

2023-2024 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列命题中，真命题是（ ）

- A. 两个直角三角形一定相似
- B. 两个等腰三角形一定相似
- C. 两个钝角三角形一定相似
- D. 两个等边三角形一定相似

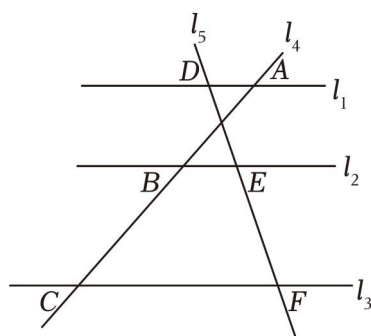
2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ，那么 $\cos A$ 的值是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

3.（4 分）下列说法错误的是（ ）

- A. 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- B. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$
- C. 如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$ （ $\vec{b}$ 为非零向量），那么 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$
- D. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$ ， $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ （ $\vec{c}$ 为非零向量），那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行

4.（4 分）如图，已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 l_4 ， l_5 分别交直线 l_1 ， l_2 ， l_3 于点 A 、 B 、 C ，交直线 l_5 于点 D 、 E 、 F ，那么下列比例式正确的是（ ）



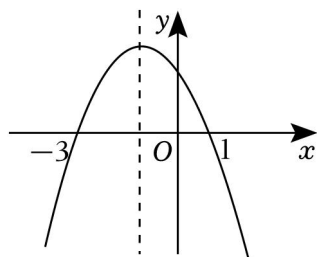
- A. $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$
- B. $\frac{AB}{DE} = \frac{BE}{AD}$
- C. $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{EF}$
- D. $\frac{DF}{EF} = \frac{CF}{BE}$

5.（4 分）已知二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x$ ，下列关于函数图象的说法正确的是（ ）

- A. 对称轴是直线 $x = -1$
- B. 图象经过原点
- C. 开口向上
- D. 图象有最低点

6.（4 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ （ $a \neq 0$ ）的图象经过（1，

0), $(-3, 0)$, 如果实数 P 表示 $9a - 3b + c$ 的值, 实数 Q 表示 $-a - b$ 的值, 那么 P 、 Q 的大小关系为 ()



- A. $P > Q$ B. $P = Q$ C. $P < Q$ D. 无法确定

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 计算: $1^0 \times 2^{-1} =$ _____.

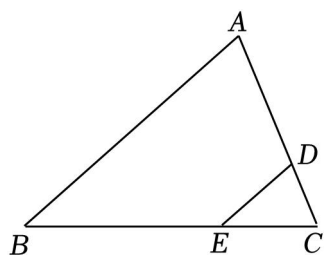
8. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, 那么 $\frac{a+b}{b} =$ _____.

9. (4 分) 计算: $(\vec{a} + \vec{b}) - (\frac{7}{2}\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.

10. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\tan B = 2$, $BC = 2$, 那么 $AC =$ _____.

11. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 点 E 在边 BC 上, $DE \parallel AB$, $AD: AC = 2:$

3, 那么 $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\text{梯形} ABED}}$ 的值为 _____.



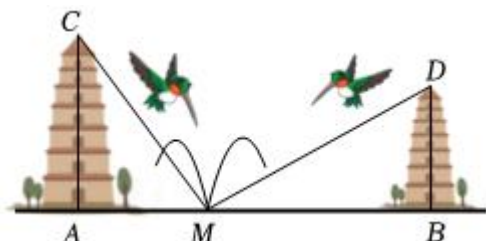
12. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 4x$ 向上平移 2 个单位, 平移后的抛物线的顶点坐标是 _____.

13. (4 分) 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = -4$, 如果点 $A(0, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 在此抛物线上, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=” 或 “<”)

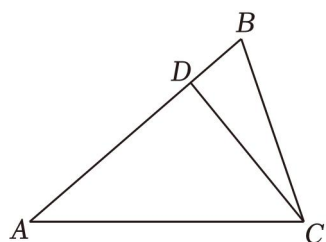
14. (4 分) 小明沿斜坡坡面向前进了 5 米, 垂直高度上升了 1 米, 那么这个斜坡的坡比是 _____.

15. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 如果 $x_1 < x_2 < 0$, $0 < y_1 < y_2$, 那么 k _____ 0. (填 “>” 或 “<”)

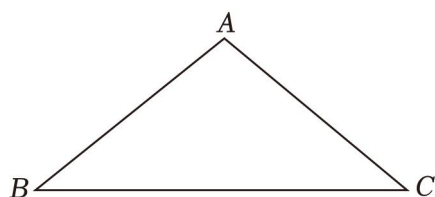
16. (4分) “二鸟饮泉”问题中记载: “两塔高分别为 30 步和 20 步. 两塔之间有喷泉, 两鸟从两塔顶同时出发, 以相同速度沿直线飞往喷泉中心, 同时抵达. 喷泉与两塔在同一平面内, 求两塔之间的距离.” 如图, 已知 $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, M 是 AB 上一点, $CM = DM$, 在 C 处测得点 M 的俯角为 60° , $AC = 30$, $BD = 20$, 那么 AB = _____.



17. (4分) 新定义: 如果等腰三角形腰上的中线与腰的比值为黄金分割数 (黄金数), 那么称这个等腰三角形为 “精准三角形”. 如图, $\triangle ABC$ 是 “精准三角形”, $AB = AC = 2$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 那么 BD 的长度为 _____.



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\tan C = \frac{3}{4}$, 点 D 为边 BC 上的点, 联结 AD , 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折, 点 B 落在平面内点 E 处, 边 AE 交边 BC 于点 F , 联结 CE , 如果 $AF = 3FE$, 那么 $\tan \angle BCE$ 的值为 _____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

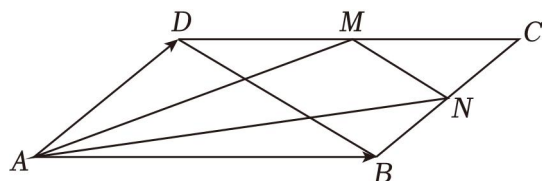
19. (10分) 计算: $\sin 30^\circ - \cot 60^\circ + 8\frac{1}{3} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

20. (10分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 M , N 分别是边 DC 、 BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

(1) $\overrightarrow{DB} =$ _____, $\overrightarrow{MN} =$ _____; (用含有向量 $\vec{a}$ 、

$\vec{b}$ 的式子表示)

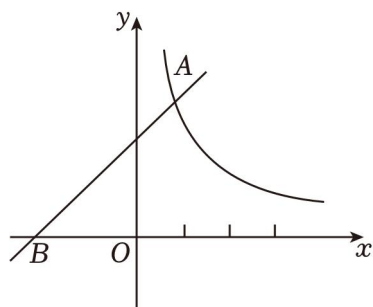
(2) 在图中画出 $\vec{AN}$ 在向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并写明结论)



21. (10分) 如图, 在坐标平面 xOy 中, 一次函数 $y = x + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于点 $A(a, 3)$, 与 x 轴交于点 B .

