

九年级期终考试数学试卷

(满分：150 分，考试时间：100 分钟)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题.
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) 下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 已知线段 $a = 2\text{cm}$ ， $b = 3\text{cm}$ ，如果线段 c 是线段 a 和 b 的比例中项，那么线段 c 的长为 ()

- A. 6cm B. $\sqrt{6}\text{cm}$ C. $-\sqrt{6}\text{cm}$ D. $\pm\sqrt{6}\text{cm}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据比例中项的定义，成比例线段，构建方程即可解决问题.

本题考查比例中项的定义，解题的关键是熟练掌握基本知识，利用成比例线段性质列出等式，属于中考常考题型.

【详解】解：解： $\because$ 线段 c 是线段 a 和 b 的比例中项，

$$\therefore c^2 = ab,$$

$$\because a = 2\text{cm}, b = 3\text{cm}, c > 0,$$

$$\therefore c = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}\text{cm},$$

故选：B.

2. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，那么下列等式中成立的是 ()

- A. $2a = 3b$ B. $\frac{a+1}{b+1} = \frac{3}{4}$ C. $\frac{a+b}{b} = \frac{5}{3}$ D. $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{3}$.

【答案】C

【解析】

【分析】比例的性质为两内项之积等于两外项之积，据此可进行解答.

【详解】解：∵ $a:b=2:3$ 的两内项是 $b、2$ ，两外项是 $a、3$ ，

$$\therefore 3a=2b,$$

A: 由以上解释易知 A 选项错误，不符题意；

B: $(a+1)\times 3=(b+1)\times 4$ ，即 $3a=4b+1$ ，故错误，不符题意；

C: $3\times(a+b)=5b$ ，即 $3a=2b$ ，故正确，符合题意；

D: $3(a-b)=b$ ，即 $3a=4b$ ，故错误，不符题意；

故选 C.

【点睛】本题考查了比例的基本性质，掌握基本性质是解题关键.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $\cos A=\frac{3}{4}$ ，那么 $\sin B$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

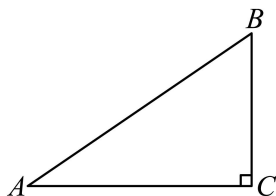
【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了解直角三角形，关键是熟练锐角三角函数的定义. 画出图形，表示出 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}$ ，

再根据 $\sin B$ 的定义求解即可

【详解】解：如图所示， $\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}$ ，



$$\text{则 } \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

故选 A.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，点 $D、E$ 分别在边 $AB、AC$ 上，如果 $AD=1$ ， $BD=3$ ，那么下列条件中能够推得 $DE \parallel BC$ 的是 ()

A. $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{3}$

B. $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{4}$

C. $\frac{EC}{AC}=\frac{2}{3}$

D. $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$

【答案】D

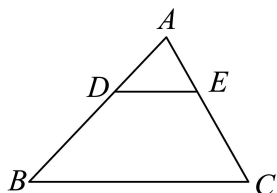
【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定与性质，平行线的判定等知识点，熟练掌握相似三角形的判定

与性质是解题的关键.

根据“两边成比例且夹角相等的两个三角形相似”可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，于是可得 $\angle ADE = \angle B$ ，进而可得 $DE \parallel BC$ ，于是得解.

【详解】解：如图，



$$\because AD = 1, \quad BD = 3,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \text{ 时, } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\text{又 } \because \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

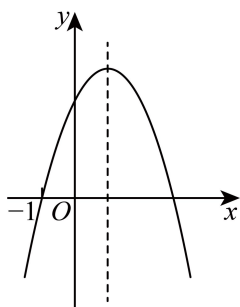
$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

而根据选项 A、B、C 的条件都不能推出 $DE \parallel BC$ ，

故选：D.

5. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示，那么下列各式中，不成立的是 ()



A. $a < 0$

B. $b < 0$

C. $c > 0$

D. $a - b + c = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象与系数的关系. 根据对称轴和函数图像判断 a 、 b 、 c 的符号是解题的关键.

由抛物线的开口方向判断 a 的大小，由抛物线与 y 轴的交点判断 c 的大小，根据对称轴与 x 轴交点情况、抛

物线与 x 轴交点情况进行推理, 进而对所得结论进行判断.

【详解】解: A. $\because$ 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$\therefore$ A 成立, 不符合题意;

$$\text{B. } \because \text{抛物线的对称轴, } -\frac{b}{2a} > 0, \quad a < 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

$\therefore$ B 不成立, 符合题意;

C. $\because$ 抛物线交 y 轴正半轴,

$$\therefore c > 0,$$

$\therefore$ C 成立, 不符合题意;

D. $\because$ 抛物线过 $(-1, 0)$,

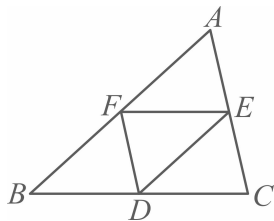
$$\therefore a - b + c = 0,$$

$\therefore$ D 成立, 不符合题意.

故选: B.

6. 某学习小组研究问题“如图, 已知 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 、 CA 、 AB 的中点, 求证:

$\triangle DEF \sim \triangle ABC$.” 经过小组讨论得到以下方法, 其中存在错误的是 ()



A. 可证 $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{AC}$, 进而证得 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

B. 可证 $\angle B = \angle FED$, $\angle C = \angle EFD$, 进而证得 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

C. 可证 $\angle B = \angle FED$, $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{ED}$, 进而证得 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

D. 可证 $FBD \sim DEF$, $\triangle FBD \sim \triangle ABC$, 进而证得 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$

【答案】C

【解析】

【分析】由三角形中位线定理得到 $DE = \frac{1}{2}AB$, $EF = \frac{1}{2}BC$, $DF = \frac{1}{2}AC$, $DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 证明 $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{AC} = \frac{1}{2}$, 即可判断 A 选项正确; 证明四边形 $BDEF$, $CDFE$ 都是平行四边形, 则

$\angle B = \angle FED$, $\angle C = \angle EFD$, 即可判断 B 选项正确; 无法证明 $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{ED}$, 即可判断 C 选项错误; 证明

$FBD \cong DEF$, 则 $FBD \sim DEF$, 证明 $\triangle FBD \sim \triangle ABC$, 即可判断 D 选项正确.

