

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

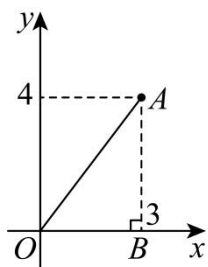
- 第 1 页 / 共 25 页

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题考查直角三角形的边角关系、勾股定理，通过作辅助线构造直角三角形是解决问题的关键，构造直角三角形，由坐标得出线段的长，再根据勾股定理求出斜边的长，根据余弦的意义求出结果即可．

【详解】 解：过点 A 作 $AB \perp x$ 轴，垂足为 B，



在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中，由题意得： $\angle AOB = \alpha$ ，

$\because A(3, 4)$ ，

$\therefore OB = 3$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\therefore \sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{4}{5}$ ，

故选： A．

3. 如果两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，那么下列说法正确的是（ ）

A. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$

B. $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$

C. $\vec{a} = 2\vec{b}$

D. $\vec{a} = -2\vec{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查向量的相关概念、向量的性质等知识点，掌握向量的概念是解题的关键．根据向量的概念及性质判断即可．

【详解】 解： $\because$ 两个非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向相反，且 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，

$\therefore \vec{a} = -2\vec{b}$ ，即 $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$ ．则 D 选项正确．

故选 D．

4. 已知二次函数 $y = -x^2 + 2x + 2$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，如果 $x_1 < x_2 < 0$ ，那么 y_1 、 y_2 的大小关系是（ ）

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 > y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了把 $y = ax^2 + bx + c$ 化成顶点式， $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象与性质，二次函数的图象与系数的关系等知识点，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

先将二次函数化成顶点式 $-(x-1)^2 + 3$ ，得出其对称轴和函数图象开口方向，然后利用二次函数的增减性即可得出答案.

【详解】解：∵ $y = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$ ， $a = -1 < 0$ ，

∴ 对称轴为直线 $x = 1$ ，且二次函数的图象开口向下，

∴ 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

∵ $x_1 < x_2 < 0 < 1$ ，

∴ $y_1 < y_2$ ，

故选：A.

5. 二次函数 $y = (a^2 + 1)x^2 - 3x + 1$ 的图象一定不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象与性质. 求出抛物线的图象和 x 轴的交点坐标和顶点坐标，再根据二次函数的性质判断即可.

【详解】解： $y = (a^2 + 1)x^2 - 3x + 1$ ，

∵ $a^2 + 1 > 0$ ，

∴ 开口向上，

∴ 对称轴为直线 $x = -\frac{-3}{2(a^2 + 1)} = \frac{3}{2(a^2 + 1)} > 0$ ，

∴ 对称轴直线为原点的右边，

当 $x = 0$ 时， $y = 1 > 0$ ，

∴ 抛物线与 y 轴的交点在原点的上方，

∴ 抛物线的图象过第一、二、四象限，不过第三象限.

故选: C.

6. 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 下列说法正确的是 ()

A. 如果 $OA \cdot BD = OD \cdot AC$, 那么 $AB \parallel CD$

B. 如果 $OA \cdot OC = OD \cdot OB$, 那么 $AB \parallel CD$

C. 如果 $OA \cdot OB = OD \cdot OC$, 那么 $AB \parallel CD$

D. 如果 $OA \cdot OD = OB \cdot OC$, 那么 $AB \parallel CD$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质定理是解题的关键. 根据相似三角形的判定和性质判断即可.

【详解】 解: A. $\because OA \cdot BD = OD \cdot AC$,

$$\therefore \frac{OA}{OD} = \frac{AC}{BD},$$

则不能得到 $AB \parallel CD$, 故不符合题意;

B. $\because OA \cdot OC = OD \cdot OB$,

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC},$$

$\because \angle AOB = \angle DOC$,

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC$,

不能得到 $AB \parallel CD$, 故不符合题意;

C. $\because OA \cdot OB = OD \cdot OC$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB},$$

$\because \angle AOD = \angle COB$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$,

$\therefore \angle OAD = \angle OCB$,

$\therefore AD \parallel BC$, 故不符合题意;

D. $\because OA \cdot OD = OB \cdot OC$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD},$$

$\because \angle AOB = \angle COD$,

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OCD,$$

$$\therefore AB \parallel CD, \text{ 故符合题意;}$$

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么 $\frac{a-b}{a+b} =$ _____

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 由题可得: $a = \frac{3}{2}b$, 将此代入要求的代数式约分化简即可