(1) 求这个反比例函数的解析式;

(2) 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为点 C , 将一次函数图象向右平移, 且经过点 C , 求平移后的一次函数的解析式.

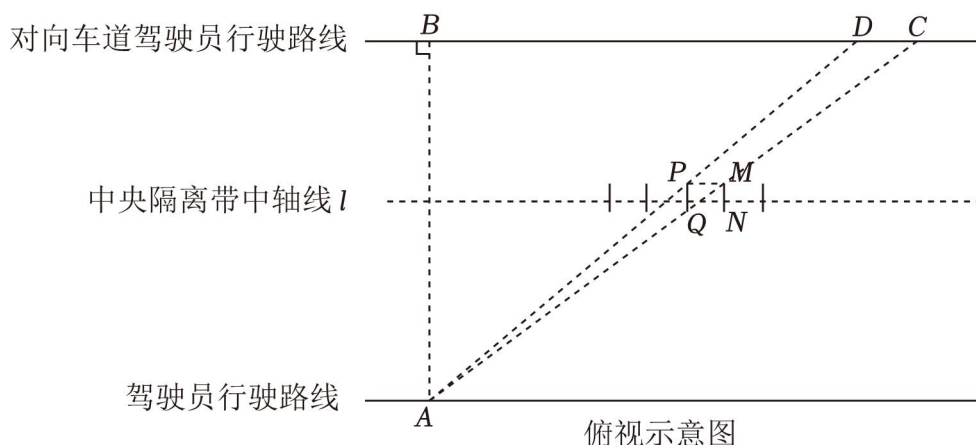


22. (10分) 诱发高速公路夜间行车安全事故的一个重要原因是眩光现象. 夜间会车时, 对向车辆车灯的强光射向驾驶员, 存在安全隐患. 目前主要措施是设置防眩装置遮挡车辆灯光, 避免强光射向对向车道的驾驶员.

如图所示, 一条东西方向的双向笔直道路, 中央隔离带中轴线 l 垂直平分每块遮光板, 遮光板宽度是 0.2 米, 即 $PQ = MN = 0.2$ 米. 一辆摩托车自西向东行驶, 车灯位于点 A 时, 车灯发出的光线 AC 经过相邻 2 个遮光板外侧的点 Q 和点 M , 光线 AD 经过遮光板外侧的点 P , 点 D 和点 C 在对向车道驾驶员行驶路线上. $AB \perp DC$ 于点 B , 两侧驾驶员行驶路线之间的距离 $AB = 4$ 米, 光线和行驶路线的夹角 $\angle BDA = 11.4^\circ$, 点 A, B, C, D, P, Q, M, N 在同一平面内. (参考数据: $\tan 11.4^\circ \approx \frac{1}{5}$)

(1) BD 的长度是多少米?

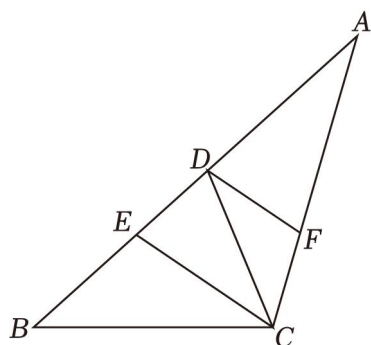
(2) 相邻遮光板的距离 PM 是多少米?



23. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 在边 AB 上, $AC^2 = AD \cdot AB$, $AC = AE$, 过点 D 作 $DF \parallel CE$ 交边 AC 于点 F .

(1) 求证: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$;

(2) 求证: $AE \cdot EB = AB \cdot FC$.

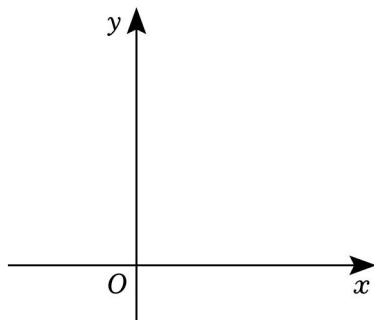


24. (12分)

如果两个二次函数图象的形状相同, 开口方向相同, 那么它们的二次项系数相等;
如果两个二次函数图象的形状相同, 开口方向相反, 那么它们的二次项系数是互为相反数.

已知, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(8, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, 6)$. 抛物线 $C_1: y = -ax^2 + 2x$ 上有一点 P , 以点 P 为顶点的抛物线 C_2 经过点 B (点 P 与点 B 不重合), 抛物线 C_1 和 C_2 形状相同, 开口方向相反.

- (1) 当抛物线 C_1 经过点 A 时, 求抛物线 C_1 的表达式;
- (2) 求抛物线 C_2 的对称轴;
- (3) 当 $a < 0$ 时, 设抛物线 C_1 的顶点为 Q , 抛物线 C_2 的对称轴与 x 轴的交点为 F , 联结 PQ 、 QO 、 FQ , 求证: QO 平分 $\angle PQF$.



25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 AC , BC 为边在 $\triangle ABC$ 外部作等边三角形 ACE 和等边三角形 BCF , 且联结 EF .

(1) 如图 1, 联结 AF , EB , 求证: $\triangle ECB \cong \triangle ACF$;

(2) 如图 2, 延长 AC 交线段 EF 于点 M .

①当点 M 为线段 EF 中点时, 求 $\frac{AC}{BC}$ 的值;

②请用直尺和圆规在直线 AB 上方作等边三角形 ABD (不要求写作法, 保留作图痕迹, 并写明结论), 当点 M 在 $\triangle ABD$ 的内部时, 求 $\frac{AC}{BC}$ 的取值范围.

