

静安区 2024 学年度第一学期期末教学质量调研

九年级数学试卷

(满分 150 分, 用卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列代数式中, 不是单项式的是 ()

- A. $3mn$ B. $\frac{1}{2\pi}$ C. 0 D. $\frac{a+b}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查单项式的定义, 较为简单, 要准确把握定义. 数与字母的积的形式的代数式是单项式, 单独的一个数或一个字母也是单项式, 分母中含字母的不是单项式.

【详解】解: 解: A. $3mn$ 是单项式;

B. $\frac{1}{2\pi}$, 是单项式;

C. 0, 是单项式;

D. $\frac{a+b}{2}$, 是多项式.

故选: D.

2. 下列各组数中, 不相等的一组是 ()

- A. $(-2)^3$ 和 -2^3 B. $(-2)^2$ 和 -2^2
- C. $|-2|^3$ 和 2^3 D. 2 和 $-\sqrt[3]{-2^3}$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了有理数的乘方运算，求一个数的立方根，根据有理数的乘方运算法则和立方根定义，逐项进行判断即可.

【详解】 解： A. $(-2)^3 = -8$ 和 $-2^3 = -8$ ，相等，故 A 不符合题意；

B. $(-2)^2 = 4$ 和 $-2^2 = -4$ ， $4 \neq -4$ ，故 B 符合题意；

C. $|-2|^3 = 8$ 和 $2^3 = 8$ ，相等，故 C 不符合题意；

D. 2 和 $-\sqrt[3]{-2^3} = -(-2) = 2$ ，相等，故 D 不符合题意.

故选： B.

3. 泰勒斯是古希腊时期的思想家、科学家、哲学家，他曾通过测量同一时刻标杆的影长，标杆的高度，金字塔的影长，推算出金字塔的高度，这种测量原理，就是我们所学的（ ）

A. 图形的相似

B. 图形的平移

C. 图形的旋转

D. 图形的翻折

【答案】 A

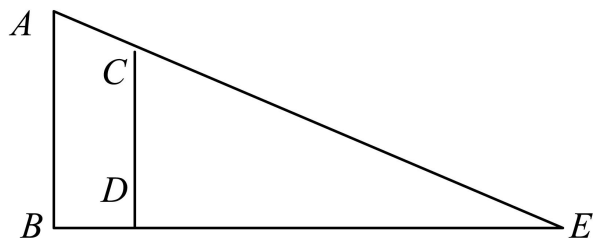
【解析】

【分析】 本题主要考查将实际问题数学化，根据实际情况画出图形即可求解. 根据在同一时刻的太阳光下物体的影长和物体的实际高度成比例即可判断.

【详解】 解： 根据题意画出如下图形： 可以得到 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ ， 则 $\frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DE}$ ，

AB 即为金字塔的高度， CD 即为标杆的高度， 通过测量影长即可求出金字塔的高度，

$\therefore$ 这种测量原理， 就是我们所学的图形相似.



故选： A.

4. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量，下列条件中不能判定 $\vec{b} \parallel \vec{c}$ 的是（ ）

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ， $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. $\vec{c} = 3\vec{b}$

C. $|\vec{b}|=|\vec{c}|$

D. $\vec{a}=3\vec{b}$, $\vec{c}=-2\vec{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了向量平行的判定，掌握其判定方法是解题的关键.

根据向量平行的判定，向量模的理解进行判定即可求解.

【详解】解：A、 $\vec{a}\parallel\vec{c}, \vec{a}\parallel\vec{b}$ ，则 $\vec{b}\parallel\vec{c}$ ，能判定，不符合题意；

B、 $\vec{c}=3\vec{b}$ ，则 $\vec{b}\parallel\vec{c}$ ，能判定，不符合题意；

C、 $|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 模相等，不一定平行，故不能判定 $\vec{b}\parallel\vec{c}$ ，符合题意；

D、 $\vec{a}=3\vec{b}, \vec{c}=-2\vec{a}$ ，则 $\vec{c}=-6\vec{b}$ ，

$\therefore \vec{b}\parallel\vec{c}$ ，能判定，不符合题意；

故选：C.

5. 如果锐角 A 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ ，下列关于锐角 A 的取值范围的说法中，正确的是（ ）

A. $0^\circ < \angle A < 30^\circ$

B. $30^\circ < \angle A < 45^\circ$

C. $45^\circ < \angle A < 60^\circ$

D. $60^\circ < \angle A < 90^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是锐角三角函数的定义，熟知锐角三角函数的余弦函数值随角增大而减小是解答此题的关键. 先求出 $\cos 30^\circ$ ， $\cos 45^\circ$ 及 $\cos 60^\circ$ 的近似值，然后得出结论即可.

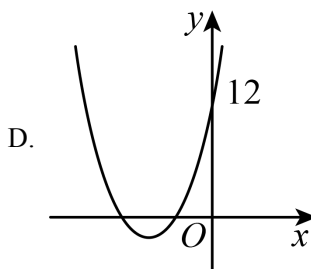
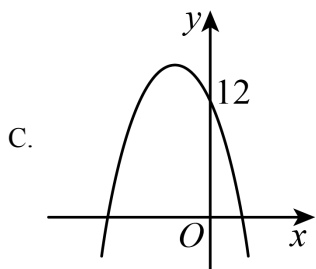
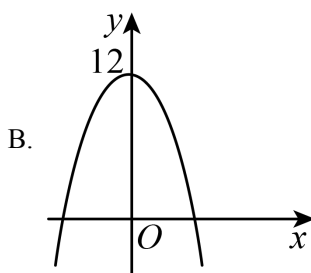
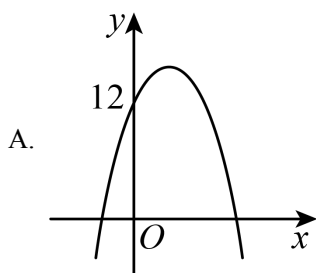
【详解】解： $\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.9$ ， $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ ， $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5$ ，

又： $\because \cos A = \frac{2}{3} \approx 0.67$ ，余弦函数随角增大而减小，且 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore 45^\circ < \angle A < 60^\circ$.