【详解】 $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{2}, \therefore a = \frac{3}{2}b, \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{3}{2}b-b}{\frac{3}{2}b+b} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{5}{2}b} = \frac{1}{5},$

所以答案为 $\frac{1}{5}$

【点睛】 本题主要考查了比例化简求值, 掌握相关概念方法是解题关键

8. 已知线段 $a = 3$, $b = 6$, 线段 c 是线段 a 、 b 的比例中项, 那么线段 c 的长是_____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查比例中项的定义, 解题的关键是掌握比例中项的定义: 如果 a 、 b 、 c 三个量成连比例, 即 $a:b = b:c$, b 叫做 a 和 c 的比例中项. (内项要相等时才称为比例中项), 比例中项又称“等比中项”或“几何中项”, 即可.

【详解】 解: $\because$ 线段 $a = 3$, $b = 6$, 线段 c 是线段 a 、 b 的比例中项,

$$\therefore c^2 = ab = 3 \times 6 = 18,$$

$$\therefore c_1 = 3\sqrt{2}, c_2 = -3\sqrt{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{线段 } c \text{ 的值为 } 3\sqrt{2}.$$

故答案为: $3\sqrt{2}$.

9. 计算: $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 5\vec{b} =$ _____.

【答案】 $2\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查向量加减混合运算，熟练掌握运算法则是解题关键.

先去括号，然后根据向量加减法进行计算即可.

【详解】 解： $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 5\vec{b}$

$$= 2\vec{a} - 6\vec{b} + 5\vec{b}$$

$$= 2\vec{a} - \vec{b}.$$

故答案为： $2\vec{a} - \vec{b}$.

10. 已知抛物线 $y = (k + 2)x^2 + 6x - 5$ 的开口向下，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -2$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的性质，解题的关键是掌握二次函数的图象，根据题意，抛物线

$y = (k + 2)x^2 + 6x - 5$ 的开口向下，可得 $k + 2 < 0$ ，求出 k ，即可.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (k + 2)x^2 + 6x - 5$ 的开口向下，

$$\therefore k + 2 < 0,$$

解得： $k < -2$.

故答案为： $k < -2$.

11. 如果两个相似三角形的对应中线之比为 $2:3$ ，那么它们的对应高之比为_____.

【答案】 $2:3$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的对应角平分线的比、对应中线比、对应高线比等于相似比是解题的关键.

【详解】 解： $\because$ 两个相似三角形的对应中线之比为 $2:3$ ，

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，

$\therefore$ 它们的对应高之比为 $2:3$ ，

故答案为： $2:3$.

12. 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，如果 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，那么 $\frac{AE}{EC}$ 的值为_____时， $DE \parallel BC$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质和判定，掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

根据相似三角形的判定和性质、平行线的判定解答即可.

【详解】 解：当 $DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{AC - AE} = \frac{1}{2},$$

若 $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$ ，可推导出 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

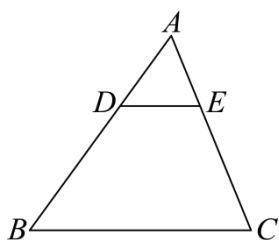
$$\therefore \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

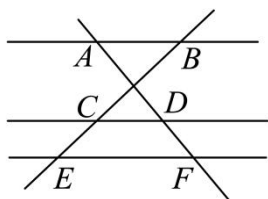
$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.



13. 如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，如果 $AD = 2$ ， $DF = 1.5$ ， $BC = 2.4$ ，那么 BE 的长是_____.



【答案】 4.2

【解析】

【分析】 本题主要考查平行线分线段成比例定理，熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键. 根据平行线分线段成比例定理求解即可.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE},$$

$$\because AD=2, DF=1.5, BC=2.4,$$

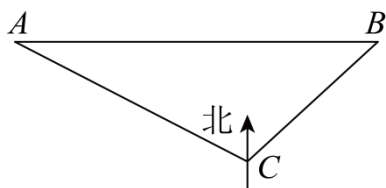
$$\therefore \frac{2}{1.5} = \frac{2.4}{CE},$$

$$\text{解得: } CE=1.8,$$

$$\therefore BE=BC+CE=2.4+1.8=4.2.$$

故答案为: 4.2.