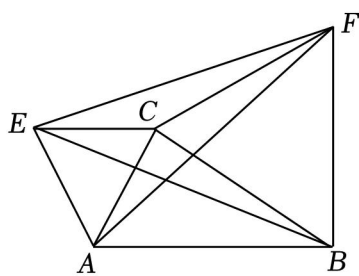


图1

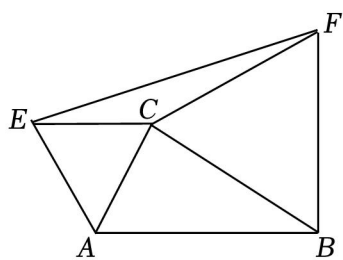
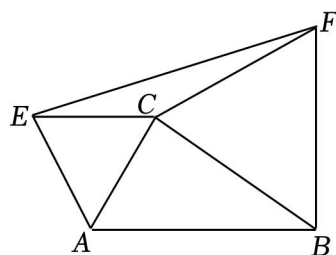


图2



备用图

2023-2024 学年上海市闵行区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列命题中，真命题是（ ）

- A. 两个直角三角形一定相似
- B. 两个等腰三角形一定相似
- C. 两个钝角三角形一定相似
- D. 两个等边三角形一定相似

【分析】根据相似三角形的判定定理对各个选项进行分析即可．

【解答】解：A，不正确，不符合三角形相似的判定方法，是假命题，不符合题意；

B，不正确，没有指明相等的角或边的比例，是假命题，不符合题意；

C，不正确，没有指明另一个锐角或边的比例，是假命题，不符合题意；

D，正确，等边三角形的三个角均相等，能通过有两个角相等的三角形相似来判定，是真命题，符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查命题和定理，三角形相似的判定，正确记忆相关内容是解题关键．

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ，那么 $\cos A$ 的值是（ ）

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【分析】根据直角三角形中余弦的定义 $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$ 计算即可．

【解答】解：根据题意，得 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$ ，

故选：B．

【点评】本题考查锐角三角函数的定义，掌握在直角三角形中计算锐角三角函数的方法是本题的关键．

3.（4 分）下列说法错误的是（ ）

A. 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

B. 如果 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$

C. 如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$

D. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ($\vec{c}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行

【分析】根据平面向量的运算法则逐一判断即可.

【解答】解: 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 都是单位向量, 那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$,

故 A 选项正确, 不符合题意;

如果 $k\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$,

故 B 选项正确, 不符合题意;

如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$,

故 C 选项不正确, 符合题意;

$\because \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$ ($\vec{c}$ 为非零向量),

$\therefore 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} - \vec{b})$,

即 $3\vec{a} + 3\vec{b} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$,

$\therefore \vec{a} = -5\vec{b}$,

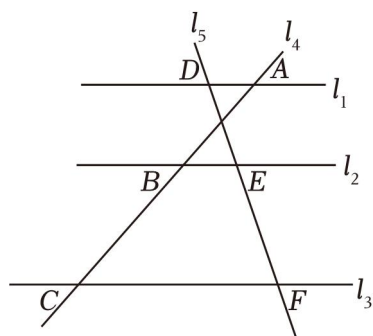
$\therefore \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行.

故 D 选项正确, 不符合题意.

故选: C.

【点评】本题考查平面向量, 熟练掌握平面向量的运算法则是解答本题的关键.

4. (4 分) 如图, 已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 直线 l_4 , l_5 分别交直线 l_1 于点 A、B、C, 交直线 l_2 于点 D、E、F, 那么下列比例式正确的是 ()



A. $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$

B. $\frac{AB}{DE} = \frac{BE}{AD}$

C. $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{EF}$

D. $\frac{DF}{EF} = \frac{CF}{BE}$

【分析】根据平行线分线段成比例定理列出比例式即可判断.

【解答】解：∵ $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

∴ $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$, A 选项符合题意;

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, B 选项不符合题意;

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, C 选项不符合题意;

$\frac{DF}{EF} = \frac{AC}{BC}$, D 选项不符合题意;

故选: A .

【点评】本题考查的是平行线分线段成比例定理, 灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

5. (4分) 已知二次函数的解析式为 $y = -x^2 + 2x$, 下列关于函数图象的说法正确的是 ()

A. 对称轴是直线 $x = -1$

B. 图象经过原点

C. 开口向上

D. 图象有最低点

【分析】依据题意, 将二次函数解析式化为顶点式求解.

【解答】解: ∵ $y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$,

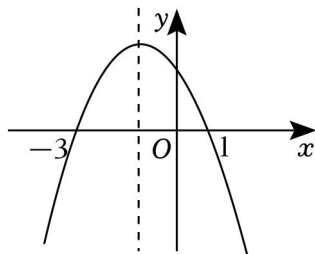
∴ 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = 1$, 顶点坐标为 $(1, 1)$, 函数图象有最高点 $(1, 1)$,

当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 即图象过原点.

故选: B .

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系.

6. (4分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过 $(1, 0)$, $(-3, 0)$, 如果实数 P 表示 $9a - 3b + c$ 的值, 实数 Q 表示 $-a - b$ 的值, 那么 P 、 Q 的大小关系为 ()



A. $P > Q$

B. $P = Q$

C. $P < Q$

D. 无法确定

【分析】根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过 $(1, 0)$, $(-3, 0)$, 得 $P = 9a - 3b + c = 0$, 对称轴为直线 $x = -1$, 根据抛物线开口向下, 得 $a < 0$, $b < 0$, 所以 $Q = -a - b > 0$, 即可得出答案.

【解答】解：∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过 $(1, 0)$, $(-3, 0)$,

$$\therefore P = 9a - 3b + c = 0, \text{ 对称轴为直线 } x = \frac{-3+1}{2} = -1,$$

∵抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a < 0,$$

$$\therefore Q = -a - b > 0,$$

$$\therefore P < Q.$$

故选：C.

【点评】本题考查了二次函数的图象和二次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握二次函数图象与系数是解题的关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 计算： $1^0 \times 2^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

【分析】根据零指数和负整数指数幂公式可解答.

【解答】解： $1^0 \times 2^{-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了零指数和负整数指数幂，掌握 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数) 是解本题的关键.

8. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, 那么 $\frac{a+b}{b} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$.

【分析】根据比例的性质“如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那么 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ” 计算即可.

【解答】解：∵ $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{1+3}{3},$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{4}{3}.$$

故答案为： $\frac{4}{3}$

【点评】本题考查比例的性质，理解并灵活运用它是本题的关键.

9. (4分) 计算: $(\vec{a} + \vec{b}) - (\frac{7}{2}\vec{a} - 2\vec{b}) = -\frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

【分析】根据平面向量的运算法则计算即可.

【解答】解: $(\vec{a} + \vec{b}) - (\frac{7}{2}\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} + \vec{b} - \frac{7}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$
 $= \vec{a} - \frac{7}{2}\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{b}$
 $= -\frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b}.$

故答案为: $-\frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b}.$

【点评】本题考查平面向量, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

10. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\tan B = 2$, $BC = 2$, 那么 $AC = 4$.

【分析】利用正切的定义计算即可.

【解答】解: $\because \tan B = \frac{AC}{BC} = 2,$

$\therefore AC = 2BC,$

$\because BC = 2,$

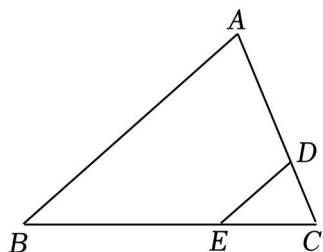
$\therefore AC = 4,$

故答案为: 4.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义, 熟练掌握并灵活运用各锐角三角函数的定义是解题的关键.

11. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 点 E 在边 BC 上, $DE \parallel AB$, $AD: AC = 2:$

3, 那么 $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\text{梯形}ABED}}$ 的值为 $-\frac{1}{8}$.



【分析】根据平行线可推出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 依据面积比等于相似比的平方进行解答即可.

【解答】解: $\because DE \parallel BC,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\because AD: AC = 2: 3,$$

$$\therefore CD: AC = 1: 3,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\text{梯形}ABED}} = \frac{1}{8},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{8}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定及性质，熟记面积比等于相似比的平方是解题的关键.

12. (4分) 将抛物线 $y = x^2 + 4x$ 向上平移 2 个单位，平移后的抛物线的顶点坐标是 $(-2, -2)$.

【分析】 依据题意，直接利用抛物线平移规律：上加下减，左加右减进而得出平移后的解析式，即可得出顶点坐标.

【解答】 解： $\because$ 将抛物线 $y = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$ 向上平移 2 个单位，

$\therefore$ 平移后的抛物线的解析式为： $y = (x+2)^2 - 4 + 2 = (x+2)^2 - 2$.

$\therefore$ 平移后的抛物线的顶点坐标为： $(-2, -2)$.

故答案为： $(-2, -2)$.

【点评】 本题主要考查了二次函数图象的平移变换，解题时要熟练掌握并能正确理解平移规律是关键.

13. (4分) 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴是直线 $x = -4$ ，如果点 $A(0, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 在此抛物线上，那么 y_1 $<$ y_2 . (填“ $>$ ”、“ $=$ ”或“ $<$ ”)

【分析】 依据题意，首先利用对称轴和二次项系数的符号确定增减性，然后写出答案即可.

【解答】 解： $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = -4$ ， $a = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 当 $x > -4$ 时， y 随着 x 的增大而增大.

$$\because -4 < 0 < 1,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为： $<$.

【点评】 本题主要考查了二次函数的性质，解题时要熟练掌握并能理解函数的增减性是关键.

14. (4分) 小明沿斜坡坡面向上前进了5米，垂直高度上升了1米，那么这个斜坡的坡比是 $1:2\sqrt{6}$.

【分析】 由勾股定理求出小明行走的水平距离，由坡比的定义即可计算.

【解答】 解：由勾股定理得：小明行走的水平距离是 $\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$ (米)，

$\therefore$ 这个斜坡的坡比 $i=1:2\sqrt{6}$.

故答案为： $1:2\sqrt{6}$.

【点评】 本题考查解直角三角形的应用—坡度坡角，关键是掌握斜坡的坡比的定义.

15. (4分) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$)，如果 $x_1<x_2<0$ ， $0<y_1<y_2$ ，那么 k $<$ 0. (填“ $>$ ”或“ $<$ ”)

【分析】 根据反比例函数图象上点的坐标特征可确定 k 的符号.

【解答】 解： $\because x_1<x_2<0$ ， $0<y_1<y_2$ ，

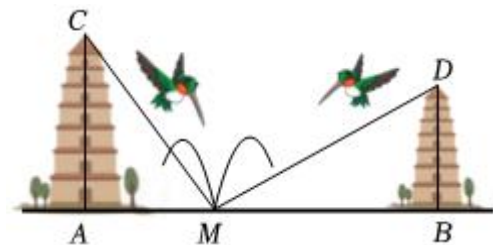
$\therefore$ 点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2) 在第二象限，

$\therefore k<0$.

故答案为： $<$.

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征和图象与 k 的关系，先根据题意判断出函数的图象所在的象限是解题的关键.

16. (4分) “二鸟饮泉”问题中记载：“两塔高分别为30步和20步. 两塔之间有喷泉，两鸟从两塔顶同时出发，以相同速度沿直线飞往喷泉中心，同时抵达. 喷泉与两塔在同一平面内，求两塔之间的距离.” 如图，已知 $AC\perp AB$ ， $BD\perp AB$ ， M 是 AB 上一点， $CM=DM$ ，在 C 处测得点 M 的俯角为 60° ， $AC=30$ ， $BD=20$ ，那么 $AB=\underline{10\sqrt{3}+20\sqrt{2}}$.



【分析】 先解 $Rt\triangle AMC$ ，求出 AM 和 CM ，再由 $DM=CM$ ，利用勾股定理求出 BM 即可解决问题.

【解答】 解：由题知，

$\therefore$ 在点 C 处测得点 M 的俯角为 60° ,

$$\therefore \angle C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACM$ 中,

$$\cos C = \frac{AC}{MC},$$

$$\text{又} \because AC = 30,$$

$$\therefore MC = 20\sqrt{3}.$$

$$\text{同理可得, } AM = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{又} \because CM = DM,$$

$$\therefore DM = 20\sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle BMD$ 中,

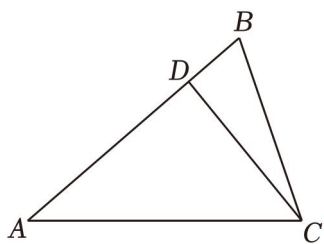
$$BM = \sqrt{MD^2 - BD^2} = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 - 20^2} = 20\sqrt{2}.$$

$$\therefore AB = AM + BM = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{2}.$$

$$\text{故答案为: } 10\sqrt{3} + 20\sqrt{2}.$$

【点评】 本题考查解直角三角形, 熟知特殊角的三角函数值及勾股定理的巧妙运用是解题的关键.

17. (4分) 新定义: 如果等腰三角形腰上的中线与腰的比值为黄金分割数 (黄金数), 那么称这个等腰三角形为“精准三角形”. 如图, $\triangle ABC$ 是“精准三角形”, $AB = AC = 2$, $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 那么 BD 的长度为 $\frac{5-2\sqrt{5}}{2}$.



【分析】 作 $\triangle ABC$ 的中线 CM , 由精准三角形的定义得到 $\frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 求出 CM 的长,

由线段中点定义得到 $AM = MB = \frac{1}{2}AB = 1$, 令 $DM = x$, 由勾股定理得到 $(\sqrt{5}-1)^2 - x^2 = 2^2 - (x+1)^2$, 求出 $x = \frac{2\sqrt{5}-3}{2}$, 得到 $DM = \frac{2\sqrt{5}-3}{2}$ 即可求出 BD 的长.