故选：C.

6. 如果一次函数 $y_1 = mx - 6 (m \neq 0)$ 、 $y_2 = nx - 2 (n \neq 0)$ 的图象都经过 $C(1, -3)$ ，那么函数 $y = y_1 \cdot y_2$ 的大致图像是（ ）



【答案】 B

【解析】

【分析】 此题考查了待定系数法求一次函数解析式，二次函数的图象和性质．根据一次函数 $y_1 = mx - 6 (m \neq 0)$ 、 $y_2 = nx - 2 (n \neq 0)$ 的图象都经过 $C(1, -3)$ ，求出 $y_1 = 3x - 6$ 、 $y_2 = -x - 2$ ，求出 $y = y_1 \cdot y_2 = -3x^2 + 12$ ，根据二次函数的性质即可得到答案．

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y_1 = mx - 6 (m \neq 0)$ 、 $y_2 = nx - 2 (n \neq 0)$ 的图象都经过 $C(1, -3)$ ，

$$\therefore -3 = m - 6, \quad -3 = n - 2,$$

解得 $m = 3$, $n = -1$,

$$\therefore y_1 = 3x - 6, \quad y_2 = -x - 2,$$

$$\therefore y = y_1 \cdot y_2 = (3x - 6)(-x - 2) = -3x^2 + 12,$$

抛物线 $y = -3x^2 + 12$ 对称轴为 y 轴，开口向下，顶点为 $(0, 12)$ ；

故选：B．

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域为_____．

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 求函数的定义域就是找使函数有意义的自变量的取值范围．

【详解】 解：函数要有意义，则 $x - 1 \neq 0$ ，

解得： $x \neq 1$ ，

故答案为： $x \neq 1$ ．

【点睛】 本题考查的知识点是函数的定义域，关键要知道函数有意义的自变量的取值范围．

8. 计算： $(-a^2)^3 \div a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $-a^4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了幂的混合运算，解题的关键是熟练掌握运算法则．根据幂的乘方和同底数幂除法运算法则进行计算即可．

【详解】 解： $(-a^2)^3 \div a^2 = -a^6 \div a^2 = -a^4$ ．

故答案为： $-a^4$ ．

9. 如果 $2x = 3y$ ，那么 $x : y = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $3:2$

【解析】

【分析】 根据比例的基本性质，即两个外项的积等于两个内项的积，将此性质逆运用，即可得出答案．

【详解】 解： $\because 2x = 3y$ ，

$\therefore x : y = 3 : 2$ ．

故答案为： $3:2$

【点睛】 此题主要考查了比例的意义和基本性质．解答此题的关键是比例基本性质的逆运用．

10. 把一个三角形放大为与它相似的三角形，如果它的面积扩大为原来的 9 倍，那么它的周长扩大为原来的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 倍．

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质，理解并掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的关键．根据题意，由相似三角形的面积比等于相似比的平方，周长比等于相似比即可求解．

【详解】 解： 三角形放大为与它相似的三角形，如果它的面积扩大为原来的 9 倍，

$\therefore$ 相似比为 $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore$ 周长扩大为原来的 3 倍,

故答案为: 3 .

11. 抛物线 $y = (a+1)x^2 - x$ 在对称轴左侧的部分是上升的, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < -1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的性质, 掌握二次函数的增减性是解题的关键.

【详解】 解: 抛物线 $y = (a+1)x^2 - x$ 在对称轴左侧的部分是上升的,

$\therefore a+1 < 0$,

解得, $a < -1$,

故答案为: $a < -1$.

12. 已知一坡面的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$, 那么这个坡角等于_____°.

【答案】 30

【解析】

【分析】 本题考查了坡度的计算, 特殊角的三角函数值的计算, 理解坡度的含义, 掌握特殊角的三角函数的计算是解题的关键.

根据坡度坡面的垂直高度 (h) 和水平宽度 (l) 的比值, 即坡角的正切值 $\tan \alpha$, 其中 α 是斜坡与水平面之间的夹角, 由此即可求解.

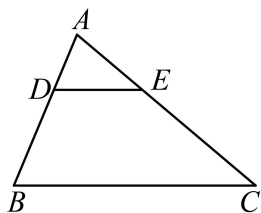
【详解】 解: 设坡角为 α ,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \alpha = 30^\circ$,

故答案为: 30 .

13. 如图, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$, $DE \parallel BC$. 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BC}$ 为_____.



【答案】 $-3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平面向量，根据平行线分线段成比例得出 $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ ，再根据平面向量三角形运算法则求出 $\overrightarrow{DE}$ 即可推出结果.

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

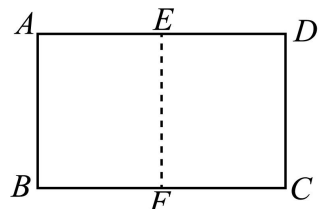
$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DE} = -3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b},$$

故答案为： $-3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$.