14. 如图, 点 A 位于点 C 的北偏西 60° 方向, 点 B 位于点 C 的东北方向, 线段 AB 为一条东西向的公路的一部分, 如果点 C 到公路 AB 的距离是 $100\sqrt{3}$ 米, 那么公路 AB 的长为_____.



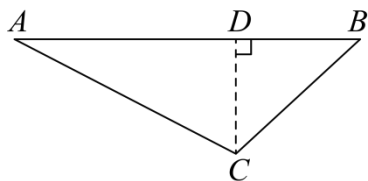
【答案】 $(100\sqrt{3} + 300)$ 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用-方向角问题, 从实际问题中抽象出直角三角形并利用解直角三角形的知识求解是解题的关键.

如图: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 由题意得 $CD = 100\sqrt{3}$, $\angle DCB = 45^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 和 $\text{Rt}\triangle DCA$ 中解直角三角形即可解答.

【详解】 解: 如图: 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



由题意得: $CD = 100\sqrt{3}$ 米, $\angle DCB = 45^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle DCB$ 中, $AD = \tan \angle DCA \cdot CD = \sqrt{3} \times 100\sqrt{3} = 300$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle DCA$ 中, $BD = \tan \angle DCB \cdot CD = 1 \times 100\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ 米,

$\therefore AB = AD + BD = 300 + 100\sqrt{3}$ m, 即公路 AB 的长为 $(100\sqrt{3} + 300)$ 米.

故答案为: $(100\sqrt{3} + 300)$ 米.

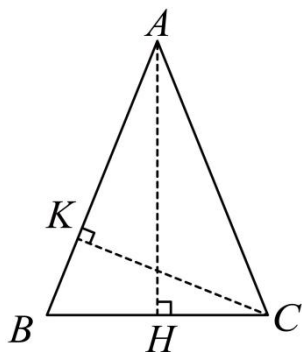
15. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 那么 $\angle BAC$ 的正弦值等于_____.

【答案】 $\frac{4}{9}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正弦的定义，等腰三角形的性质等知识，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 C 作 $CK \perp AB$ 于点 K 。根据等腰三角形的性质和勾股定理得出 AH ，再根据等面积法求出 CK ，再根据三角形正弦的定义求解即可。

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，过点 C 作 $CK \perp AB$ 于点 K 。



$$\because AB = AC, AH \perp BC,$$

$$\therefore BH = CH = 1,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\because CK \perp AB$$

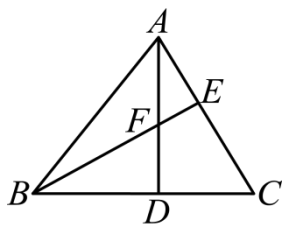
$$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}AB \cdot CK,$$

$$\therefore CK = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 \cdot 2\sqrt{2}}{\frac{1}{2} \times 3} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{CK}{AC} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

故答案为： $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 。

16. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，高 AD 、 BE 相交于点 F ， $\tan C = \frac{3}{2}$ ， $BD = CE = 6$ ，那么 EF 的长为_____。



【答案】 $9 - 2\sqrt{13}$ ## $-2\sqrt{13} + 9$

【解析】

【分析】此题重点考查同角的余角相等、勾股定理、解直角三角形等知识，正确运用勾股定理、解直角三角形是解题的关键.

根据同角的余角相等得到 $\angle BFD = \angle C = 90^\circ - \angle CBE$ ，由解直角三角形的知识得出 FD 和 BE 的长，由勾股定理即可求出 EF 的长.

【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中，高 AD 、 BE 相交于点 F ，

$$\therefore AD \perp BC, BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle C = 90^\circ - \angle CBE,$$

$$\because \tan C = \frac{3}{2}, BD = CE = 6,$$

$$\therefore \frac{BD}{FD} = \tan \angle BFD = \tan C = \frac{BE}{CE} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore FD = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3} \times 6 = 4,$$

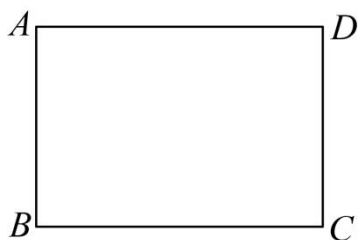
$$BE = \frac{3}{2}CE = \frac{3}{2} \times 6 = 9,$$

$$\therefore BF = \sqrt{BD^2 + FD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore EF = BE - BF = 9 - 2\sqrt{13},$$

故答案为： $9 - 2\sqrt{13}$.

17. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$. 点 E 在边 AD 上，连接 BE ，将 $\triangle ABE$ 沿着 BE 翻折，点 A 的对应点是点 F ，连接 FD . 如果 $FD \parallel BE$ ，那么点 F 到 CD 的距离为_____.

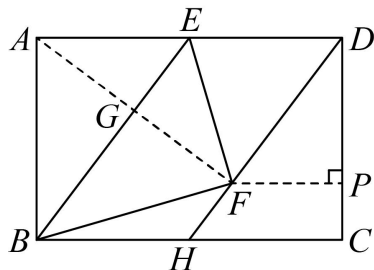


【答案】 $\frac{54}{25}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质，翻折变换（折叠问题），掌握折叠的性质是解题的关键．根据题意画出图形，根据 $AD \parallel BC$ ， $AG = FG$ ，得出 $AE = DE$ ，再通过相等的角的三角函数值相等，即可求出结果．

【详解】 解：过点 F 作 $FP \perp CD$ 于点 P ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AD = BC = 6$ ，

$\because AG = FG$ ，

$\therefore AE = DE = \frac{1}{2} AD = 3$ ，

$\therefore BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = 5$ ，

$\because FD \parallel BE$ ，

$\therefore \angle AFD = \angle AGE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAF = \angle ABE = \angle CDH$ ，

$\therefore \sin \angle DAF = \frac{DF}{AD} = \sin \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{5}$ ，

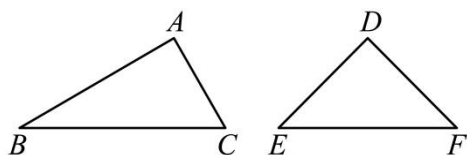
$\therefore DF = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$ ，

$\because \sin \angle CDH = \frac{FP}{DF} = \frac{3}{5}$ ，

$\therefore FP = \frac{18}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{54}{25}$ ，

故答案为： $\frac{54}{25}$ ．

18. 如图，在一副三角尺中， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ， $AB = EF$ ，分别过点 A 、点 D 画 AG 、 DH 交边 BC 、边 EF 于点 G 、点 H ，如果 AG 分割 $\triangle ABC$ 得到的两个三角形与 DH 分割 $\triangle DEF$ 得到的两个三角形分别相似，那么 $\frac{AG}{DH}$ 的值为_____．



【答案】1

【解析】

【分析】 本题考查的是三角函数的应用，相似三角形的判定，先证明 $AC:AB:BC=1:\sqrt{3}:2$ ，

$DE:DF:EF=1:1:\sqrt{2}$ ，结合 $AB=EF$ ，设 $AB=EF=\sqrt{6}m$ ，可得 $AC=\sqrt{2}m$ ， $BC=2\sqrt{2}m$ ，

$DE=DF=\sqrt{3}m$ ，由 $\angle B \neq \angle E$ 可得 AG 分 ABC 的两个三角形与 DH 分 $\triangle DEF$ 的两个三角形相似，可得 $\triangle BAG \sim \triangle DEH$ ， $\triangle ACG \sim \triangle FDH$ ，过 G 作 $GK \perp AB$ 于 K ，过 H 作 $HL \perp DE$ 于 L ，则 $\triangle AKG, \triangle ELH$ 为等腰直角三角形；再进一步求解即可。

【详解】解： $\because \angle BAC = \angle EDF = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle E = 45^\circ$ ，