【解答】 解: 作 $\triangle ABC$ 的中线 CM ,

$\because \triangle ABC$ 是“精准三角形”,

$$\therefore \frac{CM}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore CM = \sqrt{5} - 1,$$

$\because M$ 是 AB 中点,

$$\therefore AM = MB = \frac{1}{2}AB = 1,$$

令 $DM = x$, 则 $AD = x+1$,

$$\because CD^2 = CM^2 - MD^2 = AC^2 - AD^2,$$

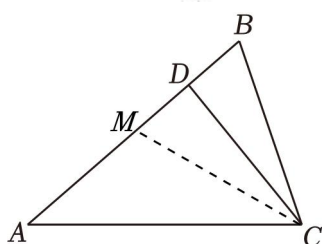
$$\therefore (\sqrt{5}-1)^2 - x^2 = 2^2 - (x+1)^2,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}-3}{2},$$

$$\therefore DM = \frac{2\sqrt{5}-3}{2},$$

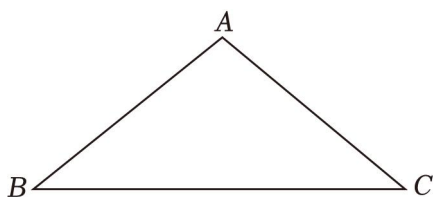
$$\therefore BD = MB - DM = \frac{5-2\sqrt{5}}{2}.$$

故答案为: $\frac{5-2\sqrt{5}}{2}$.



【点评】 本题考查勾股定理, 黄金分割, 等腰三角形的性质, 关键是由精准三角形的定义求出 CM 的长, 由勾股定理列出关于 x 方程.

18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\tan C = \frac{3}{4}$, 点 D 为边 BC 上的点, 联结 AD , 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折, 点 B 落在平面内点 E 处, 边 AE 交边 BC 于点 F , 联结 CE , 如果 $AF = 3FE$, 那么 $\tan \angle BCE$ 的值为 $-\frac{1}{7}$.



【分析】 先过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M , 过 E 作 $EN \perp BC$ 于 N , 再根据相似三角形的性质及解直角三角形求解.

【解答】解：如图所示：过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，过 E 作 $EN \perp BC$ 于 N ，

$$\therefore AM \parallel EN,$$

$$\therefore \triangle AMF \sim \triangle ENF,$$

$$\therefore \frac{AM}{EN} = \frac{AF}{EF} = 3,$$

$$\text{设 } AM = 3x,$$

$$\because \tan C = \frac{3}{4},$$

$$\therefore MC = 4x, AC = 5x,$$

$$\therefore EN = x,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折，点 B 落在平面内点 E 处，

$$\therefore AE = AB = AC = 5x,$$

$$\therefore AF = 3FE,$$

$$\therefore AF = \frac{3}{4} \times 5x = \frac{15x}{4},$$

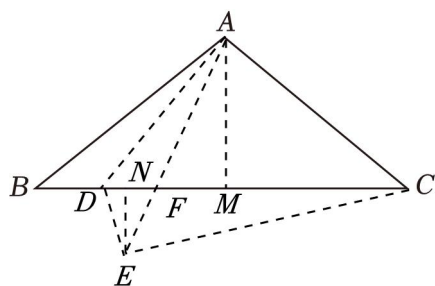
$$\therefore FM = \sqrt{AF^2 - AM^2} = \frac{9}{4}x,$$

$$\therefore NF = \frac{1}{3}FM = \frac{3}{4}x,$$

$$\therefore NC = NF + FM + MC = 7x,$$

$$\therefore \tan \angle BCE = \frac{EN}{CN} = \frac{x}{7x} = \frac{1}{7},$$

故答案为： $\frac{1}{7}$.



【点评】本题考查了翻折的性质，掌握等腰三角形的性质和解直角三角形是解题的关键．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\sin 30^\circ - \cot 60^\circ + 8^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

【分析】根据特殊角的三角函数值、分数指数幂和二次根式的分母有理化计算即可．

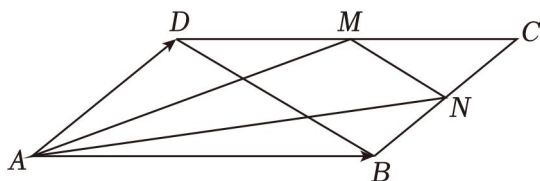
【解答】解：原式 $= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 - (2 + \sqrt{3})$
 $= \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{3}.$

【点评】本题考查分数指数幂、实数的运算和特殊角的三角函数值，牢记特殊角的三角函数值是本题的关键.

20. (10分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 M, N 分别是边 DC, BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

(1) $\overrightarrow{DB} = \underline{\quad} \vec{b} + \underline{\quad} \vec{a}$, $\overrightarrow{MN} = \underline{\quad} \vec{b} + \underline{\quad} \vec{a}$; (用含有向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的式子表示)

(2) 在图中画出 $\overrightarrow{AN}$ 在向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法，但要保留作图痕迹，并写明结论)



【分析】(1) 利用三角形法则求解；

(2) 利用平行四边形法则求解.

【解答】解：(1) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a}$,

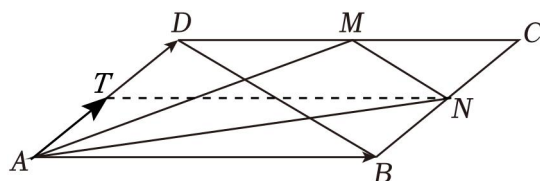
$\because CM = DM, CN = NB$,

$\therefore MN \parallel DB, MN = \frac{1}{2}DB$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

故答案为： $-\vec{b} + \vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$;

(2) 如图， $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AT}$ 即为所求.



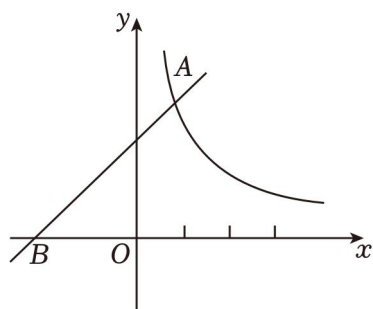
【点评】本题考查作图 - 复杂作图，三角形中位线定理，平行四边形的性质，三角形法则等知识，解题的关键是掌握三角形法则，平行四边形法则.

21. (10分) 如图, 在坐标平面 xOy 中, 一次函数 $y = x + 2$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

的图象交于点 $A(a, 3)$, 与 x 轴交于点 B .

(1) 求这个反比例函数的解析式;

(2) 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴, 垂足为点 C , 将一次函数图象向右平移, 且经过点 C , 求平移后的一次函数的解析式.