【详解】 $\because D, E, F$ 分别是 ABC 的边 BC, CA, AB 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB, EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC, DE \parallel AB, EF \parallel BC, DF \parallel AC,$$

$$A. \because DE = \frac{1}{2}AB, EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{AC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$, 故选项正确, 不符合题意;

$$B. \because DE \parallel AB, EF \parallel BC, DF \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF, CDFE$ 都是平行四边形,

$$\therefore \angle B = \angle FED, \angle C = \angle EFD,$$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$, 故选项正确, 不符合题意;

$$C. \because DE \parallel AB, EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle B = \angle FED,$$

$$\text{无法证明 } \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{ED},$$

故无法证明证得 $\triangle DEF \sim \triangle ABC$;

$$D. \because DE \parallel AB, EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore BD = EF, BF = DE,$$

$$\because DF = DF,$$

$$\therefore FBD \cong DEF, \text{ 则 } FBD \sim DEF,$$

$$\because DF \parallel AC$$

$$\therefore \angle BDF = \angle BCA, \angle BFD = \angle BAC$$

$$\therefore \triangle FBD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC,$$

故选项正确, 不符合题意;

故选：C

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、三角形中位线定理、全等三角形的判定、平行四边形的判定和性质等知识，熟练掌握相似三角形的判定是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. $(\vec{a} + \vec{b}) + 3\left(\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2\vec{a} - 5\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的知识，熟练掌握以上知识是解题关键.

按照向量的线性运算计算即可.

【详解】 解： $(\vec{a} + \vec{b}) + 3\left(\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}\right)$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} - 6\vec{b}$$

$$= 2\vec{a} - 5\vec{b}$$

故答案为： $2\vec{a} - 5\vec{b}$.

8. 如果两个三角形是相似三角形，其中一个三角形的两个内角分别为 65° 和 80° ，那么另一个三角形中最小内角的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【答案】 35

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质，三角形的内角和定理，熟记以上知识点是解答本题的关键.

先根据三角形的内角和等于 180° 求出另一个角的度数，从而确定出最小的角的度数，再根据相似三角形对应角相等解答.

【详解】 解： $\because$ 三角形的两个内角分别为 65° 和 80° ，

$\therefore$ 第三个内角为 $180^\circ - 65^\circ - 80^\circ = 35^\circ$ ，

$\therefore$ 这个三角形的最小的内角的度数为 35° ，

$\because$ 两个三角形是相似三角形，

$\therefore$ 另一个三角形的最小内角的度数为 35° ，

故答案为： 35 .

9. 如果一个等腰三角形的三边长均扩大为原来的10倍, 那么这个等腰三角形底边上的高扩大为原来的_____倍.

【答案】10

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质. 熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

将一个三角形的三边扩大为原来的10倍, 新的三角形与原三角形相似, 相似比为: 10:1, 即可得解.

【详解】解: 由题意得: 新的三角形与原三角形相似, 相似比为: 10:1,

∴两个三角形的面积比为: 100:1, 边长之比为: 10:1,

∴高之比即为边长之比为: $\frac{100 \times 2}{10} : \frac{1 \times 2}{1} = 10:1$, 这个三角形的高扩大为原来的10倍,

故答案为: 10.

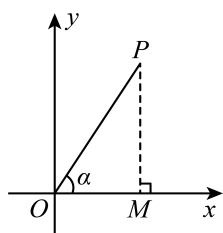
10. 在直角坐标平面内有一点 $P(3,1)$, 那么 OP 与 x 轴正半轴夹角的余弦值是_____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形、勾股定理等知识点. 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 构造直角三角形, 根据三角函数的定义求解.

【详解】解: 如图, 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , $P(3,1)$,



根据勾股定理可得 $OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

$$\therefore \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

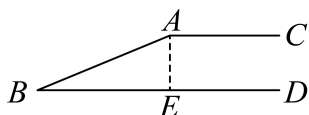
故答案为: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

11. 已知传送带与水平面所成斜坡的坡度 $i=1:2.4$, 如果它把物体送到离地面10米高的地方, 那么物体所经过的路程为_____米.

【答案】26

【解析】

【详解】解：如图，由题意得：斜坡 AB 的坡度： $i=1:2.4$ ， $AE=10$ 米， $AE \perp BD$ ，



$$\therefore i = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2.4},$$

$\therefore BE=24$ 米，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ABE$ 中， $AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=26$ （米）.

12. 某抛物线的最高点在 y 轴上，且与 x 轴有两个交点，这个抛物线的表达式可以是_____.

【答案】 $y=-x^2+1$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的解析式，掌握二次函数图象的顶点坐标公式，是解题的关键.

根据抛物线的最高点在 y 轴上，可知 $a < 0$ ， $b=0$ ，抛物线与 x 轴有两个交点，可知 $c \neq 0$ ，据此写出答案即可.

【详解】解： $\because$ 抛物线的最高点在 y 轴上，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 0, \quad a < 0, \quad b = 0,$$

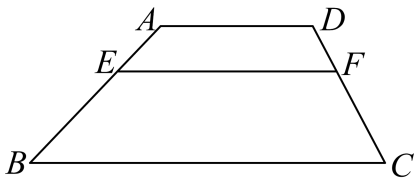
$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点，

$$\therefore c \neq 0,$$

$\therefore$ 这条抛物线的表达式可以是： $y=-x^2+1$.

故答案是： $y=-x^2+1$ （答案不唯一）

13. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是腰 AB 、 CD 上的点， $AD \parallel EF$ ，如果 $AD:EF:BC=2:3:5$ ，那么 $AE:AB=$ _____.



【答案】 $1:3$

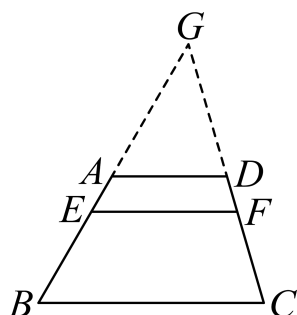
【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质，正确的作出辅助线构造相似三角形是解题的关键. 延长

BA, CD 交于 G , 证明 $\triangle GAD \sim \triangle GEF, \triangle GAD \sim \triangle GBC$, 则 $\frac{AG}{GE} = \frac{AD}{EF} = \frac{2}{3}, \frac{AG}{GB} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{5}$, 设

$AG = 2k, EG = 3k, BG = 5k$, 得到 $AE = k, BE = 5k - 3k = 2k$, 则 $AB = AE + BE = 3k$, 即可得到答案.