14. 我们把常用的 A4 纸的短边与长边的比叫作“白银比”，把这样的矩形称为“白银矩形”. 如图，一张规格为 A4 的矩形纸片 ABCD，将其长边对折 (EF 为折痕)，得到两个全等的 A5 矩形纸片，且 A4、A5 这两种规格的矩形纸片相似，那么这个“白银比”为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似多边形的性质，理解题意，掌握相似多边形的各边的比是解题的关键. 分别表示出原矩形的长和宽，折叠后的长与宽，结合题意“白银比”进行计算即可求解.

【详解】 解： 设矩形纸片长为 $AD = BC = a$ ，宽为 $AB = CD = b$ ，

$$\therefore \text{折叠后矩形的长为 } b, \text{ 宽为 } \frac{1}{2}a,$$

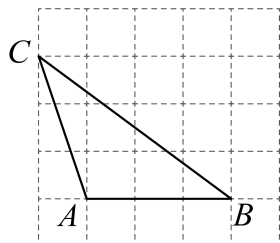
根据题意可得， $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{b}$ ，

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

解得, $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点均在小正方形的方格顶点上, 那么 $\sin C$ 的值是_____.

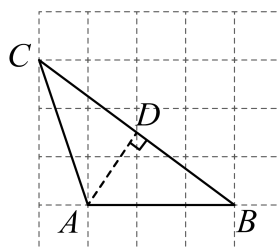


【答案】 $\frac{9\sqrt{10}}{50}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形函数、勾股定理. 首先根据网格求出三角形的三边, 在三角形中过点 A 作 $AD \perp BC$, 利用三角形的面积公式求出 AD 的长度, 再根据正弦的定义求出结果.

【详解】 解: 如下图所示, 过点 A 作 $AD \perp BC$,



在 $\triangle ABC$ 中 $AB = 3$, $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{5}{2} AD,$$

当以 AB 为 $\triangle ABC$ 的底边时, 对应的高为 3,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2},$$

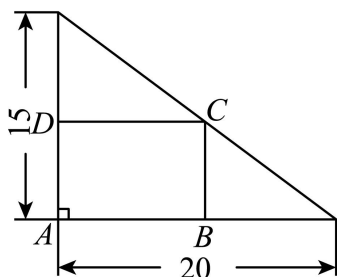
$$\therefore \frac{5}{2} AD = \frac{9}{2},$$

解得: $AD = \frac{9}{5}$,

$$\therefore \sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{\frac{9}{5}}{\sqrt{10}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{50}.$$

故答案为: $\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

16. 在两条直角边长分别是 20 和 15 的直角三角形的内部作矩形 $ABCD$, 如果 AB 、 AD 分别在两条直角边上 (如图所示), $AD:AB=1:2$, 那么矩形 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】 72

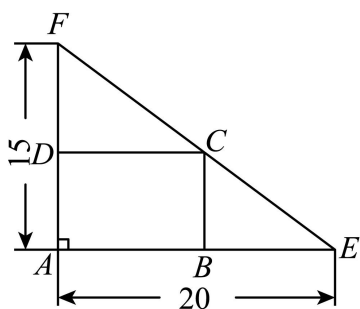
【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的判定和性质得到 AD 、 AB 的值是解题的关键.

根据题意可证 $\triangle FDC \sim \triangle CBE$, 得到 $\frac{FD}{CB} = \frac{CD}{BE}$, 由题意设 $AD = BC = x$, $AB = CD = 2x$, 则

$DF = 15 - x$, $BE = 20 - 2x$, 由此列式得 $\frac{15-x}{x} = \frac{2x}{20-2x}$, 解得, $x = 6$, 则 $AD = 6$, $AB = 12$, 由此即可求解.

【详解】 解: 如图所示,



$\because$ 两条直角边长分别是 20 和 15 的直角三角形的内部作矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle DAB = 90^\circ = \angle BCD$, $AD = BC$, $AB = CD$, $CD \parallel AE$,

$\therefore \angle DCF = \angle BEC$, 且 $\angle CDF = \angle EBC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FDC \sim \triangle CBE$,

$\therefore \frac{FD}{CB} = \frac{CD}{BE}$,

$\therefore AD:AB=1:2$,

∴ 设 $AD = BC = x$, $AB = CD = 2x$, 则 $DF = 15 - x$, $BE = 20 - 2x$,

$$\therefore \frac{15-x}{x} = \frac{2x}{20-2x},$$

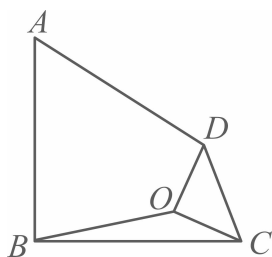
解得, $x = 6$,

$$\therefore AD = 6, AB = 12,$$

∴ 矩形 $ABCD$ 的面积是 $6 \times 12 = 72$,

故答案为: 72 .

17. 如图, 点 O 在四边形 $ABCD$ 的内部, $\angle COD = \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, $OD = OC$, 如果 $BO = a$, 那么 AD 的长为 _____. (用含字母 a 的式子表示)



【答案】 $\sqrt{2}a$

【解析】

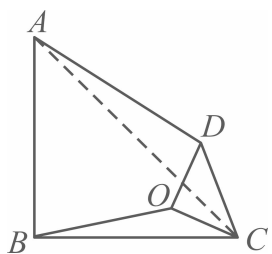
【分析】 此题重点考查等腰直角三角形的性质、勾股定理、相似三角形的判定与性质等知识, 正确地作出辅助线是解题的关键. 连接 AC , 由 $\angle COD = \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, $OD = OC$, 得

$\angle ACB = \angle CAB = \angle DCO = \angle CDO = 45^\circ$, $AC = \sqrt{2}BC$, $DC = \sqrt{2}OC$, 所以

$\angle ACD = \angle BCO = 45^\circ - \angle ACO$, $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{OC} = \sqrt{2}$, 则 $\triangle ACD \sim \triangle BCO$, 所以 $\frac{AD}{BO} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$, 则

$AD = \sqrt{2}a$, 于是得到问题的答案.