【分析】 (1) 把点 $A(a, 3)$ 代入 $y = x + 2$ 得到 $a = 1$, 把 $A(1, 3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 求得 $k = 3$, 于是得到结论;

(2) 根据平移前后的一次函数的解析式 k 相等, 设平移后的一次函数的解析式为: $y = x + b$, 将点 C 的坐标代入可得结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 点 $A(a, 3)$ 在 $y = x + 2$ 上,

$$\therefore a + 2 = 3,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore A(1, 3),$$

$$\because A(1, 3) \text{ 在 } y = \frac{k}{x} \text{ 上},$$

$$\therefore k = 3,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为: } y = \frac{3}{x};$$

(2) 设平移后的一次函数的解析式为: $y = x + b$,

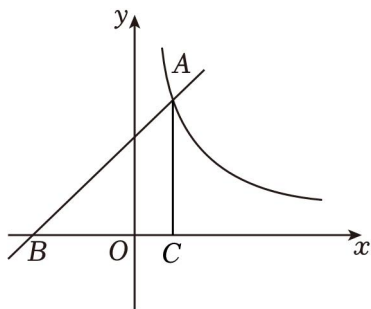
$$\because AC \perp x \text{ 轴, 且 } A(1, 3),$$

$$\therefore C(1, 0),$$

把点 $C(1, 0)$ 代入 $y = x + b$ 中, 得: $0 = 1 + b$,

$$\therefore b = -1,$$

$\therefore$ 平移后的一次函数的解析式为: $y = x - 1$.



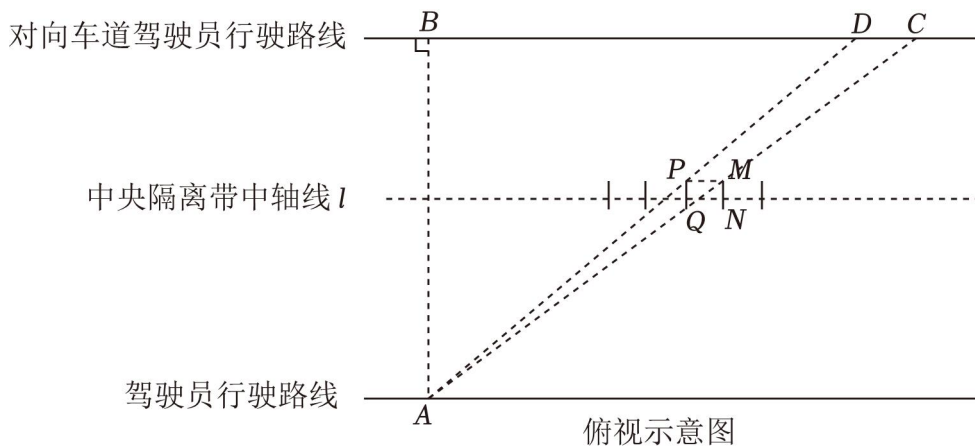
【点评】 本题考查了待定系数法求函数的解析式，正确的理解题意是解题的关键．

22. (10 分) 诱发高速公路夜间行车安全事故的一个重要原因是眩光现象．夜间会车时，对向车辆车灯的强光射向驾驶员，存在安全隐患．目前主要措施是设置防眩装置遮挡车辆灯光，避免强光射向对向车道的驾驶员．

如图所示，一条东西方向的双向笔直道路，中央隔离带中轴线 l 垂直平分每块遮光板，遮光板宽度是 0.2 米，即 $PQ = MN = 0.2$ 米．一辆摩托车自西向东行驶，车灯位于点 A 时，车灯发出的光线 AC 经过相邻 2 个遮光板外侧的点 Q 和点 M ，光线 AD 经过遮光板外侧的点 P ，点 D 和点 C 在对向车道驾驶员行驶路线上． $AB \perp DC$ 于点 B ，两侧驾驶员行驶路线之间的距离 $AB = 4$ 米，光线和行驶路线的夹角 $\angle BDA = 11.4^\circ$ ，点 A, B, C, D, P, Q, M, N 在同一平面内．(参考数据： $\tan 11.4^\circ \approx \frac{1}{5}$)

(1) BD 的长度是多少米？

(2) 相邻遮光板的距离 PM 是多少米？





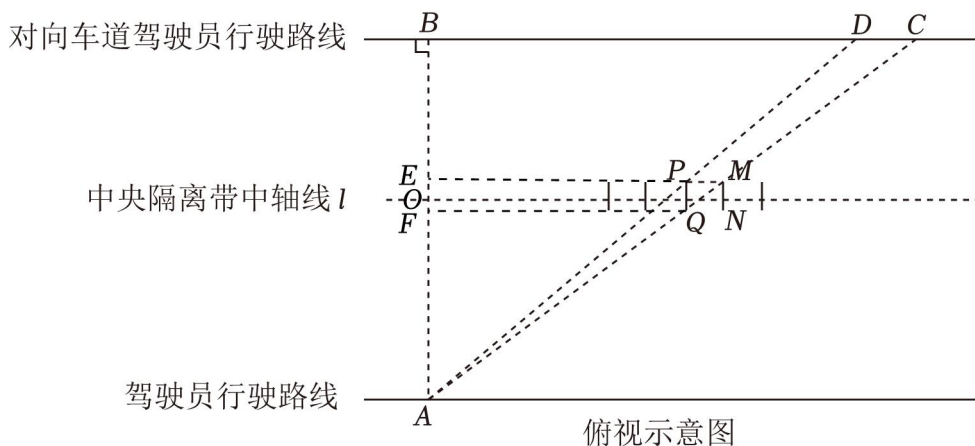
【分析】（1）根据锐角三角函数的定义求解即可；

（2）过 P 作 $PE \perp AB$ 于 E ，过 Q 作 $QF \perp AB$ 于 F ，中轴线 l 与 AB 交于点 O ，然后根据平行线的性质求出 PE 的长，再根据矩形的判定与性质求出 AF 以及 QF 的长，最后根据平行线的性质，求出 $\tan \angle PMQ$ ，从而可以求出 PM 。

【解答】解：（1） $\tan \angle BDA = \frac{AB}{BD} \approx \frac{1}{5}$ ，

$\therefore BD = 5AD = 20$ （米）；

（2）过 P 作 $PE \perp AB$ 于 E ，过 Q 作 $QF \perp AB$ 于 F ，中轴线 l 与 AB 交于点 O ，如图：



$\because AB \perp BC$,

$\therefore BD \parallel PE \parallel QF$,

$\therefore \angle EPA = \angle BDA$,

$\because EF \parallel PQ$,

$\therefore$ 四边形 $EFQP$ 为矩形，

$\therefore EF = PQ$, $PE = QF$,

$\because O$ 是 AB 中点，也是 EF 的中点，

$\therefore AE = AO + OE = 2 + 0.1 = 2.1$ 米， $AF = AO - OF = 2 - 0.1 = 1.9$ （米），

$\therefore PE = 5AE = 10.5$ 米，

$$\therefore \tan \angle FQA = \frac{AF}{QF} = \frac{1.9}{10.5} = \frac{19}{105},$$

$$\because PM \parallel QF,$$

$$\therefore \angle PMQ = \angle FQA,$$

$$\therefore PM = \frac{PQ}{\tan \angle PMQ} = 0.2 \times \frac{105}{19} = \frac{21}{19} \text{ (米)}.$$

