设 $\frac{x}{x-1} = y$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 此题主要考查了换元法解分式方程, 设 $\frac{x}{x-1} = y$, 则方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 2$ 可转化为: $y + \frac{1}{y} = 2$,

然后再去分母, 将该分式方程转化为整式方程即可.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x-1} = y$,

则方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = 2$ 可转化为: $y + \frac{1}{y} = 2$,

去分母, 方程两边同时乘以 y 得: $y^2 - 2y + 1 = 0$,

故答案为: $y^2 - 2y + 1 = 0$.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(-2, -3)$ ，则 k 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 直接将点坐标 $(-2, -3)$ 直接代入 $y = \frac{k}{x}$ ，即可求得 k 值.

【详解】 解：将 $(-2, -3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得： $-3 = \frac{k}{-2}$ ，

解得： $k = 6$

故答案为： 6.

【点睛】 本题考查了反比例函数的图象与性质，掌握其基础性质是解题的关键.

13. 某校田径运动队共有 20 名男运动员，小杰收集了这些运动员的鞋号信息（见表），

鞋号	23 号	23.5 号	24 号	24.5 号	25 号	25.5 号
人数	1	2	4	4	6	3

那么这 20 名男运动员鞋号的中位数是_____.

【答案】 24.5 号

【解析】

【分析】 本题考查了中位数的知识，根据中位数的概念求解，解题的关键是正确理解将一组数据按照从小到大或从大到小的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

【详解】 解： $\because$ 这组数据从小到大的顺序排列后，处于中间位置的第 10、11 个数的平均数为

$$\frac{24.5 + 24.5}{2} = 24.5,$$

$\therefore$ 由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 24.5 号，

故答案为： 24.5 号.

14. 在不透明的盒子中装有六张形状相同的卡片，这六张卡片分别印有正方形、平行四边形、等边三角形、直角梯形、正六边形、圆等六种图形，如果从这透明的盒子里随机抽出一张卡片，那么所抽到的这张卡片上的图形恰好为中心对称图形的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

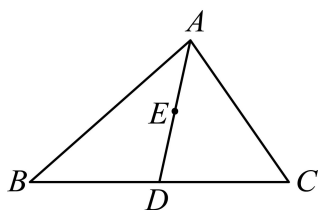
【分析】本题主要考查中心对称图形的概念和概率的计算. 在平面内如果将一个图形绕着某一个点旋转 180° 后能够与自身重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形. 概率=所求情况数 $\div$ 总情况数. 根据题意先找出这六种图形当中中心对称图形的个数, 然后利用概率的计算公式进行计算即可. 熟练掌握中心对称图形的概念和概率的计算公式是解题的关键.

【详解】解: 正方形、平行四边形、等边三角形、直角梯形、正六边形、圆这六种图形中, 中心对称图形有正方形、平行四边形、正六边形和圆, 因此随机抽出一张卡片, 所抽到卡片恰为中心对称图形的概率是

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 线段 AD 是边 BC 上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 设向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AE}$ =____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的知识点, 运用三角形法则是解题的关键.

先用 $\vec{a}, \vec{b}$ 的线性组合表示 $\overrightarrow{AD}$, 再表示 $\overrightarrow{AE}$ 即可.

【详解】解: $\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, 线段 AD 是边 BC 上的中线,

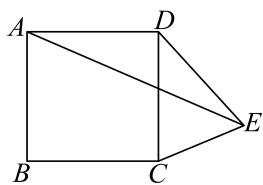
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

16. 如图在正方形 $ABCD$ 的外侧作一个 $\triangle CDE$, 已知 $DC = DE$, $\angle DCE = 70^\circ$, 那么 $\angle AED$ 等于_____.



【答案】 25° ##25 度

【解析】

【分析】 先根据“等边对等角”得 $\angle DEC = \angle DCE = 70^\circ$ ，由此得 $\angle CDE = 40^\circ$ ，由正方形的性质可得 $\angle ADC = 90^\circ$ ， $DA = DC$ ，由此得 $\angle ADE = 130^\circ$ ， $DA = DE$ ，进而可得 $\angle AED = 25^\circ$ 。

本题主要考查了等腰三角形的判定和性质、正方形的性质和三角形的内角和定理，熟练掌握以上知识是解题的关键。

【详解】 $\because \triangle CDE$ 中， $DC = DE$ ， $\angle DCE = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle DEC = \angle DCE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ,$$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