【详解】 解: 连接 AC ,



∵ $\angle COD = \angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, $OD = OC$,

∴ $\angle ACB = \angle CAB = \angle DCO = \angle CDO = 45^\circ$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}BC$,

$DC = \sqrt{OD^2 + OC^2} = \sqrt{2}OC$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCO = 45^\circ - \angle ACO, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{OC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \frac{AD}{BO} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{2},$$

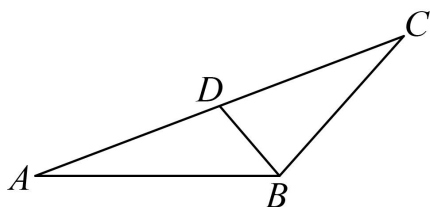
$$\therefore AD = \sqrt{2}BO,$$

$$\because BO = a,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2}a$$

故答案为: $\sqrt{2}a$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $BC = 2BD$, $AC = 6\sqrt{5}$, $\tan A = \frac{1}{2}$, 那么 AB 的长为 ____.



【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定和性质, 解直角三角形的计算, 勾股定理, 合理构造辅助线得到

$\tan A = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACF$, 是解题的关键.

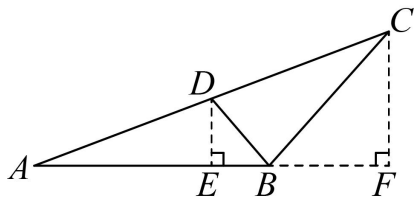
如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 延长线于点 F , 可得 $\tan A = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$, 由勾

股定理得 $DE = 3$ (负值舍去), 再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACF$, 得到 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, 求出

$CF = 2DE = 6$, $AF = 2AE = 12$, 则 $EF = AF - AE = 12 - 6 = 6$, 设 $BE = x$, 则 $BF = EF - BE = 6 - x$,

在 $Rt\triangle BDE$ 中, 运用勾股定理即可求解.

【详解】解: 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 延长线于点 F ,



$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $AC = 6\sqrt{5}$,

$$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADE \text{ 中, } \tan A = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = 2DE,$$

$$\therefore AD^2 = AE^2 + DE^2 = (2DE)^2 + DE^2, \text{ 即 } (3\sqrt{5})^2 = 5DE^2,$$

解得, $DE = 3$ (负值舍去),

$$\therefore AE = 6,$$

$$\because DE \perp AB, CF \perp AB,$$

$$\therefore DE \parallel CF,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF} = \frac{AE}{AF} = \frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CF = 2DE = 6, \quad AF = 2AE = 12, \text{ 则 } EF = AF - AE = 12 - 6 = 6,$$

设 $BE = x$, 则 $BF = EF - BE = 6 - x$,

$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } BD^2 = BE^2 + DE^2 = x^2 + 9,$$

$$\therefore BC = 2BD,$$

$$\therefore BC^2 = 4BD^2 = 4(x^2 + 9),$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCF \text{ 中, } BC^2 = BF^2 + CF^2 = (6 - x)^2 + 6^2,$$

$$\therefore 4(x^2 + 9) = (6 - x)^2 + 6^2,$$

$$\text{整理得, } x^2 + 4x - 12 = 0,$$

解得, $x_1 = 2, \quad x_2 = -6$ (不符合题意, 舍去),

$$\therefore BE = 2,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 6 + 2 = 8,$$

故答案为: 8.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \sin^2 30^\circ - \frac{1}{2 - \tan 60^\circ} - \left(\frac{\cot 45^\circ}{\cot 30^\circ} \right)^{-1}.$$

【答案】 $-\frac{7}{4}-2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值，负整数指数幂，分母有理化，根据特殊角的三角函数值，负整数指数幂，分母有理化进行化简即可，掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

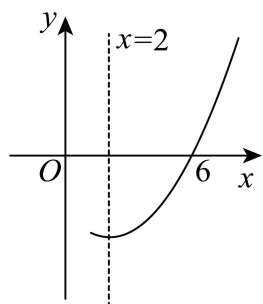
【详解】 解：原式 $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$

$$= \frac{1}{4} - (2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} - 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= -\frac{7}{4} - 2\sqrt{3}.$$

20. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图像如图所示，已知它与 x 轴的一个交点坐标是 $(6, 0)$ ，且对称轴是直线 $x = 2$.



- (1) 填空：① a 与 b 的数量关系为： $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ；② 图像与 x 轴的另一个交点坐标为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
- (2) 如果该函数图像经过点 $(0, -3)$ ，求它的顶点坐标.

【答案】 (1) ① $-4a$ ；② $(-2, 0)$

(2) $(2, -4)$

【解析】

【分析】 本题考查了求二次函数的解析式、二次函数的图像与性质，熟练掌握待定系数法和二次函数的对称性是解题关键.

(1) ① 根据二次函数的对称轴可得 $x = -\frac{b}{2a} = 2$ ，由此即可得；

② 根据二次函数的对称性求解即可得；

(2) 根据 (1) 可设二次函数的解析式为 $y = a(x-6)(x+2)$ ，将点 $(0, -3)$ 代入求出二次函数的解析式，

再根据二次函数的解析式的顶点式求解即可得.