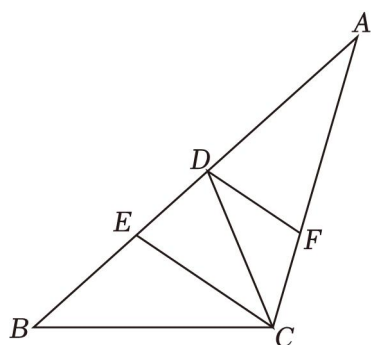
答：相邻遮光板的距离 PM 是 $\frac{21}{19}$ 米。

【点评】 本题主要考查了解直角三角形，正确理解锐角三角形正切的定义是本题解题的关键。

23. (12分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 在边 AB 上， $AC^2 = AD \cdot AB$ ， $AC = AE$ ，过点 D 作 $DF \parallel CE$ 交边 AC 于点 F 。

(1) 求证： $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ ；

(2) 求证： $AE \cdot EB = AB \cdot FC$ 。



【分析】 (1) 根据“两组对边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似”即可得解；

(2) 根据平行线分线段成比例定理求出 $DE = FC$ ，根据比例性质及等量代换求解即可。

【解答】 证明：(1) $\because AC^2 = AD \cdot AB$,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\text{又} \because \angle CAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC;$$

$$(2) \because DF \parallel CE,$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{FC}{AC},$$

$$\because AC = AE,$$

$$\therefore DE = FC,$$

$$\therefore AC = AE = AB - DE, \quad AD = AE - DE = AE - FC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \frac{AB-BE}{AB} = \frac{AE-FC}{AE},$$

$$\therefore AB \cdot AE - BE \cdot AE = AB \cdot AE - AB \cdot FC,$$

$$\therefore AE \cdot EB = AB \cdot FC.$$

【点评】 此题考查了相似三角形的判定与性质，熟记相似三角形的判定与性质是解题的关键.

24. (12 分)

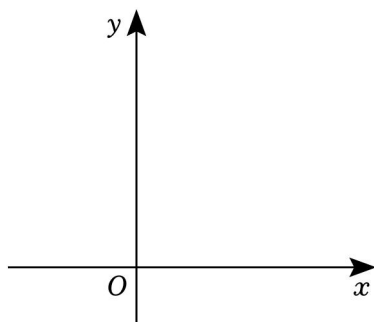
如果两个二次函数图象的形状相同，开口方向相同，那么它们的二次项系数相等；
如果两个二次函数图象的形状相同，开口方向相反，那么它们的二次项系数是互为相反数.

已知，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(8, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(0, 6)$. 抛物线 $C_1: y = -ax^2 + 2x$ 上有一点 P ，以点 P 为顶点的抛物线 C_2 经过点 B (点 P 与点 B 不重合)，抛物线 C_1 和 C_2 形状相同，开口方向相反.

(1) 当抛物线 C_1 经过点 A 时，求抛物线 C_1 的表达式；

(2) 求抛物线 C_2 的对称轴；

(3) 当 $a < 0$ 时，设抛物线 C_1 的顶点为 Q ，抛物线 C_2 的对称轴与 x 轴的交点为 F ，联结 PQ 、 QO 、 FQ ，求证： QO 平分 $\angle PQF$.



【分析】 (1) 将点 A 的坐标代入抛物线 C_1 的解析式，求出 a 的值；

(2) 通过题意求出抛物线 C_2 的解析式，假设点 P 的坐标，代入抛物线 C_2 求出 m 的值，从而得到抛物线 C_2 的对称轴；

(3) 过点 Q 作 $QN \perp x$ 轴， $QM \perp y$ 轴，垂足分别为点 N ， M ， PQ 交 y 轴于点 E ，利用 a 表示点 P 、点 Q 的坐标，得到各边的数量关系，通过证明 $\triangle QOE \cong \triangle QOF$ ，得到 QO 平分 $\angle PQF$.

【解答】解：（1）将点 $A(8, 0)$ 代入抛物线 $C_1: y = -ax^2 + 2x$,

得 $-a \cdot 8^2 + 2 \times 8 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{4}$,

得抛物线 C_1 得表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$;

（2）由抛物线 C_1 和 C_2 形状相同, 开口方向相反, 设抛物线 C_2 得表达式为 $y = ax^2 + bx + c$,

把 $B(0, 6)$ 代入抛物线 $C_2: y = ax^2 + bx + c$, 得 $c = 6$,

则抛物线 C_2 得表达式为 $y = ax^2 + bx + 6$,

由点 P 在抛物线 C_1 上, 设点 P 的坐标为 $(m, -am^2 + 2m)$,

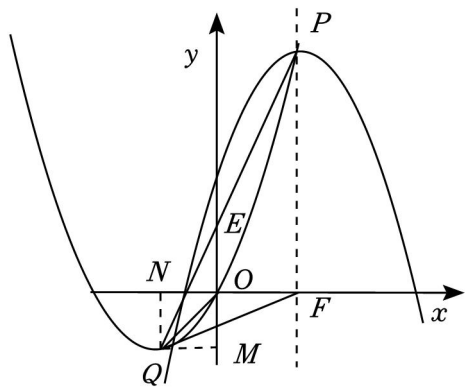
由点 P 是抛物线 C_2 的顶点, 得
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = m \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = -am^2 + 2m \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 3 \\ b = -6a \end{cases},$$

得点 P 的坐标为 $(3, -9a + 6)$,

即抛物线 C_2 的对称轴为直线 $x = 3$;

（3）由点 Q 是抛物线 C_1 的顶点, 得 $Q(\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$,

过点 Q 作 $QN \perp x$ 轴, $QM \perp y$ 轴, 垂足分别为点 N, M , PQ 交 y 轴于点 E , 如下图所示,



$$\therefore Q\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right),$$

$$\therefore OM = ON = \frac{1}{a},$$

$\therefore \triangle OQM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle QON = \angle QOM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle QON + \angle NOE = \angle QOM + \angle MOF, \text{ 即 } \angle QOE = \angle QOF,$$

设直线 PQ 表达式为 $y = kx + b$,

$$\text{代入 } Q\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right), P(3, -9a + 6), \text{ 得 } \begin{cases} k = 1 - 3a \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PQ 表达式为 $y = (1 - 3a)x + 3$,

把 $x = 0$ 代入 $y = (1 - 3a)x + 3$, 得 $y = 3$,

得点 E 的坐标为 $(0, 3)$,

$\therefore OE = OF$,

$\because OQ = OQ, \angle QOE = \angle QOF$,

$\therefore \triangle QOE \cong \triangle QOF$,

$\therefore \angle OQE = \angle OQF$,

$\therefore QO$ 平分 $\angle PQF$.