【详解】解: 延长 BA, CD 交于 G ,



$\therefore AD \parallel BC, AD \parallel EF$,

$\therefore AD \parallel EF \parallel BC$,

$\therefore \triangle GAD \sim \triangle GEF, \triangle GAD \sim \triangle GBC$,

$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{AD}{EF} = \frac{2}{3}, \frac{AG}{GB} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{5}$,

$\therefore$ 设 $AG = 2k, EG = 3k, BG = 5k$,

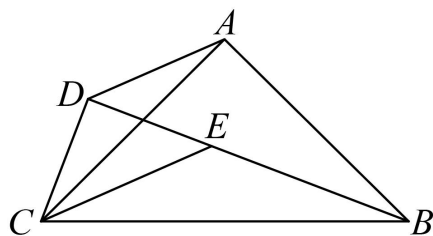
$\therefore AE = k, BE = 5k - 3k = 2k$,

$\therefore AB = AE + BE = 3k$

$\therefore AE : AB = 1 : 3$,

故答案为: $1 : 3$.

14. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 是 BD 上的点, $\angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$, $DC = DE$, $AB = AC$, 那么 $AD : BE =$ _____.



【答案】 $\sqrt{2} : 2$

【解析】

【分析】此题考查了等腰直角三角形的判定和性质、勾股定理、相似三角形的判定和性质等知识. 先证明

$\triangle CDE, \triangle ABC$ 都是等腰直角三角形, 得到 $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle ACD = \angle BCE$, 则 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$,

即可得到 $AD:BE = CD:CE = 1:\sqrt{2}$.

【详解】解: $\because \angle CDE = \angle CAB = 90^\circ$, $DC = DE$, $AB = AC$,

$\therefore \triangle CDE, \triangle ABC$ 都是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 45^\circ$, $CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{2}CD$, $BC = \sqrt{CA^2 + AB^2} = \sqrt{2}AC$,

$\therefore \angle DCE - \angle ACE = \angle ACB - \angle ACE$, $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

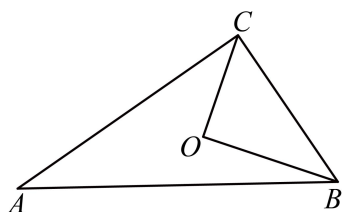
$\therefore \angle ACD = \angle BCE$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE$,

$\therefore AD:BE = CD:CE = 1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$

故答案为: $\sqrt{2}:2$

15. 如图, 已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心, $BO \perp CO$, $\tan \angle CBO = \frac{3}{4}$, 如果 $BO = 8$, 那么点 A, O 的距离为 _____.

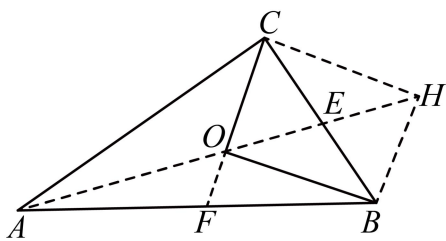


【答案】10

【解析】

【分析】此题主要考查了三角形的重心, 解直角三角形, 平行线分线段成比例. 连接 AO 并延长交 BC 于点 E , 在 AE 的延长线上取一点 H , 使 $EH = EO$, 连接 AH, BH , 延长 CO 交 AB 于点 F , 解 $\text{Rt}\triangle BOC$ 得 $OC = 6$, $BC = 10$, 证明四边形 $BHCO$ 是矩形得 $CF \parallel BH$, $OH = BC = 10$, 然后利用平行线分线段成比例求得 $AO = OH = 10$, 据此可得点 A, O 的距离.

【详解】解: 连接 AO 并延长交 BC 于点 E , 在 AE 的延长线上取一点 H , 使 $EH = EO$, 连接 AH, BH , 延长 CO 交 AB 于点 F , 如图所示:



$$\therefore BO \perp CO, \tan \angle CBO = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BOC \text{ 中, } \tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore OB = 8,$$

$$\therefore OC = \frac{3}{4}OB = 6,$$

$$\text{由勾股定理得: } BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AE, CF$ 都是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore BE = CE, AF = BF,$$

$$\text{又 } \therefore EH = EO,$$

$\therefore$ 四边形 $BHCO$ 是平行四边形,

$$\therefore BO \perp CO,$$

$\therefore$ 平行四边形 $BHCO$ 是矩形,

$$\therefore CF \parallel BH, OH = BC = 10,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AO}{HO},$$

$$\therefore AF = BF,$$

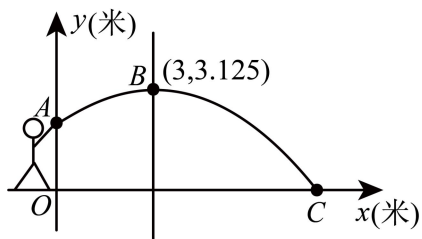
$$\therefore AO = OH = 10,$$

$\therefore$ 点 A, O 的距离为 10.

故答案为: 10.

16. 体育课上投掷实心球活动, 如图, 小明某次投掷实心球, 实心球出手后的运动过程中距离地面的高度 y

(米) 关于水平距离 x (米) 的函数解析式为 $y = -\frac{1}{8}x^2 + bx + c$, 当实心球运动到点 B 时达到最高点, 那么实心球的落地点 C 与出手点 A 的水平距离 OC 为_____米.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的实际应用，待定系数法求二次函数，二次函数与 x 轴交点问题，熟练掌握二次函数的顶点式和二次函数与 x 轴交点求法是解题的关键。先利用顶点 $B(3, 3.125)$ 结合顶点式得出

$y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 3.125 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ ，再令 $y = 0$ ，即可求解。

【详解】 解： $\because$ 当实心球运动到点 $B(3, 3.125)$ 时达到最高点，且抛物线函数解析式为 $y = -\frac{1}{8}x^2 + bx + c$ ，

$\therefore$ 抛物线函数解析式为 $y = -\frac{1}{8}(x-3)^2 + 3.125 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2$ ，