【小问 1 详解】

解: ① $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = 2$,

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a,$$

故答案为: $-4a$;

② $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的一个交点坐标是 $(6, 0)$, 且对称轴是直线 $x = 2$,

$\therefore$ 图像与 x 轴的另一个交点坐标为 $(2 \times 2 - 6, 0)$, 即为 $(-2, 0)$,

故答案为: $(-2, 0)$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴的两个交点坐标是 $(6, 0)$ 和 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 可设二次函数的解析式为 $y = a(x - 6)(x + 2)$,

$\because$ 这个函数图像经过点 $(0, -3)$,

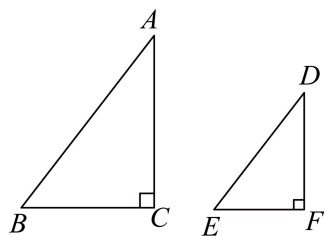
$$\therefore (0 - 6) \times (0 + 2)a = -3,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = \frac{1}{4}(x - 6)(x + 2) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 4,$$

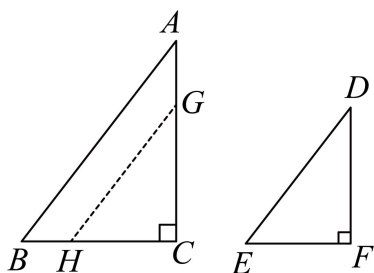
$\therefore$ 它的顶点坐标为 $(2, -4)$.

21. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $\angle C = \angle F = 90^\circ$, $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$. 求证: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.



以下是小明同学证明本题的过程:

证明: 如图, 在 AC 、 BC 上分别截取 $CG = FD$, $CH = FE$, 连接 GH .



在 $\triangle GHC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $\begin{cases} CG = FD \\ \angle C = \angle F = 90^\circ \\ CH = FE \end{cases}$ $\triangle GHC \cong \triangle DEF$	①
$\therefore GH = DE$. $\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$, 又 $CG = FD$,	②
$\therefore \frac{GH}{AB} = \frac{CG}{AC}$. $\therefore GH \parallel AB$.	③
$\therefore \triangle GHC \sim \triangle ABC$, $\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC$.	④

(1) 有同学认为小明的证明过程不正确, 那么你认为他是从第____部分开始出现 问题 (填①或②或③或④). 请简述小明出错的原因;

(2) 小红认为: 本题可以用添加辅助线——平行线, 构造熟悉的基本图形解决. 请你用小红的思路完成本题的证明过程.

【答案】 (1) ③, 错误原因见解析

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质;

(1) 由三角形一边的平行线的判定方法错误可得答案;

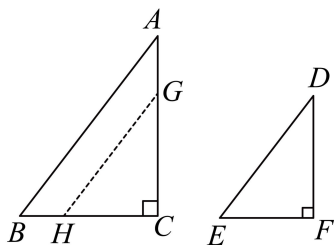
(2) 如图, 在 AC 上截取 $CG = FD$, 过点 G 作 $GH \parallel AB$ 交 BC 于点 H . 证明 $\text{Rt}\triangle GHC \cong \text{Rt}\triangle DEF$, 证明 $GH \parallel AB$, 进一步可得答案.

【小问1 详解】

解：第③步出现错误；错用三角形一边的平行线的判定定理；

【小问2 详解】

证明：如图，在 AC 上截取 $CG = FD$ ，过点 G 作 $GH \parallel AB$ 交 BC 于点 H 。



$$\because GH \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CGH \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{GH}{AB} = \frac{CG}{AC}.$$

$$\because CG = FD, \quad \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC},$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{GH}{AB}, \text{ 即 } GH = DE.$$

在 $\text{Rt}\triangle GHC$ 与 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $GH = DE$ ， $CG = DF$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle GHC \cong \text{Rt}\triangle DEF.$$

$$\because GH \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle GHC \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ABC.$$

22. 舞狮文化源远流长，其中高桩舞狮是一项集体育与艺术于一体的竞技活动，也被广泛应用于各种庆典活动，成为传承中国传统文化的重要载体（如图①所示）。在舞狮表演中，梅花桩 AB 、 CD 、 EF 垂直于地面，且 B 、 D 、 F 在一直线上（如图②所示）。如果在桩顶 C 处测得桩顶 A 和桩顶 E 的仰角分别为 35° 和 47° ，且 AB 桩与 EF 桩的高度差为 1 米，两桩的距离 BF 为 2 米。



图-①

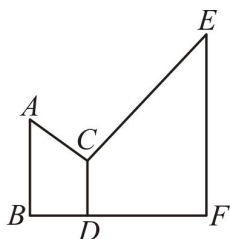


图-②

(1) 舞狮人从 A 跳跃到 C ，随后再跳跃至 E ，所成的角 $\angle ACE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；

(2) 求桩 AB 与桩 CD 的距离 BD 的长. (结果精确到 0.01 米)

【答案】(1) 98

(2) 0.65 米

【解析】

【分析】 本题主要考查仰俯角解直角三角形的运用, 理解并掌握解直角三角形的计算是解题的关键.

(1) 根据仰俯角, 平角为 180° 即可求解;

(2) 过点 C 作 $MN \parallel BF$, 分别交 AB 、 EF 于点 M 、 N , 则四边形 $BDCM$ 、 $BFNM$ 、 $DFNC$ 都是矩

形, 设 $BD = CM = x$ 米, 则 $CN = (2 - x)$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中, 由函数函数的计算 $\tan \angle ACM = \frac{AM}{CM}$,

得 到 $AM = CM \cdot \tan \angle ACM = x \cdot \tan 35^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle CEN$ 中, $\tan \angle ECN = \frac{EN}{CN}$, 得 到

$EN = CN \cdot \tan \angle ECN = (2 - x) \cdot \tan 47^\circ$, 由 $EF - AB = EN - AM = 1$, 即可求解.