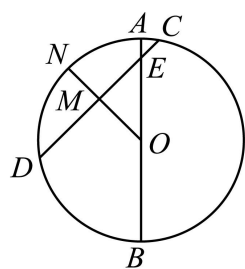
$$\therefore \angle ADC = 90^\circ, DA = DC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ, \text{ 且 } DA = DE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ,$$

故答案为： 25° 。

17. 如图在圆 O 中， AB 是直径，弦 CD 与 AB 交于点 E ，如果 $AE = 1$ ， $EB = 9$ ， $\angle AEC = 45^\circ$ ，点 M 是 CD 的中点，连接 OM ，并延长 OM 与圆 O 交于点 N ，那么 $MN = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



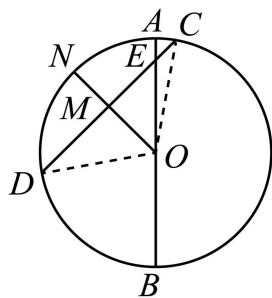
【答案】 $5 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了垂径定理、勾股定理，熟记垂径定理、勾股定理是解题的关键。

连接 OC ， OD ，根据点 M 是 CD 的中点，证 $\triangle ODM \cong \triangle OEM$ ，得 $\triangle OMC$ 为直角三角形，根据已知条件求出半径，进而求得 OE ，根据 $\angle AEC = 45^\circ$ ，利用勾股定理求出 OM ，即可得到 MN 。

【详解】



∵ 点 M 是 CD 的中点,

$$\therefore DM = CM,$$

在 $\triangle ODM$ 和 $\triangle OCM$ 中,

$$\begin{cases} OD = OE \\ OM = OM, \\ DM = CM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ODM \cong \triangle OEM,$$

$$\therefore \angle OMD = \angle OME = 90^\circ,$$

∵ $AE = 1$, $EB = 9$, AB 是直径,

$$\therefore AB = 10,$$

$$\therefore OD = OA = ON = 5,$$

$$OE = OA - AE = 4$$

在 $\text{Rt}\triangle OMC$ 中, $\angle AEC = 45^\circ$,

$$\therefore OM = EM,$$

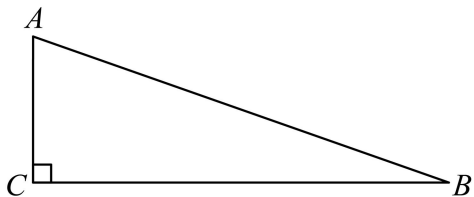
$$OM^2 + ME^2 = OE^2,$$

$$OM = \sqrt{\frac{16}{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore MN = AN - OM = 5 - 2\sqrt{2},$$

故答案为: $5 - 2\sqrt{2}$.

18. 定义: 如果三角形有两个内角的差为 90° , 那么这样的三角形叫做准直角三角形. 已知在直角 $\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $AB = 12$, 如图 4, 如果点 D 在边 BC 上, 且 $\triangle ADB$ 是准直角三角形, 那么 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$.

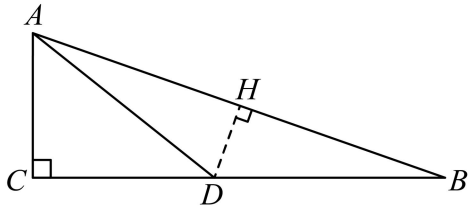


【答案】 $\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，勾股定理，利用分类讨论思想解决问题是本题的关键. 分两种情况讨论，由相似三角形的性质和锐角三角函数可求解

【详解】 当 $\angle ADB - \angle DAB = 90^\circ$ 时，如图，过点 D 作 $DH \perp BA$ 于 H ,



在 $\text{Rt}\triangle BAC$ 中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $AB = 12$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2},$$

$$\because \angle ADB - \angle DAB = 90^\circ, \quad \angle ADB = \angle DBC + \angle C = \angle DBC + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DBC,$$

又 $\because DH \perp BA, \quad DC \perp AC$,

$$\therefore DH = DC,$$

$$\because \sin B = \frac{DH}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DH = \frac{1}{3}BD = DC,$$

$$\therefore DC = \frac{1}{4}BC = 2\sqrt{2},$$

当 $\angle ADB - \angle B = 90^\circ$ 时，

$$\because \angle ADB - \angle B = 90^\circ, \quad \angle ADB = \angle DAC + \angle C = \angle DAC + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DAC,$$

又 $\because \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore \frac{4}{8\sqrt{2}} = \frac{CD}{4},$$

$$\therefore CD = \sqrt{2},$$

综上所述: $CD = 2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$;

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算： $\sqrt{12} - \frac{2}{\sqrt{2}-1} + |2-\sqrt{3}| + 8^{\frac{1}{2}}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是实数的运算，根据二次根式的化简，分数指数幂的运算，绝对值的性质即可求解.