令 $y = 0$ ，得 $-\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + 2 = 0$ ，

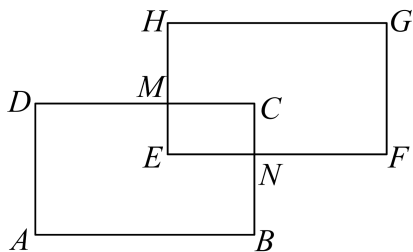
解得： $x_1 = 8$ ， $x_2 = -2$ ，

$\therefore C(8, 0)$ ，

$\therefore$ 实心球的落地点 C 与出手点 A 的水平距离 OC 为 8 米，

故答案为： 8。

17. 如图，将矩形 $ABCD$ 平移到矩形 $EFGH$ 的位置（点 A 对应点 E ，点 B 对应点 F ，点 C 对应点 G ），边 EH 与 CD 交于点 M ，边 EF 与 BC 交于点 N ，其中 $DM:MC = 3:2$ ， $BN:CN = 3:2$ ，如果 M 、 N 两点的距离为 a ，那么 A 、 E 两点的距离为_____。（用含 a 的代数式表示）



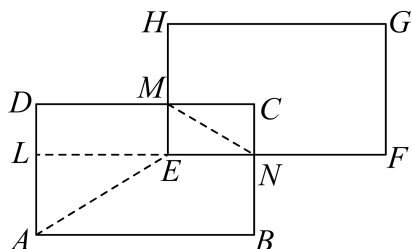
【答案】 $\frac{3}{2}a$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，平移的性质，解题的关键是正确作出

辅助线. 延长 EF 交 AD 于点 L , 连接 AE 、 MN , 则 $MN = a$, 可证明四边形 $LDME$ 和四边形 $ABNL$ 都是矩形, 则 $DM = EL$, $BN = AL$, 由 $DM:MC = 3:2$, $BN:CN = 3:2$, 可得 $EL:MC = 3:2$, $LA:CN = 3:2$, 推出 $\triangle ALE \sim \triangle NCM$, 得到 $\frac{AE}{MN} = \frac{LA}{CN} = \frac{3}{2}$, 即可求解.

【详解】解: 延长 EF 交 AD 于点 L , 连接 AE 、 MN , 则 $MN = a$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle D = \angle DAB = \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MEL = 90^\circ,$$

由平移得: $\angle HEF = \angle DAB = 90^\circ$, $EH \parallel AD$, $EF \parallel AB$,

$$\therefore \angle ELD = \angle DAB = 90^\circ, \angle ALN = \angle D = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $LDME$ 和四边形 $ABNL$ 都是矩形,

$$\therefore DM = EL, BN = AL,$$

$$\because DM:MC = 3:2, BN:CN = 3:2,$$

$$\therefore EL:MC = 3:2, LA:CN = 3:2,$$

$$\therefore \frac{EL}{MC} = \frac{LA}{CN} = \frac{3}{2},$$

$$\because \angle ALE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ALE \sim \triangle NCM,$$

$$\therefore \frac{AE}{MN} = \frac{LA}{CN} = \frac{3}{2},$$

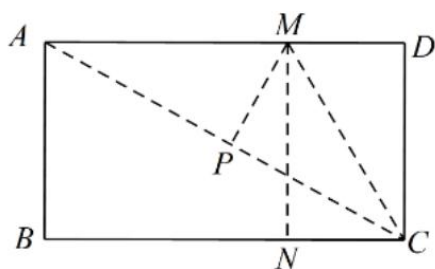
$$\therefore AE = \frac{3}{2}MN = \frac{3}{2}a,$$

$$\therefore A、E \text{ 两点的距离为 } \frac{3}{2}a,$$

故答案为: $\frac{3}{2}a$.

18. 将一张矩形纸片进行如图所示的操作: ①沿对角线 AC 折叠, 得到折痕 AC ; ②折叠纸片使边 CD 落在折痕 AC 上, 点 D 落在点 P 处, 得到折痕 CM ; ③过点 M 折叠纸片, 使点 D 、 C 分别落在边 AD 、 BC

上，展开得到折痕 MN ．如果矩形 $MDCN$ 是一个黄金矩形，其中 $\frac{MD}{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，那么这张矩形纸片的两条邻边 $AB:BC =$ _____.



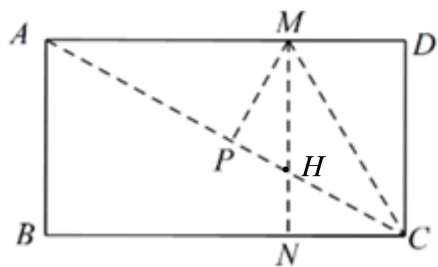
【答案】 1:2

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质，翻折变换，黄金分割，相似三角形的判定和性质，设 MN 与 AC 交于点 H ，由矩形的性质可得 $\angle MNC = 90^\circ$ ， $MN \parallel DC$ ， $MD = NC$ ， $MN = DC$ ，则 $\angle MCD = \angle NMC$ ，由折叠性质可知： $\angle MCD = \angle MCP$ ， $\angle NMC = \angle MCP$ ，故 $MH = CH$ ，设 $MD = (\sqrt{5}-1)k$ ， $CD = 2k$ ，

$MH = CH = x$ ，根据勾股定理求出 $x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}k$ ，则 $NH = \frac{\sqrt{5}-1}{2}k$ ，再证明 $\triangle CBA \sim \triangle CNH$ ，最后由相似三角形的性质即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解：如图，设 MN 与 AC 交于点 H ，



$\because$ 矩形 $MDCN$ 是一个黄金矩形，

$\therefore \angle MNC = 90^\circ$ ， $MN \parallel DC$ ， $MD = NC$ ， $MN = DC$ ，

$\therefore \angle MCD = \angle NMC$ ，

由折叠性质可知： $\angle MCD = \angle MCP$ ，

$\therefore \angle NMC = \angle MCP$ ，

$\therefore MH = CH$ ，

$$\therefore \frac{MD}{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \text{设 } MD = (\sqrt{5}-1)k, \quad CD = 2k, \quad MH = CH = x,$$

$$\therefore MD = NC = (\sqrt{5}-1)k, \quad MN = CD = 2k,$$

$$\therefore NH = MN - MH = 2k - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle NHC$ 中, 由勾股定理得: $NH^2 + NC^2 = CH^2$,

$$\therefore (2k-x)^2 + [(\sqrt{5}-1)k]^2 = x^2, \quad \text{解得: } x = \frac{5-\sqrt{5}}{2}k,$$

$$\therefore NH = 2k - \frac{5-\sqrt{5}}{2}k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}k,$$

$$\therefore MN \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle CBA \sim \triangle CNH,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{NH}{NC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}k}{(\sqrt{5}-1)k} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB:BC = 1:2,$$

故答案为: 1:2.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sin^2 45^\circ - \frac{\cot 60^\circ}{2 \cos 30^\circ + \tan 60^\circ} + \sin 30^\circ$.