$\therefore AC:AB:BC=1:\sqrt{3}:2$ ， $DE:DF:EF=1:1:\sqrt{2}$ ，

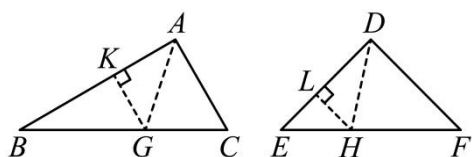
$\because AB=EF$ ，

设 $AB=EF=\sqrt{6}m$ ，

$\therefore AC=\sqrt{2}m$ ， $BC=2\sqrt{2}m$ ， $DE=DF=\sqrt{3}m$ ，

$\because \angle B \neq \angle E$ ，

如图， AG 分 ABC 的两个三角形与 DH 分 $\triangle DEF$ 的两个三角形相似，



$\therefore \angle B = \angle EDF = 30^\circ$ ， $\angle BAG = \angle E = 45^\circ$ ， $\angle CAG = \angle F = 45^\circ$ ， $\angle C = \angle FDH = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BAG \sim \triangle DEH$ ， $\triangle ACG \sim \triangle FDH$ ，

过 G 作 $GK \perp AB$ 于 K ，过 H 作 $HL \perp DE$ 于 L ，

则 $\triangle AKG, \triangle ELH$ 为等腰直角三角形；

设 $AK=GK=x$ ， $EL=LH=y$ ，

$\therefore \tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{KG}{BK} = \frac{x}{\sqrt{6}m-x}$ ， $\tan \angle EDH = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{LH}{DL} = \frac{y}{\sqrt{3}m-y}$ 。

解得: $x = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}m$, $y = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}m$,

$\therefore AG = \sqrt{2}x = (3 - \sqrt{3})m$, $DH = 2y = (3 - \sqrt{3})m$,

$\therefore \frac{AG}{DH} = 1$,

故答案为: 1

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 计算: $\frac{1}{6}\cot 30^\circ + \frac{\tan 30^\circ + \sin 60^\circ}{2\cos^2 45^\circ}$.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

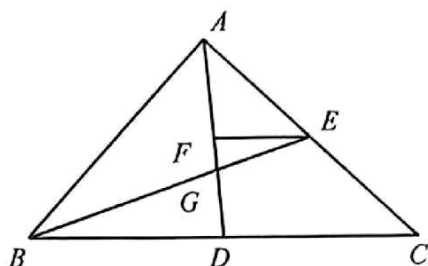
【分析】 本题考查了特殊角的三角形函数值的混合运算, 牢记特殊角的三角函数值是解题的关键. 直接利用特殊角的三角函数值代入, 进而计算得出答案.

【详解】 解: 原式 $= \frac{1}{6} \times \sqrt{3} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}.$$

20. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 、 BE 交于点 G , $EF \parallel BC$ 交 AD 于点 F .



(1) 如果 $FG = 1$, 求 GD 和 AF 的长;

(2) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EF} =$ _____. (用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

【答案】 (1) $GD = 2$, $AF = 3$

$$(2) \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的重心，平面向量，相似三角形的性质与判定，掌握三角形的重心是解题的关键.

(1) 根据三角形的重心，再证明 $\triangle GFE \sim \triangle GDB$ ，得出比例式，即可求解；

(2) 先求出 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，即可得到 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 中线 AD 、 BE 交于点 G ，

$\therefore$ 点 G 为重心，

$\therefore EF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle GFE \sim \triangle GDB$ ，

$$\therefore \frac{FG}{GD} = \frac{EG}{BG} = \frac{1}{2},$$

$\therefore FG = 1$ ，

$\therefore GD = 2$ ， $DF = 3$ ，

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{AE}{CE} = 1,$$

$\therefore AF = DF = 3$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，

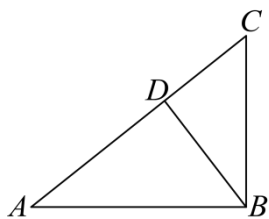
$\because EF \parallel BC$ ， $EF = \frac{1}{4}CB$ ，

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b},$$

故答案为： $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

21. 如果一个锐角的正弦值等于黄金分割数，那么我们称这个角叫做黄金角. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A$ 是黄金角，点 D 在边 AC 上，且 $\frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC}$ ，连接 BD .



- (1) 找出图中相等的线段并说明理由；
 (2) 如果 $AB = 6$ ，求 BD 的长.

【答案】(1) $AD = BC$ ，理由见解析

(2) $BD = 3\sqrt{5} - 3$

【解析】

【分析】本题主要考查了黄金分割点、相似三角形的判定与性质、解直角三角形等知识点，掌握黄金分割的定义是解题的关键.