【详解】 解： $\sqrt{12} - \frac{2}{\sqrt{2}-1} + |2-\sqrt{3}| + 8^{\frac{1}{2}}$
 $= 2\sqrt{3} - 2(\sqrt{2}+1) + 2-\sqrt{3} + \sqrt{8}$
 $= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$
 $= \sqrt{3}$

20. 解方程组： $\begin{cases} x+2y=8 \\ x^2-xy-12y^2=0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 24 \\ y_2 = -8 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组，熟练掌握和运用解二元二次方程组的方法是解决本题的关键.
首先把第二个方程分解因式，得到两个二元一次方程，再组合成二个二元一次方程组，分别解方程组即可.

【详解】 解： $\begin{cases} x+2y=8 \text{①} \\ x^2-xy-12y^2=0 \text{②} \end{cases}$

由②得： $(x-4y)(x+3y)=0$

$x-4y=0$ 或 $x+3y=0$

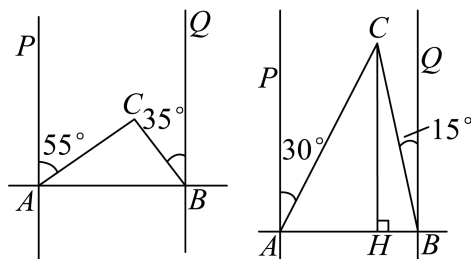
所以原方程组可化为两个二元一次方程组：

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x-4y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=8 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 24 \\ y_2 = -8 \end{cases}$$

21. 某东西方向的海岸线上有 A、B 两个码头，这两个码头相距 60 千米 ($AB = 60$)，有一艘船 C 在这两个码头附近航行.



(1) 当船 C 航行了某一刻时，由码头 A 测得船 C 在北偏东 55° ，由码头 B 测得船 C 在北偏西 35° ，如图，求码头 A 与 C 船的距离 (AC 的长)，其结果保留 3 位有效数字；

(参考数据： $\sin 35^\circ \approx 0.5736$ ， $\cos 35^\circ \approx 0.8192$ ， $\tan 35^\circ \approx 0.7002$ ， $\cot 35^\circ \approx 1.428$)

(2) 当船 C 继续航行了一段时间时，由码头 A 测得船 C 在北偏东 30° ，由码头 B 测得船 C 在北偏西 15° ，船 C 到海岸线 AB 的距离是 CH (即 $CH \perp AB$)，如图，求 CH 的长，其结果保留根号.

【答案】 (1) 码头 A 与 C 船的距离为 49.2 千米

(2) 船 C 到海岸线 AB 的距离 CH 为 $(15\sqrt{3} + 45)$ 千米

【解析】

【分析】 本题考查了三角函数的应用，解题的关键是掌握三角形函数的定义.

(1) 根据题意可得 $\angle CAB = 35^\circ$ ， $\angle CBA = 55^\circ$ ，进而得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，根据三角函数即可求解；

(2) 过点 B 作 $BG \perp AC$ ，垂足为 G，根据题意可得 $\angle CAB = 60^\circ$ ， $\angle CBA = 75^\circ$ ，进而得到 $\angle ACB = 45^\circ$ ，根据 $\sin \angle GAB = \frac{GB}{AB}$ ，求出 GB，推出 $GC = 30\sqrt{3}$ ，从而求出 $AC = 30 + 30\sqrt{3}$ ，最后根据 $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC}$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle PAC = 55^\circ$ ，

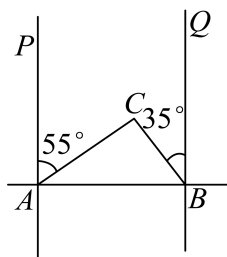
$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle PAC = 35^\circ$ ，

$\because \angle QBC = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle CBA = 90^\circ - \angle QBC = 55^\circ$ ，