【小问 1 详解】

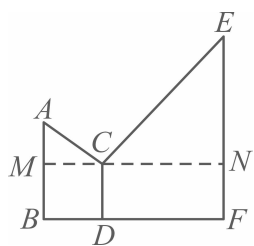
解: 在桩顶 C 处测得桩顶 A 和桩顶 E 的仰角分别为 35° 和 47° ,

$$\therefore \angle ACE = 180^\circ - 35^\circ - 47^\circ = 98^\circ,$$

故答案为: 98;

【小问 2 详解】

解: 过点 C 作 $MN \parallel BF$, 分别交 AB 、 EF 于点 M 、 N ,



$$\therefore AB \perp BF, CD \perp BF, EF \perp BF,$$

$$\therefore AB \parallel CD \parallel EF,$$

$\therefore$ 四边形 $BDCM$ 、 $BFNM$ 、 $DFNC$ 都是矩形,

$$\therefore BD = CM, MN = BF, DF = CN, BM = NF,$$

设 $BD = CM = x$ 米, 则 $CN = (2 - x)$ 米,

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AMC \text{ 中, } \tan \angle ACM = \frac{AM}{CM},$$

$$\therefore AM = CM \cdot \tan \angle ACM = x \cdot \tan 35^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CEN$ 中, $\tan \angle ECN = \frac{EN}{CN}$,

$$\therefore EN = CN \cdot \tan \angle ECN = (2-x) \cdot \tan 47^\circ,$$

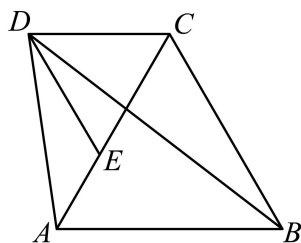
$$\therefore EF - AB = EN - AM = 1,$$

$$\therefore (2-x) \cdot \tan 47^\circ - x \cdot \tan 35^\circ = 1,$$

$$\text{解得, } x = \frac{2 \tan 47^\circ - 1}{\tan 47^\circ + \tan 35^\circ} \approx 0.65 \text{ (米)},$$

答: 桩 AB 与桩 CD 的距离 BD 的长约为 0.65 米.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 连接 AC 、 BD , $\triangle ABC$ 是等边三角形, $DE \parallel BC$, DE 与 AC 交于点 E , $\angle ADB = 2\angle DBC$.



(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle DBC$;

(2) 求证: 点 E 是线段 AC 的黄金分割点.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

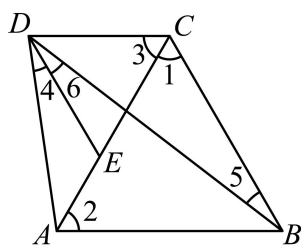
【分析】本题主要考查相似三角形的判定和性质, 黄金分割点的计算, 掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

(1) 根据 $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB \parallel CD$, 得到 $\angle DCB = \angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$, 由 $DE \parallel BC$, 得到 $\angle EDC = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\angle AED = \angle EDC + \angle 3 = 120^\circ$, 由 $DE \parallel BC$, 得到 $\angle 5 = \angle 6$, 结合 $\angle ADB = 2\angle 5$, 得到 $\angle 5 = \angle 4$, 由相似三角形的判定方法即可求解;

(2) 根据题意可得 $\triangle CDE$ 为等边三角形, 即 $CE = DE = CD$, 由 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 得到 $AC = BC$, 根据 $\triangle ADE \sim \triangle DBC$, 得到 $\frac{AE}{CD} = \frac{DE}{BC}$, 即 $\frac{AE}{CE} = \frac{EC}{AC}$, 由此即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示,



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 60^\circ,$$

$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle 1 + \angle 3 = 120^\circ,$$

$\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle EDC = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDC + \angle 3 = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DCB,$$

$\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle 5 = \angle 6,$$

$$\because \angle ADB = 2\angle 5, \text{ 且 } \angle ADB = \angle 4 + \angle 6,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 4,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DBC.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle 3 = \angle EDC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CDE$ 为等边三角形, 即 $CE = DE = CD$,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore AC = BC,$$

$\because \triangle ADE \sim \triangle DBC$,

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{EC}{AC}, \text{ 即 } EC^2 = AE \cdot AC,$$

$\therefore$ 点 E 是线段 AC 的黄金分割点.

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上, 其 y 与 x 部分对应值如下表:

x	...	-3	-1	0	3	2	...
y	...	-8	0	2	0	2	...

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 设此抛物线的顶点为 P , 将此抛物线沿着平行于 x 轴的直线 l 翻折, 翻折后得新抛物线.

①设此抛物线与 x 轴的交点为 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), 且 $\triangle ABP$ 的重心 G 恰好落在直线 l 上, 求此时新抛物线的表达式;

②如果新抛物线恰好经过原点, 求新抛物线在直线 l 上所截得的线段长.

【答案】 (1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

(2) ① $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - \frac{8}{9}$ ② $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题主要考查待定系数法求解析式及二次函数图象的性质, 折叠的性质, 重心的性质, 掌握二次函数图象的性质是解题的关键.