(1) 由黄金分割结合已知条件可得 $\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，再结合黄金分割角的定义可得 $\sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

则 $\frac{AD}{AC} = \frac{BC}{AC}$ 即可解答；

(2) 先证明 $\triangle BCD \sim \triangle ACB$ 可得 $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，然后将 $AB = 6$ 代入即可解答.

【小问 1 详解】

解： $AD = BC$ ，理由如下：

$$\because \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC},$$

$\therefore$ 点 D 是线段 AC 的黄金分割点，

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A$ 是黄金角，

$$\therefore \sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore AD = BC.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC}, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACB,$$

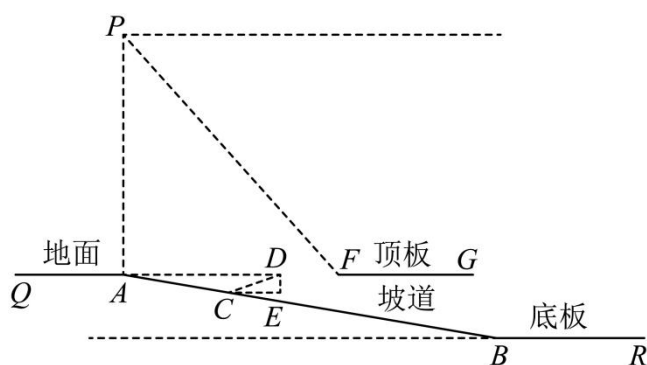
$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore BD = 3\sqrt{5} - 3.$$

22. 如图是某地下车库的剖面图, 某综合实践小组将无人机放在坡道起点 A 处, 让无人机飞到点 D 处, AD 与底板 BR 平行, 测得 $AD = 11.6$ 米, 此时在点 D 处又测得坡道 AB 上的点 C 的俯角为 26.6° . 接着让无人机飞到点 E 处, $DE \perp AD$, CE 与底板 BR 平行, 测得 $DE = 1.8$ 米.



(1) 求坡道 AB 的坡度;

(2) 已知地面 QA 、地下车库的顶板 FG 都与底板 BR 平行且它们到底板 BR 的距离相等, 无人机从点 A 飞到点 P 处, $AP \perp AD$, 测得 $AP = 16.4$ 米, 此时在点 P 处测得点 F 的俯角为 45° , 在不考虑其他因素的前提下, 有一辆高度为 3 米的货车能否进入该地下车库? 请说明理由.

(参考数据: $\sin 26.6^\circ \approx 0.45$, $\cos 26.6^\circ \approx 0.89$, $\tan 26.6^\circ \approx 0.5$)

【答案】 (1) $i_{AB} = 1: \frac{40}{9}$

(2) 该货车能进入该地下车库, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用、矩形的判定与性质、勾股定理等知识点, 正确作出辅助线、构造直角三角形是解题的关键.

(1) 由题意得: $\angle DCE = 26.6^\circ$, $\angle ADE = \angle E = 90^\circ$, 如图: 过点 C 作 $CI \perp AD$ 于点 I , 易证四边形 $CIDE$

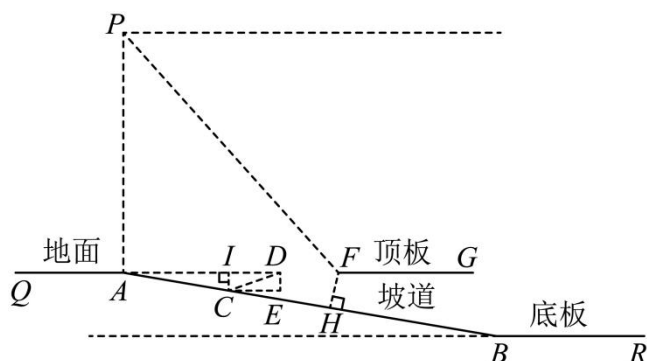
是矩形，则 $CE = ID$ 、 $CI = DE = 1.8 \text{ m}$ ；然后在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 和 $\text{Rt}\triangle AIC$ 中解直角三角形即可解答；

(2) 由题意得： $\angle PFA = 45^\circ$ ，再在 $\text{Rt}\triangle PAF$ 中解直角三角形可得 $AF = 16.4 \text{ m}$ ，如图：过点 F 作 $FH \perp AB$ 于点 H ，根据勾股定理和解直角三角形可得 $FH^2 + AH^2 = AF^2$ ，设 $FH = 9x$ ，则 $AH = 40x$ ，则 $(9x)^2 + (40x)^2 = 16.4^2$ ，解得 $x = \frac{2}{5}$ ，进而求得 FH ，最后与 3 米比较即可解答。