【答案】 $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角三角函数值的混合计算, 牢记特殊角的三角函数值是解答本题的关键. 先用特殊角的三角函数值化简, 然后再进行计算即可.

【详解】 解: 原式 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}.$$

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-1, 6)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(0, 1)$.

(1) 求该抛物线的表达式及其对称轴 l ;

(2) 如果点 A 与点 D 关于对称轴 l 对称, 联结 AB 、 BD , 求 $\triangle ABD$ 的面积.

【答案】 (1) $y = x^2 - 4x + 1$, 直线 $x = 2$

(2) 24

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与三角形面积的综合问题, 涉及待定系数法求函数解析式.

(1) 直接利用待定系数法求函数解析式, 利用对称轴公式求对称轴即可;

(2) 过点 B 作 $BH \perp AD$, 垂足为点 H , 先求出 $D(5, 6)$, 继而求出 AD, BH , 即可求解面积.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 6)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(0, 1)$ 三点,

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = -2, \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4. \\ c = 1 \end{cases}$$

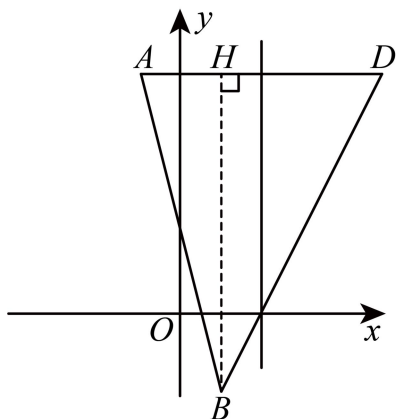
$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 4x + 1$.

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴 l 为直线 $x = 2$;

【小问 2 详解】

解: 过点 B 作 $BH \perp AD$, 垂足为点 H .



$\therefore$ 点 A 与点 D 关于对称轴 l 对称, 又点 $A(-1, 6)$,

$\therefore D(5, 6)$,

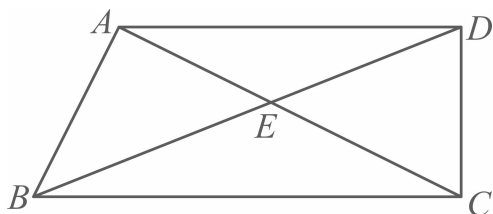
$\therefore AD \parallel x$ 轴, $AD = 6$.

$\therefore B(1, -2)$,

$\therefore BH = 8$.

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AD \times BH = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

21. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 4$, $BC = 5$, 对角线 AC 、 BD 交于点 E .



(1) 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{AE}$.

(2) 已知 $AD \perp CD$, $\tan \angle DAC = \frac{1}{2}$, 求 $\sin \angle ABC$ 的值.

【答案】(1) $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b}$

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$, 即得 $\frac{ED}{BE} = \frac{4}{5}$, 得到 $ED = \frac{4}{9}BD$, 进而得到 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \frac{4}{9}\vec{b}$,

再根据向量的加减法则计算即可;

(2) 由正切可得 $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$, 得到 $CD = 2$, 再由勾股定理得 $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2\sqrt{5}$, 进而由

$\angle DAC = \angle ACB$, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 得到 $\triangle DAC \sim \triangle ACB$, 即得 $\angle BAC = \angle D = 90^\circ$, 最后由正弦的定义

计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{ED}{BE},$$

$$\because AD = 4, \quad BC = 5,$$

$$\therefore \frac{ED}{BE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore ED = \frac{4}{9}BD,$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}\vec{a}, \quad \overrightarrow{ED} = \frac{4}{9}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{ED},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\vec{a} - \frac{4}{9}\vec{b};$$

【小问 2 详解】

$$\because AD \perp CD, \quad \tan \angle DAC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\because AD = 4,$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \triangle DAC \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle D = 90^\circ,$$

∴ sin ∠ABC = AC / BC = (2√5) / 5.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质， 向量的线性运算， 锐角三角函数， 勾股定理， 掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

22. 某校初三学生开展主题为“测量校园内树木高度的方案设计”的数学综合与实践活动.

甲、乙、丙三位同学制作出一个简易测高仪. 取两根小木条钉在一起, 使它们互相垂直, 其中木条 AB 长 40cm , 木条 CD 长 60cm , DB 长 20cm (接头处忽略不计). 为了便于校正竖直位置, 在点 B 处悬挂一个铅垂, 如图 1 所示, 这样就制作出一个简易测高仪.

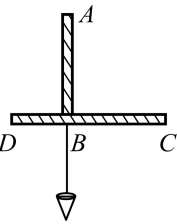


图1



图2

任务: 测量校园内某棵大树 MN 的高度 (树顶端 M 与树根部 N 的距离).

工具: 简易测高仪、卷尺 (如图 2 所示).

要求: 测量得到的长度用字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

第一次实践			
实践操作	甲手持测高仪, C 端朝上 D 端朝下, 从测高仪的点 A 经过点 C 望向树顶端 M , 调整人到树的距离, 使得点 M 恰好与点 C, A 在一条直线上, 然后标记铅垂线的下端刚好接触地面的点 E 的位置, 如图 3 所示.		
示意图 图 3		获取数据	乙负责测量, 得到点 B 到地面的垂直距离 $BE = a\text{cm}$, 还需要测量得到的相关数据有: ____.
		解决问题	利用得到的数据表示树 MN 的高度: $MN = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}.$

反思: 这种方法需要能够一直走到大树的底下, 有时因为有障碍物, 无法走到大树底下. 于是三位同学讨论如果不走到大树底下也可以测量出大树的高度, 经过讨论得到第二种测量方案, 具体如下:

第二次实践

实 践 操 作	甲重复第一次实践操作，然后将测高仪的 D 端朝上 C 端朝下，从测高仪的点 A 经过点 D 望向树顶端 M ，向后走调整人到树的距离，使得点 M 恰好与点 D 、 A 在一条直线上，然后标记铅垂线的下端刚好接触地面的点 F 的位置。丙提醒甲注意：两次测量时点 B 到地面的垂直距离保持不变；点 E 、 F 和树根部 N 三点要保持在同一直线上，如图 4 所示。		
示 意 图 4		获取 数据	点 B 到地面的垂直距离 $BE = a\text{cm}$ ，乙还需要测量得到的相关数据有：_____。
		解决 问题	利用得到的数据表示树 MN 的高度。（写出求解过程）

【答案】第一次实践需要测量得到的相关数据有： $NE = b\text{cm}$ ， MN 的高度： $MN = (a + b + 40)\text{cm}$ 。第二次实践需要测量得到的相关数据有： $EF = c\text{cm}$ ， $MN = (c + a)\text{cm}$ ，过程见解析。

【解析】

【分析】第一次实践，由 $BC = AB = 40\text{cm}$ ， $BD = 20\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ， $AH \perp MN$ ，得到 $MH = AH$ ，进而得到 $MN = NE + 40 + a$ ，即可求解，

第二次实践，设 $MH = AH = x$ ，由 $\tan \angle D_1A_1B_1 = \frac{1}{2}$ ，得到 $A_1H = 2x$ ，由 $A_1H - AH = A_1A = B_1B = EF$ ，得到 $x = c$ ，即可求解，

本题考查了三角函数的应用，解题的关键是：根据题意正确列式。

【详解】解：由题意可知 $BC = AB = 40\text{cm}$ ， $BD = 20\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ，

$$\therefore \tan \angle CAB = 1,$$

$$\therefore AH \perp MN,$$

$$\therefore MH = AH,$$

$$\therefore BE = a,$$

$$\therefore MN = MH + HN = AH + BE = HB + AB + BE = NE + 40 + a,$$

第一次实践需要测量得到的相关数据有： $NE = b\text{cm}$ ，

利用得到的数据表达树 MN 的高度： $MN = (a + b + 40)\text{cm}$ 。

第二次实践需要测量得到的相关数据有： $EF = c\text{cm}$ ，

解决问题：设 $MH = AH = x$ ，

由题意可知 $BC = AB = 40\text{cm}$ ， $BD = 20\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ，

$$\therefore \tan \angle CAB = 1, \quad \tan \angle D_1 A_1 B_1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AH \perp MN,$$

$$\therefore AH = MH = x, \quad \tan \angle D_1 A_1 B_1 = \frac{AH}{A_1 H} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore A_1 H = 2x,$$

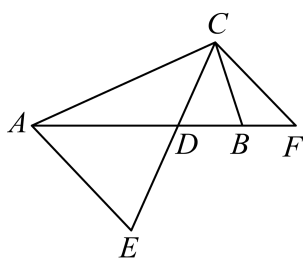
$$\therefore A_1 H - AH = A_1 A = B_1 B = EF,$$

$$\therefore 2x - x = c,$$

$$\therefore x = c,$$

$$\therefore MN = (c + a)\text{cm}.$$

23. 已知在 $\triangle ABC$ 中， CD 平分 $\angle ACB$ ， E 是 CD 延长线上一点， $AE = AD$ ， F 是 AB 延长线上的点，连接 CF 。



(1) 证明： $\triangle CEA \sim \triangle CDB$ ；

(2) 如果 $CF \parallel AE$ ，求证： $\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{CF}$ 。

【答案】(1) 见解析；

(2) 见解析。

【解析】

【分析】(1) 由 $AE = AD$ ，可得 $\angle E = \angle ADE$ ，推出 $\angle E = \angle CDB$ ，根据角平分线的定义可得 $\angle ACE = \angle BCD$ ，即可证明；

(2) 由平行线的性质可得 $\angle E = \angle DCF$ ，推出 $\angle BCF = \angle CAD$ ，可证明 $\triangle CFB \sim \triangle AFC$ ，得到 $\frac{BF}{CF} = \frac{BC}{AC}$ ，结合 $\triangle CEA \sim \triangle CDB$ ， $AE = AD$ ，即可证明。

【小问 1 详解】

证明: $\because AE = AD$,

$$\therefore \angle E = \angle ADE.$$

$$\because \angle ADE = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle E = \angle CDB.$$

$$\because CD \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle CEA \sim \triangle CDB.$$

【小问 2 详解】

$$\because CF \parallel AE,$$

$$\therefore \angle E = \angle DCF.$$

$$\because \angle DCF = \angle DCB + \angle BCF, \quad \angle E = \angle CDF = \angle ACE + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle CAD.$$

$$\text{又} \because \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle CFB \sim \triangle AFC,$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{BC}{AC}.$$

$$\because \triangle CEA \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AE}.$$

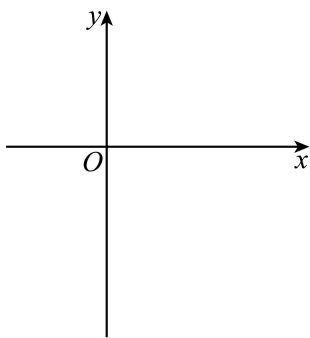
$$\text{又} \because AE = AD,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BF}{CF}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 平行线的性质, 等腰三角形的性质, 角平分线的性质, 解题的关键是掌握相关知识.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ ($c < 0$) 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 P , 直线 PC 与 x 轴交于点 D .



(1) 用含 c 的代数式表示点 P 及点 D 的坐标;

(2) 将该抛物线进行上下、左右两次平移, 所得的新抛物线的顶点 P' 落在线段 PC 的延长线上, 新抛物线与 y 轴交于点 E , 且 $P'E \perp PP'$.

①求该抛物线两次平移的方向和距离;

②点 A 在新抛物线上的对应点 A' , 如果 DA' 被 y 轴平分, 求原抛物线的表达式.

【答案】 (1) $P(2, c+4)$, $D(-\frac{c}{2}, 0)$;

(2) ①该抛物线向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位, 向下平移 5 个单位; ② $y = -x^2 + 4x - 3$.