(1) 根据题意, 运用两点式, 设 $y = a(x+1)(x-3)$, 运用待定系数法即可求解;

(2) ①将抛物线的一般式化为顶点式得到点 P 的坐标为 $\left(1, \frac{8}{3}\right)$, 如图所示, 过点 P 作 PH 垂直 x 轴于点 H ,

根据 G 是 $\triangle ABP$ 的重心, 得到 $GH = \frac{1}{3}PH = \frac{8}{9}$, 则新抛物线的顶点坐标为 $\left(1, -\frac{8}{9}\right)$, 根据题意可知, 这两

条抛物线的形状不变, 开口方向相反, 由此即可求解; ②设直线 l 与 y 轴的交点为 $(0, m)$, 则 $P\left(1, \frac{8}{3}\right)$ 关于

直线 l 的对称点为 $\left(1, 2m - \frac{8}{3}\right)$, 由此得到新抛物线的表达式为 $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 + 2m - \frac{8}{3}$, 根据它经过原点,

得到解得 $m = 1$, 所以令 $y = 1$, 代入 $y = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3}$, 由此即可求解.

【小问 1 详解】

解: 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 当 $x = 3$ 时, $y = 0$,

$\therefore$ 设抛物线的表达式为 $y = a(x+1)(x-3)$,

把 $x=0, y=2$ 代入, $2=a(0+1)(0-3)$,

解得 $a=-\frac{2}{3}$,

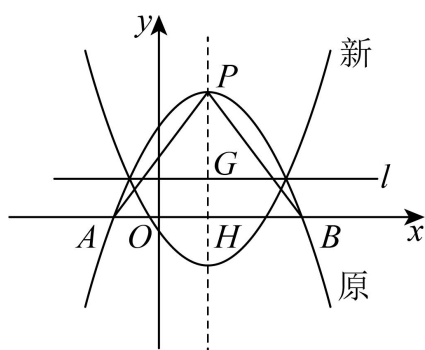
$\therefore$ 此抛物线的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$.

【小问 2 详解】

解: ① $\because y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(1, \frac{8}{3}\right)$,

如图所示, 过点 P 作 PH 垂直 x 轴于点 H ,



$\therefore PH=\frac{8}{3}$,

$\because G$ 是 $\triangle ABP$ 的重心,

$\therefore GH=\frac{1}{3}PH=\frac{8}{9}$,

$\because G$ 在直线 l 上, 且新抛物线与原抛物线的图像关于直线 l 对称,

$\therefore$ 新抛物线的顶点坐标为 $\left(1, -\frac{8}{9}\right)$,

$\therefore$ 根据题意可知, 这两条抛物线的形状不变, 开口方向相反,

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y=\frac{2}{3}(x-1)^2-\frac{8}{9}$;

② 设直线 l 与 y 轴的交点为 $(0, m)$,

$\therefore P\left(1, \frac{8}{3}\right)$ 关于直线 l 的对称点为 $\left(1, 2m-\frac{8}{3}\right)$,

$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y=\frac{2}{3}(x-1)^2+2m-\frac{8}{3}$,

∵它经过原点,

$$\therefore 0 = \frac{2}{3} + 2m - \frac{8}{3},$$

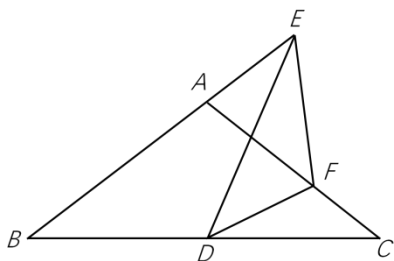
解得 $m = 1$,

$$\text{令 } y = 1, \text{ 代入 } y = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3},$$

$$\text{得 } x_1 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2},$$

∴新抛物线在直线 l 上所截得的线段长为 $\sqrt{10}$.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, D 是 BC 中点, E 在 BA 延长线上, F 在 AC 边上 (F 不与点 A 、 C 重合), $\angle EDF = \angle B$.



(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle CFD$;

(2) 求证: ED 平分 $\angle BEF$;

(3) 设 $CF = x$, $EF = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

(4) 连接 AD 、 CE , 如果四边形 $ADCE$ 有两个内角互补, 求 CF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

$$(3) \quad y = x + \frac{16}{x} - \frac{32}{5} \left(0 < x < \frac{16}{5} \right)$$

$$(4) \quad \frac{5}{2} \text{ 或 } \frac{8}{5}$$

【解析】

【分析】(1) 根据等边对等角可得 $\angle B = \angle C$, 根据三角形外角的性质可得 $\angle CDF = \angle BED$, 结合相似三角形的判定即可求解;

(2) 根据 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$, 得到 $\frac{DE}{DF} = \frac{BE}{BD}$, 即 $\frac{DE}{BE} = \frac{DF}{BD}$, 可证 $\triangle BDE \sim \triangle DFE$, 得到

$\angle BEA = \angle FED$, 即 ED 平分 $\angle BEF$, 即可求解;

(3) 根据相似三角形的判定和性质得到 $\triangle CFD \sim \triangle DFE$, 则 $\frac{DF}{EF} = \frac{CF}{DF}$, 即 $DF^2 = EF \cdot CF = xy$, 如图所示, 连接 AD , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H , 由勾股定理可得 $DC = 4$, $AD \perp BC$, $AD = 3$, 根据三角函数的计算得到 $\tan C = \frac{3}{4}$, $\cos C = \frac{4}{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle FHC$ 中, $CF = x$, $\cos C = \frac{CH}{CF} = \frac{4}{5}$, $\tan C = \frac{FH}{CH} = \frac{3}{4}$, 可求出 $CH = \frac{4}{5}x$, $FH = \frac{3}{5}x$, 则 $DH = 4 - \frac{4}{5}x$, 在 $\text{Rt}\triangle DFH$ 中, 由勾股定理可得 $DF^2 = FH^2 + DH^2 = x^2 - \frac{32}{5}x + 16$, 所以有 $x^2 - \frac{32}{5}x + 16 = x \cdot y$, 由此即可求解;