又： $\angle CAB + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$



在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\cos \angle CAB = \frac{AC}{AB}$

又 $\cos 35^\circ \approx 0.8192$, $AB = 60$ 千米,

$$\therefore AC = AB \cdot \cos \angle CAB = 60 \times \cos 35^\circ \approx 60 \times 0.8192 = 49.152 \text{ (千米)},$$

$$\therefore AC \approx 49.2 \text{ 千米}$$

答: 码头 A 与 C 船的距离为 49.2 千米;

【小问 2 详解】

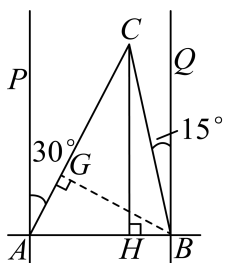
$$\because \angle PAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\because \angle QBC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CBA = 75^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CAB + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ,$$



$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

过点 B 作 $BG \perp AC$, 垂足为 G,

在 $\text{Rt}\triangle AGB$ 中, $\sin \angle GAB = \frac{GB}{AB}$, $\cos \angle GAB = \frac{AG}{AB}$,

$$\therefore GB = 60 \cdot \sin 60^\circ = 30\sqrt{3} \text{ (千米)}, \quad AG = 60 \cdot \cos 60^\circ = 30 \text{ (千米)},$$

在 $\text{Rt}\triangle CGB$ 中,

$$\therefore GC = \frac{GB}{\tan \angle GCB} = 30\sqrt{3} \text{ (千米)},$$

$$\therefore AC = AG + GC = 30 + 30\sqrt{3} \text{ (千米)},$$

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中, $\sin \angle CAH = \frac{CH}{AC}$,

$$\therefore CH = AC \cdot \sin \angle CAH = 15\sqrt{3} + 45 \text{ (千米)},$$

答: 船 C 到海岸线 AB 的距离 CH 为 $(15\sqrt{3} + 45)$ 千米.

22. 某企业在 2022 年 1 至 3 月的利润情况见表.

月份数 (x)	1	2	3
利润数 (y) (万元)	96	?	100

(1) 如果这个企业在 2022 年 1 至 3 月的利润数 y 是月份数 x 的一次函数, 求 2 月份的利润;

(2) 这个企业从 3 月份起, 通过技术改革, 经过两个月后的 5 月份获得利润为 121 万元, 如果这个企业 3 月至 5 月中每月利润数的增长率相等, 求这个企业 3 月至 5 月中利润数的月平均增长率.

【答案】 (1) 2 月份的利润为 98 万元

(2) 这个企业利润数的月平均增长率为 10%

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的应用, 一元二次方程的应用, 解题的关键是利用待定系数法求出一函数解析式, 根据等量关系, 列出方程.

(1) 利用待定系数法求出一函数解析式, 然后将 $x = 2$ 代入求值即可;

(2) 设这个企业利润数的月平均增长率为 x . 根据经过两个月后的 5 月份获得利润为 121 万元, 列出方程, 求出结果即可.

【小问 1 详解】

解: 根据题意设利润数 y 与月份数 x 一次函数关系式为 $y = kx + b$, 根据题意得:

$$\begin{cases} k + b = 96 \\ 3k + b = 100 \end{cases},$$

解此方程组得: $\begin{cases} k = 2 \\ b = 94 \end{cases}$,

$\therefore$ 利润数 y 与月份数 x 一次函数关系式为: $y = 2x + 94$,

当 $x = 2$ 时, $y = 98$,

答: 2 月份的利润为 98 万元;

【小问 2 详解】

解：设这个企业利润数的月平均增长率为 x ，根据题意得：

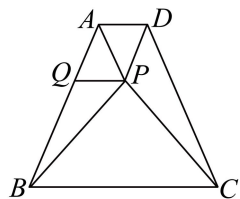
$$100(1+x)^2 = 121,$$

解得 $x_1 = 0.1$, $x_2 = -2.1$ (不合题意, 舍去),

$\therefore x = 10\%$.