【解析】

【分析】 (1) 化成顶点式, 可求得顶点 P 的坐标为 $(2, 4+c)$, 利用待定系数法求得直线 PC 的解析式, 据此求解即可;

(2) ①该抛物线向右平移 m 个单位, 向上平移 n 个单位, 则顶点 P' 的坐标为 $(2+m, 4+c+n)$, 得到新抛物线的解析式为 $y' = -(x-2-m)^2 + 4+c+n$, 利用待定系数法求得直线 $P'P$ 的解析式 $y = \frac{n}{m}x + 4+c - \frac{2n}{m}$, 推出直线 $P'P$ 与直线 PC 重合, 得到 $\frac{n}{m} = 2$, 由题意得到 $\angle CP'E = 90^\circ$, 利用勾股定理列式计算求得 $m = -\frac{5}{2}$, 据此即可求解;

②根据题意求得点 A' 的坐标为 $(2 + \sqrt{4+c} - \frac{5}{2}, -5)$, 根据 DA' 被 y 轴平分, 得到 $\frac{x_{A'} + x_D}{2} = 0$, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because y = -x^2 + 4x + c = -(x-2)^2 + 4+c$,

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(2, 4+c)$,

当 $x=0$ 时, $y=c$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, c)$,

设直线 PC 的解析式为 $y = kx + c$,

$$\therefore 2k + c = 4 + c,$$

解得 $k = 2$,

$\therefore$ 直线 PC 的解析式为 $y = 2x + c$,

当 $y = 0$ 时, $0 = 2x + c$,

$$\text{解得 } x = -\frac{c}{2},$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$;

【小问 2 详解】

解: ①该抛物线向右平移 m 个单位, 向上平移 n 个单位, 则顶点 P' 的坐标为 $(2 + m, 4 + c + n)$,

$$\therefore y = -x^2 + 4x + c = -(x - 2)^2 + 4 + c,$$

$\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y' = -(x - 2 - m)^2 + 4 + c + n$,

当 $x = 0$ 时, $y' = -m^2 - 4m + c + n$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0, -m^2 - 4m + c + n)$,

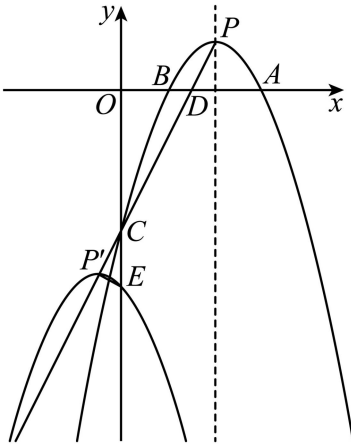
设直线 $P'P$ 的解析式为 $y = k_1x + b_1$,

$$\therefore \begin{cases} 2k_1 + b_1 = 4 + c \\ (2 + m)k_1 + b_1 = 4 + c + n \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = \frac{n}{m} \\ b = 4 + c - \frac{2n}{m} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $P'P$ 的解析式为 $y = \frac{n}{m}x + 4 + c - \frac{2n}{m}$,

$\therefore$ 顶点 P' 落在线段 PC 的延长线上,



$\therefore$ 直线 $P'P$ 与直线 PC 重合,

$$\therefore \frac{n}{m} = 2,$$

$$\therefore P'E \perp PP',$$

$\therefore \triangle CP'E$ 是直角三角形, 且 $\angle CP'E = 90^\circ$,

$$\therefore CP^2 + EP^2 = CE^2,$$

$$\therefore CP^2 = (2+m)^2 + (4+c+n-c)^2 = (2+m)^2 + (4+2m)^2,$$

$$EP^2 = (2+m)^2 + (4+c+n+m^2+4m-c-n)^2 = (2+m)^2 + (m^2+4m+4)^2,$$

$$CE^2 = (c+m^2+4m-c-n)^2 = (m^2+4m-2m)^2 = (m^2+2m)^2,$$

$$\text{即 } (2+m)^2 + (4+2m)^2 + (2+m)^2 + (m^2+4m+4)^2 = (m^2+2m)^2,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore n = -5,$$

$\therefore$ 该抛物线向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位, 向下平移 5 个单位;

$$\text{②当 } y=0 \text{ 时, } 0 = -(x-2)^2 + 4+c,$$

$$\text{解得 } x = 2 \pm \sqrt{4+c},$$

$\therefore$ 点 A 在点 B 的右侧,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (2+\sqrt{4+c}, 0),$$

$$\therefore \text{点 } A' \text{ 的坐标为 } \left(2+\sqrt{4+c}-\frac{5}{2}, -5\right),$$

又 $\because D\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$, 且 DA' 被 y 轴平分,

$$\therefore \frac{x_{A'} + x_D}{2} = 0,$$

$$\therefore 2 + \sqrt{4+c} - \frac{5}{2} + \left(-\frac{c}{2}\right) = 0,$$

解得 $c = 5$ 或 -3 ,

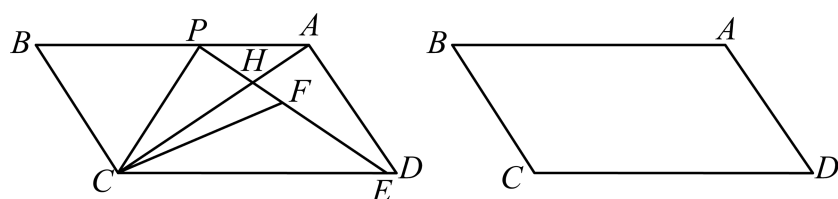
$$\because c < 0,$$

$$\therefore c = -3,$$

$\therefore$ 原抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

【点睛】 本题考查了根据已知条件确定二次函数的解析式, 二次函数平移后解析式的变化情况以及勾股定理的应用, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

25. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 9$, $BC = 5$, $\sin B = \frac{4}{5}$, P 是边 AB 上一动点, 过点 P 作 $PE \perp PC$, 交射线 CD 于点 E , 交 AC 于点 H , F 是 PE 上的点, $\frac{FP}{PC} = \frac{2}{3}$, 连接 CF .