(4) 由 (3) 可知 $\angle ADC = 90^\circ$, 分类讨论: 第一种情况, 如果 $\angle ADC$ 与 $\angle AEC$ 互补, 则 $\angle AEC = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, 由三角函数的计算可得 $BE = BC \cdot \cos B = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$, 结合 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$, 可求解; 第二种情况, 如果 $\angle ADC$ 与 $\angle DCE$ 互补, 即 $\angle DCE = 90^\circ$, 则 $AD \parallel EC$, 由题意可得点 A 也是 BE 的中点, 即 $BE = 2AB = 10$, 结合 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$, 可求解; 第三种情况, $\angle DAE$ 一定是钝角, 则 $\angle DAE + \angle ADC > 180^\circ$ (舍); 由此即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle EDC = \angle EDF + \angle CDF, \angle EDC = \angle B + \angle BED,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = \angle B,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle BED,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CFD;$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle BDE \sim \triangle CFD$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{BE}{CD},$$

$\because D$ 是 BC 中点,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{BE}{BD}, \text{ 即 } \frac{DE}{BE} = \frac{DF}{BD},$$

$$\therefore \angle EDF = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle DFE,$$

$\therefore \angle BEA = \angle FED$, 即 ED 平分 $\angle BEF$;

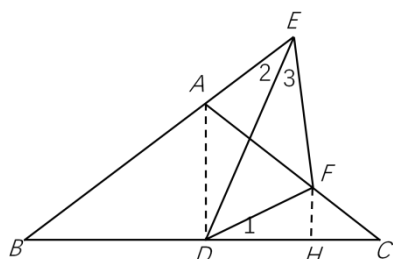
【小问 3 详解】

解: $\because \triangle BDE \sim \triangle CFD, \triangle BDE \sim \triangle DFE,$

$\therefore \triangle CFD \sim \triangle DFE,$

$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{CF}{DF},$ 即 $DF^2 = EF \cdot CF = xy,$

如图所示, 连接 AD , 过点 F 作 $FH \perp BC$ 于点 H ,



第 25 题图

$\because AB = AC, D$ 是 BC 中点, $BC = 8,$

$\therefore DC = 4, AD \perp BC,$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC = 5,$

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$

$\therefore \tan C = \frac{3}{4}, \cos C = \frac{4}{5},$

在 $\text{Rt}\triangle FHC$ 中, $CF = x, \cos C = \frac{CH}{CF} = \frac{4}{5}, \tan C = \frac{FH}{CH} = \frac{3}{4},$

$\therefore CH = \frac{4}{5}CF = \frac{4}{5}x, FH = \frac{3}{4}CH = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}x = \frac{3}{5}x,$

$\therefore DH = 4 - \frac{4}{5}x,$

在 $\text{Rt}\triangle DFH$ 中, $DF^2 = FH^2 + DH^2 = \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^2 = x^2 - \frac{32}{5}x + 16,$

$\because EF = y, DF^2 = EF \cdot CF,$

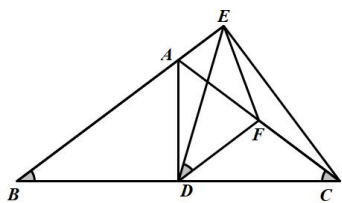
$\therefore x^2 - \frac{32}{5}x + 16 = x \cdot y,$

$\therefore y = x + \frac{16}{x} - \frac{32}{5} \left(0 < x < \frac{16}{5}\right).$

【小问 4 详解】

解: 由 (3) 可知 $\angle ADC = 90^\circ,$

第一种情况, 如果 $\angle ADC$ 与 $\angle AEC$ 互补, 则 $\angle AEC = 90^\circ,$



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{4}{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $BE = BC \cdot \cos B = 8 \times \frac{4}{5} = \frac{32}{5}$,

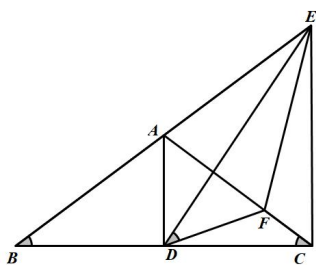
$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CFD$,

$$\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{BD}{CF},$$

$$\therefore \frac{\frac{32}{5}}{4} = \frac{4}{CF},$$

解得 $CF = \frac{5}{2}$;

第二种情况, 如果 $\angle ADC$ 与 $\angle DCE$ 互补, 即 $\angle DCE = 90^\circ$, 则 $AD \parallel EC$,



$\therefore$ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore$ 点 A 也是 BE 的中点, 即 $BE = 2AB = 10$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CFD$,

$$\therefore \frac{BE}{DC} = \frac{BD}{CF},$$

$$\therefore \frac{10}{4} = \frac{4}{CF},$$

解得 $CF = \frac{8}{5}$;

第三种情况, $\therefore \angle DAE$ 一定是钝角,

$\therefore \angle DAE + \angle ADC > 180^\circ$ (舍).

综上所述, 当四边形 $ADCE$ 有两个内角互补时, CF 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{8}{5}$.

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 函数解析式的计算, 解

直角三角形的计算，掌握相似三角形的判定和性质，解直角三角形的计算是解题的关键.