答：这个企业利润数的月平均增长率为 10% 。

23. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，点 P 在四边形 $ABCD$ 内部， $PB = PC$ ，连接 PA 、 PD 。



(1) 求证： $\triangle APD$ 是等腰三角形；

(2) 已知点 Q 在 AB 上，连接 PQ ，如果 $AP \parallel CD$ ， $AQ = AP$ ，求证：四边形 $AQPD$ 是平行四边形。

【答案】(1) 证明见详解

(2) 证明见详解

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定与性质，等腰三角形的判定，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定，平行线的性质，熟练掌握知识点是解题的关键。

(1) 先证明梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，再 $\triangle ABP \cong \triangle DCP$ ，即可证明；

(2) 先证明 $PD \parallel AQ$ ，再证明 $PD = AQ$ ，即可证明。

【小问 1 详解】

证明 $\because AD \parallel BC$ ， $AB = DC$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$

$\because PB = PC$

$\therefore \angle PBC = \angle PCB$

$\therefore \angle ABP = \angle DCP$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle DCP (SAS)$

$\therefore AP = PD$

即 $\triangle APD$ 是等腰三角形；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 得 $PA = PD$

$$\therefore \angle PAD = \angle PDA$$

$$\therefore AP \parallel CD$$

$$\therefore \angle PAD + \angle CDA = 180^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形

$$\therefore \angle BAD = \angle CDA$$

$$\therefore \angle PDA + \angle BAD = 180^\circ$$

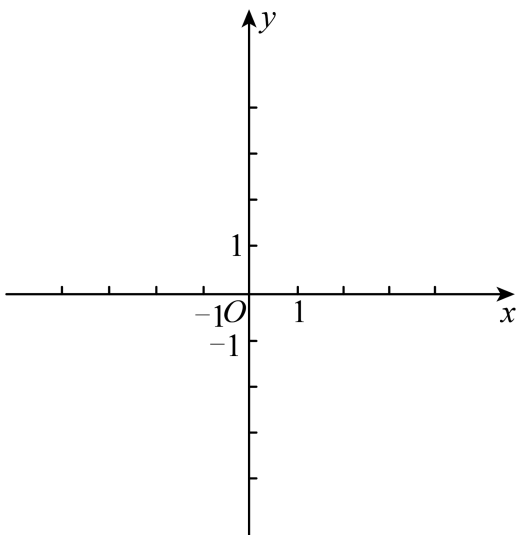
$$\therefore PD \parallel AQ$$

$$\therefore AQ = AP, \quad AP = PD$$

$$\therefore PD = AQ$$

$\therefore$ 四边形 $AQPD$ 是平行四边形.

24. 在平面直角坐标系 xOy (如图) 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(1, 0)$ 、 $B(-2, 3)$ 两点, 与 y 轴的交点为 C 点, 对称轴为直线 l .



(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 已知以点 C 为圆心, 半径为 CB 的圆记作圆 C , 以点 A 为圆心的圆记作圆 A , 如果圆 A 与圆 C 外切, 试判断对称轴直线 l 与圆 A 的位置关系, 请说明理由;

(3) 已知点 D 在 y 轴的正半轴上, 且在点 C 的上方, 如果 $\angle BDC = \angle BAC$, 请求出点 D 的坐标.

【答案】(1) 此抛物线的表达式是 $y = -x^2 - 2x + 3$

(2) 对称轴直线 l 与圆 A 的位置是相离, 理由见详解

(3) 点 D 的坐标为 $(0,7)$

【解析】

【分析】(1) 直接用待定系数法求解即可；

(2) 设圆 A 的半径为 r ，又圆 A 与圆 C 外切，所以 $r+2=AC$ ，得到 $2>\sqrt{10}-2$ ，即 $AM>r$ ，即可判断；

(3) 过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，过点 B 作 $BG \perp x$ 轴，垂足为 G ，利用等角的正切值相等解决问题， $\tan \angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\tan \angle BDC = \frac{CB}{CD} = \frac{1}{2}$ ， $CB=2$ ，所以 $CD=4$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(1,0)$ 、 $B(-2,3)$ 两点

$$\therefore \begin{cases} a+b+3=0 \\ 4a-2b+3=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$$

∴ 此抛物线的表达式是 $y = -x^2 - 2x + 3$ ；

【小问 2 详解】

答：对称轴直线 l 与圆 A 的位置是相离

根据 (1) 得，抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 的对称轴 l 是直线 $x = -1$ ，

抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 y 轴的交点 C 点坐标为 $(0,3)$ ，

所以 $CB = 2$ ，

所以圆 C 的半径是 2，

设圆 A 的半径为 r ，又圆 A 与圆 C 外切，所以 $r+2=AC$ ，

又 $AC = \sqrt{10}$ ，

所以 $r = \sqrt{10} - 2$ ，

对称轴 l 与 x 轴垂直，设垂足为 M ，那么 AM 的长就是圆 A 到对称轴 l 的距离，

又对称轴 l 是直线 $x = -1$ ，

所以点 M 的坐标为 $(-1,0)$ ，

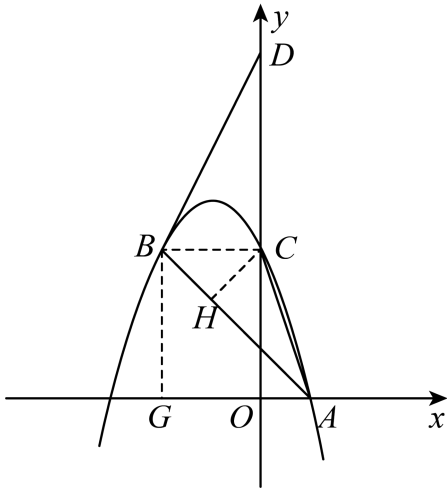
所以 $AM = 2$ ，

因为 $2 > \sqrt{10} - 2$ ，即 $AM > r$ ，

所以对称轴直线 l 与圆 A 的位置是相离.

【小问3详解】

解：过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，过点 B 作 $BG \perp x$ 轴，垂足为 G ，



易得 $BG = AG = 3$ ， $AB = 3\sqrt{2}$ ， $\angle GBA = \angle GAB = 45^\circ$ ，

又 C 点坐标为 $(0, 3)$ ， B 点坐标为 $(-2, 3)$ ，

所以 $BC \perp y$ 轴，

所以 $\angle CBH = \angle BCH = 45^\circ$ ， $CB = 2$ ，由勾股定理得 $BH = CH = \sqrt{2}$ ，

所以 $AH = AB - BH = 2\sqrt{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中， $\tan \angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD}$ ，

因为 $\angle BDC = \angle BAC$ ，

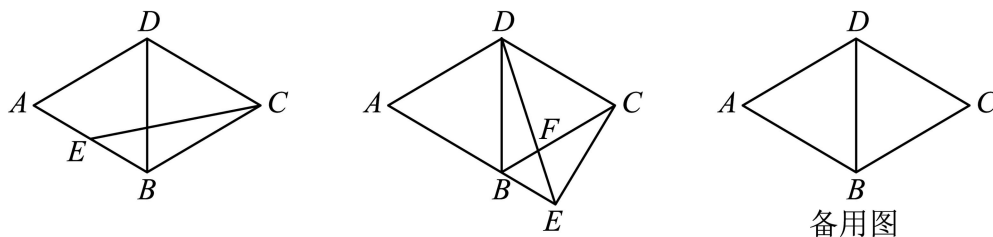
所以 $\tan \angle BDC = \frac{CB}{CD} = \frac{2}{CD} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $CD = 4$ ，

所以点 D 的坐标为 $(0, 7)$ 。

【点睛】本题是二次函数与几何综合题，考查了待定系数法求解析式，圆与圆的位置关系，直线与圆的位置关系，二次函数与角度的存在性问题，熟练掌握知识点是解题的关键。

25. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ，点 E 在射线 AB 上，连接 CE 、 BD 。



- (1) 如图, 当点 E 是边 AB 的中点, 求 $\angle ECD$ 的正切值;
- (2) 如图, 当点 E 在线段 AB 的延长线上, 连接 DE 与边 BC 交于点 F , 如果 $AD = 6$, $\triangle EFC$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$, 求 EF 的长;
- (3) 当点 E 在边 AB 上, CE 与 BD 交于点 H , 连接 DE 并延长 DE 与 CB 的延长线交于点 G , 如果 $AD = 6$, BCH 与以点 E 、 G 、 B 所组成的三角形相似, 求 AE 的长.

【答案】(1) $\angle ECD$ 的正切值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $EF = \sqrt{7}$

(3) $AE = 9 - 3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 如图, 连接 DE , 根据菱形的性质, 结合已知判定 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 证明 $\angle AED = \angle CDE = 90^\circ$, 后利用正切函数计算即可;

(2) 取 AB 的中点 M , 连接 DM , 结合(1)的解答, 利用平行线的性质, 三角形面积的性质, 三角形相似的判定和性质, 勾股定理计算即可;

(3) 过 E 作 $EN \perp CG$ 点, 垂足为 N , 判定相似三角形的对应关系, 结合等腰三角形的判定和性质, 列出方程解答即可.