备用图

(1) 求证: $\angle BAC = \angle PCF$;

(2) 当 $\triangle APC \sim \triangle EFC$ 时, 求线段 BP 的长;

(3) 当 $\frac{S_{\triangle HFC}}{S_{\triangle PHC}} = \frac{1}{3}$ 时, 求 $\frac{AH}{AC}$ 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{17}{3}$

(3) $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G , 由 $\sin B = \frac{4}{5}$ 求出 $CG = 4$, 由勾股定理的出 $BG = 3$, $AG = 6$,

所以 $\tan \angle BAC = \frac{CG}{AG} = \frac{2}{3}$, 由 $\angle CPF = 90^\circ$, $\frac{FP}{PC} = \frac{2}{3}$,

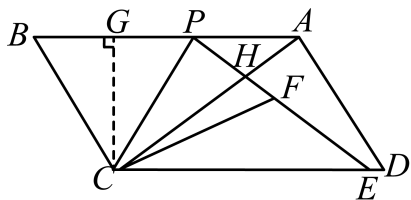
得到 $\tan \angle PCF = \tan \angle BAC = \frac{2}{3}$, 进而可得出结论;

(2) 根据平行线的性质以及角的和差关系证出 $\angle PCA = \angle FCD$ ，由 $\triangle APC \sim \triangle EFC$ ，得到 $\angle APC = \angle EFC$ ， $\angle BPC = \angle PFC$ ，所以 $\tan \angle BPC = \tan \angle PFC$ ，求出 $PG = \frac{8}{3}$ ，进而可求出 BP 的长；

(3) 过点 H 作 $HM \perp AB$ ，垂足为点 M ，根据 $\frac{S_{\triangle HFC}}{S_{\triangle PHC}} = \frac{1}{3}$ ，得到 $\frac{FH}{PH} = \frac{1}{3}$ ，证明出 $\triangle MPH \sim \triangle GCP$ ，可得 $\frac{MP}{GC} = \frac{MH}{GP} = \frac{PH}{CP}$ ，由 $\frac{PF}{PC} = \frac{2}{3}$ ，可得 $\frac{PH}{PC} = \frac{1}{2}$ ，然后分两种情况讨论：① 当点 F 在线段 PH 的延长线上时；② 当点 F 在线段 PH 上时；即可解答。

【小问 1 详解】

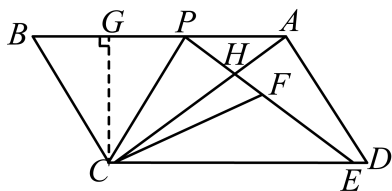
解：过点 C 作 $CG \perp AB$ ，垂足为点 G ，



$$\begin{aligned} \because BC &= 5, \quad \angle BGC = 90^\circ, \\ \therefore \sin B &= \frac{CG}{BC} = \frac{4}{5}, \\ \therefore CG &= 4, \\ \therefore BG &= \sqrt{BC^2 - CG^2} = 3, \\ \because AB &= 9, \\ \therefore AG &= AB - BG = 6, \\ \because \angle AGC &= 90^\circ, \\ \therefore \tan \angle BAC &= \frac{CG}{AG} = \frac{2}{3}, \\ \because \angle CPF &= 90^\circ, \quad \frac{FP}{PC} = \frac{2}{3}, \\ \therefore \tan \angle PCF &= \tan \angle BAC = \frac{2}{3}, \\ \because \angle BAC &= \angle PCF < 90^\circ, \\ \therefore \angle BAC &= \angle PCF; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

解：过点 C 作 $CG \perp AB$ ，垂足为点 G ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACD,$$

$$\because \angle PCF = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle PCF = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle PCA = \angle FCD,$$

$$\because \triangle APC \sim \triangle EFC,$$

$$\therefore \angle APC = \angle EFC, \quad \angle BPC = \angle PFC,$$

$$\therefore \tan \angle BPC = \tan \angle PFC,$$

$$\therefore \frac{CG}{PG} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore PG = \frac{8}{3},$$

$$\therefore BP = BG + PG = \frac{17}{3};$$

【小问 3 详解】

解: 过点 H 作 $HM \perp AB$, 垂足为点 M ,

$$\because \angle FPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPH + \angle CPG = 180^\circ - \angle FPC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CPG + \angle PCG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPH = \angle PCG,$$

$$\text{又} \angle HMP = \angle CGP = 90^\circ,$$

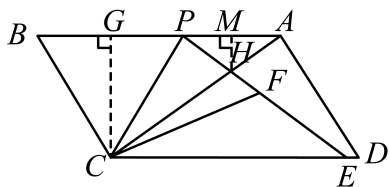
$$\therefore \triangle MPH \sim \triangle GCP,$$

$$\therefore \frac{MP}{GC} = \frac{MH}{GP} = \frac{PH}{CP},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle HFC}}{S_{\triangle PHC}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{FH}{PH} = \frac{1}{3},$$

① 当点 F 在线段 PH 的延长线上时,



由 $\frac{PF}{PC} = \frac{2}{3}$, 可得 $\frac{PH}{PC} = \frac{1}{2}$,

设 $MH = a$,

$\therefore GP = 2a, MP = 2, AM = \frac{3}{2}a,$

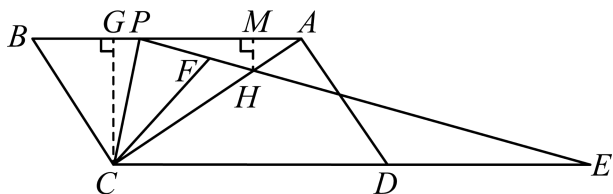
$\therefore 2a + \frac{3}{2}a + 2 + 3 = 9, a = \frac{8}{7},$

$\therefore \angle AMH = \angle AGC = 90^\circ,$

$\therefore \triangle AMH \sim \triangle AGC,$

$\therefore \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{CG} = \frac{2}{7};$

② 当点 F 在线段 PH 上时, 可得 $PH = PC$,



设 $MH = b$,

$\therefore GP = b, MP = 4, AM = \frac{3}{2}b,$

$\therefore b + \frac{3}{2}b + 4 + 3 = 9, b = \frac{4}{5},$

$\therefore \angle AMH = \angle AGC = 90^\circ,$

$\therefore \triangle AMH \sim \triangle AGC,$

$\therefore \frac{AH}{AC} = \frac{MH}{CG} = \frac{1}{5},$

综上所述 $\frac{AH}{AC}$ 的值为 $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{1}{5}$.

【点睛】 本题考查了解直角三角形、勾股定理、相似三角形的判定与性质、平行四边形的性质、平行线的性质, 掌握以上知识点是解答本题的关键.