【点评】 本题考查待定系数法求函数解析式, 二次函数顶点的坐标, 全等三角形的性质与判定等知识点.

25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 AC, BC 为边在 $\triangle ABC$ 外部作等边三角形 ACE 和等边三角形 BCF , 且联结 EF .

(1) 如图 1, 联结 AF, EB , 求证: $\triangle ECB \cong \triangle ACF$;

(2) 如图 2, 延长 AC 交线段 EF 于点 M .

① 当点 M 为线段 EF 中点时, 求 $\frac{AC}{BC}$ 的值;

② 请用直尺和圆规在直线 AB 上方作等边三角形 ABD (不要求写作法, 保留作图痕迹, 并写明结论), 当点 M 在 $\triangle ABD$ 的内部时, 求 $\frac{AC}{BC}$ 的取值范围.

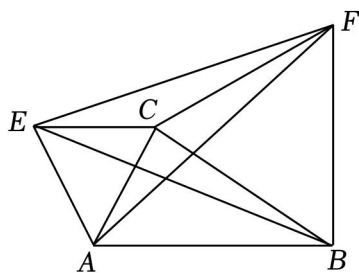


图1

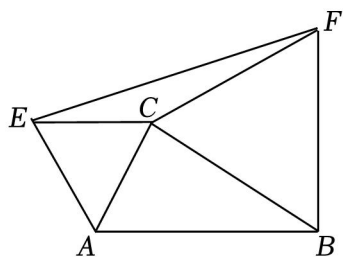
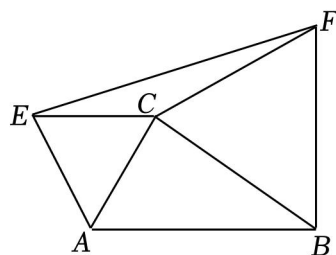


图2



备用图

【分析】 (1) 由等边三角形的性质得出相等的边和相等的角, 再利用角的和得出 $\angle BCE = \angle FCA$, 从而得出全等.

(2) ① 根据已知条件得出 $\triangle MDF \cong \triangle MCE$, 再根据得出的结论证明 $\triangle BCD \cong \triangle BFD$, 从而得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 求出即可.

② 作等边三角形, 由作法可以证明是等边三角形, 分类讨论当 M 在 AD 边上时, 当 M 在

BD 边上时, 分别求出 $\frac{AC}{BC}$ 的值, 即可得出 $\frac{AC}{BC}$ 的取值范围.

【解答】(1) 证明: $\because$ 等边三角形 ACE 和等边三角形 BCF ,

$$\therefore AC = EC, BC = FC, \angle ACE = \angle BCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle FCA,$$

$$\therefore \triangle ECB \cong \triangle ACF \text{ (SAS)};$$

(2) 解: ①如图 2, 延长 CM 到点 D , 使 $DM = CM$, 连接 FD 、 BD ,

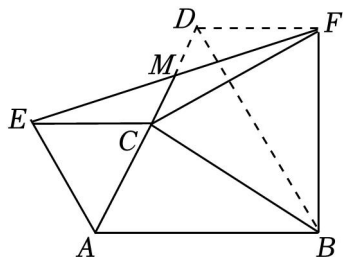


图2

$\because M$ 是 EF 的中点,

$$\therefore MF = ME,$$

$$\because \angle DMF = \angle CME,$$

$$\therefore \triangle MDF \cong \triangle MCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DF = CE, \angle MDF = \angle MCE,$$

$\because \triangle ACE, \triangle BCF$ 都是等边三角形,

$$\therefore AC = CE, \angle ACE = \angle BCF = \angle CBF = \angle BFC = 60^\circ, BC = BF,$$

$$\therefore \angle MDF = \angle MCE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, DF = AC,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle CBF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle BFD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\because BD = BD, BC = BF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle BFD \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BDF = 60^\circ, CD = FD = AC,$$

$\therefore BC$ 垂直平分 AD ,

$$\therefore AB = BD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}AC,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

②如图3，分别以 A 、 B 为圆心， AB 长为半径在 AB 上方画弧，两弧交于点 D ，连接 AD 、 BD ，

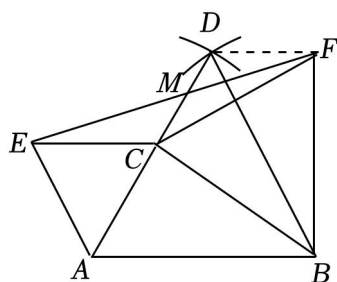


图3

则 $\triangle ABD$ 为所求作的等边三角形，

由作图可知 $AB = BD = AD$ ，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

当 M 在 AD 边上且为 EF 中点时，由①知：

$$\text{可得 } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

当 M 在 BD 边上时，假设 $AC = BC$ ，如图4，

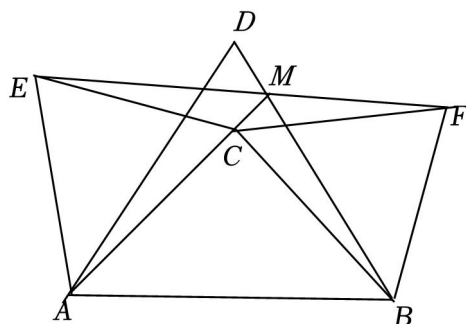


图4

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 为等边三角形， $AC = BC$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle BCF = 60^\circ$ ， $EC = FC$ ，

$\therefore \angle FCM = 30^\circ$ ， $\angle ECM = 120^\circ$ ， $\angle ECF = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle CEF = \angle CFE = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle EMC = 45^\circ$ ， $\angle CMF = 135^\circ$ ，

$\therefore \angle EMC + \angle CMF = 180^\circ$ ，

$\therefore$ 点 M 在线段 EF 上。

$$\begin{aligned}
&\because \angle ACB = 90^\circ, AC = BC, \\
&\therefore \angle CAB = \angle ABC = 45^\circ, \\
&\therefore \angle MAD = \angle CBD = 15^\circ, \\
&\therefore \angle DMC = 105^\circ, \angle CMB = 75^\circ, \\
&\therefore \angle DMC + \angle CMB = 180^\circ, \\
&\therefore AC = BC \text{ 时, } M \text{ 在 } BD \text{ 边上,} \\
&\therefore \text{此时 } \frac{AC}{BC} = 1, \\
&\therefore \frac{AC}{BC} \text{ 的取值范围是 } \frac{\sqrt{3}}{3} < t < 1.
\end{aligned}$$

【点评】此题是三角形综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质，等边三角形的性质，尺规作图，解题的关键是作辅助线，构造全等三角形．