【小问 1 详解】

解: 连接 DE ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore DC \parallel AB, DA = AB = DC,$$

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$\therefore$ 点 E 是边 AB 的中点,

$$\therefore AE = EB = \frac{1}{2}AB, DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

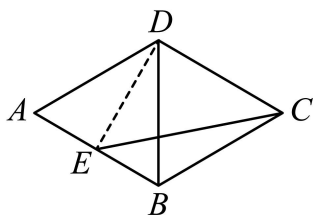
又 $DC \parallel AB$,

$$\therefore \angle AED = \angle CDE = 90^\circ,$$

设 $AE = x$,

$$\therefore AD = CD = 2x, \quad DE = \sqrt{3}x,$$

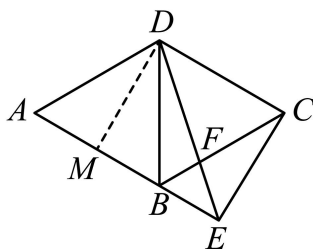
$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } \tan \angle ECD = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



$$\therefore \angle ECD \text{ 的正切值是 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【小问 2 详解】

解：取 AB 的中点 M ，连接 DM ，



由 (1) 可知： $DM \perp AB$ ， $AM = MB = \frac{1}{2} AB$ ，

$$\therefore AD = 6,$$

$$\therefore CD = AB = 6,$$

$$\therefore AM = BM = 3$$

由勾股定理得： $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = 3\sqrt{3}$ ，

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} CD \times DM = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle EFC \text{ 的面积等于 } 3\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} : S_{\triangle EFC} = 3$$

$\therefore \triangle DEC$ 与 $\triangle EFC$ 是同高的，设这个高为 h

$$S_{\triangle DEC} : S_{\triangle EFC} = \left(\frac{1}{2} DE \times h \right) : \left(\frac{1}{2} EF \times h \right) = DE : EF = 3,$$

$$\therefore DF = 2EF,$$

$$\because AE \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BE = 3,$$

$$\therefore ME = 6$$

在 $\text{Rt}\triangle DME$ 中, $DE^2 = DM^2 + ME^2$,

$$\therefore DE = 3\sqrt{7},$$

$$\therefore EF = \sqrt{7}.$$

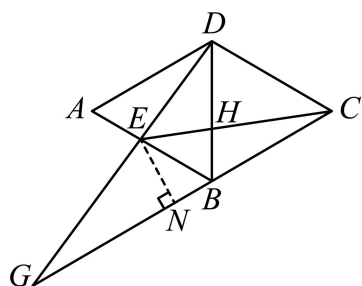
【小问 3 详解】

过 E 作 $EN \perp CG$ 点, 垂足为 N

由 (1) 得: $\triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel CB,$$



$$\therefore \angle ABG = \angle A = 60^\circ, \quad \angle DBC = \angle ADB = 60^\circ = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle EBG = \angle HBC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle GEB = \angle BDE + \angle ABD > 60^\circ, \angle HCB < \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GEB \neq \angle HCB,$$

$\therefore \triangle BCH$ 与以点 E 、 G 、 B 组成的三角形相似

$\therefore$ 点 C 只能与点 G 对应,

$$\therefore \angle G = \angle BCG,$$

$$\therefore EG = EC,$$

$$\therefore GN = CN,$$

设 $AE = x$, 则 $BE = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle BEN$ 中, $\cos \angle EBN = \frac{BN}{BE},$

$$\therefore BN = \frac{6-x}{2},$$

$$\because BC = AD = 6,$$

$$\therefore BG = 12 - x$$

$$\because AD \parallel CB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BG} = \frac{AE}{BE},$$

$$\therefore \frac{6}{12-x} = \frac{x}{6-x},$$

$$\text{解得: } x_1 = 9 - 3\sqrt{5}, \quad x_2 = 9 + 3\sqrt{5} \quad (\text{舍去},$$

$$\therefore AE = 9 - 3\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质，等边三角形的判定和性质，三角形相似的判定和性质，正切函数，勾股定理，解方程，熟练掌握正切函数，三角形相似，勾股定理是解题的关键.