【小问 1 详解】

解：由题意得： $\angle DCE = 26.6^\circ$ ， $\angle ADE = \angle E = 90^\circ$

如图：过点 C 作 $CI \perp AD$ 于点 I ，



$$\therefore \angle CID = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $CIDE$ 是矩形。

$$\therefore CE = ID, CI = DE = 1.8 \text{ m}$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\angle E = 90^\circ$ ， $DE = 1.8 \text{ m}$

$$\therefore \tan \angle DCE = \frac{DE}{CE} = 0.5 \quad \text{解得：} CE = ID = 3.6 \text{ m}.$$

$$\therefore AI = 8 \text{ m}$$

在 $\text{Rt}\triangle AIC$ 中， $\angle AIC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{IC}{AI} = \frac{1.8}{8} = \frac{9}{40},$$

$$\therefore i_{AB} = 1 : \frac{40}{9}.$$

【小问 2 详解】

解：由题意得： $\angle PFA = 45^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle PAF$ 中， $\angle PAF = 90^\circ$ ， $PA = 16.4 \text{ m}$ ， $\tan \angle PFA = \frac{PA}{AF} = 1$ ，

$$\therefore AF = 16.4 \text{ m},$$

如图：过点 F 作 $FH \perp AB$ 于点 H ，

在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中， $\angle AHF = 90^\circ$ ， $\tan \angle FAH = \frac{FH}{AH} = \frac{9}{40}$ ， $FH^2 + AH^2 = AF^2$ ，

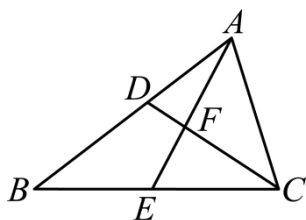
设 $FH = 9x$ ，则 $AH = 40x$ ，

$$\therefore (9x)^2 + (40x)^2 = 16.4^2, \text{ 解得 } x = \frac{2}{5}$$

$$\therefore FH = 3.6 \text{ m},$$

$\therefore 3\text{m} < 3.6\text{m}$ 即该货车能进入该地下车库.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上，连接 CD 、 AE 交于点 F ， $AF = FC$ ， $\angle ADC = \angle ACB$.



(1) 求证： $AC^2 = CD \cdot AE$ ；

(2) 如果点 E 是边 BC 的中点，求证： $BC^2 = 2AD \cdot AB$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识点，掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 先证明 $\triangle DCA \sim \triangle CAE$ 可得 $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{AC}$ 即可证明结论；

(2) 先证明 $\triangle DCA \sim \triangle CBA$ 可得 $AC^2 = AB \cdot AD$ ，结合 $\triangle DCA \sim \triangle CAE$ 可得 $\triangle CAE \sim \triangle CBA$ ，即 $AC^2 = BC \cdot CE$ ，则 $BC \cdot CE = AD \cdot AB$ ，最后结合点 E 是 BC 中点即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because AF = FC$ ，

$$\therefore \angle FAC = \angle FCA,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle DCA \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AE \cdot CD.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ADC = \angle ACB, \angle DAC = \angle CAB,$

$$\therefore \triangle DCA \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AB \cdot AD,$$

$$\because \triangle DCA \sim \triangle CAE, \triangle DCA \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle CBA$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore AC^2 = BC \cdot CE$$

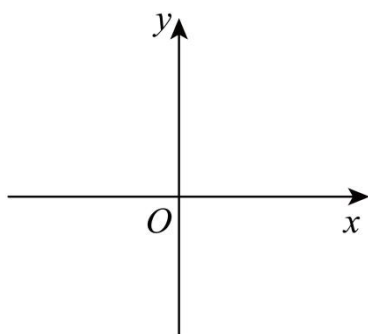
$$\therefore BC \cdot CE = AD \cdot AB$$

$\because$ 点 E 是 BC 中点,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BC^2 = 2AD \cdot AB.$$

24. 如图, 在直角坐标平面 xOy 内, 以点 C 为顶点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(4, 3)$, 且与 y 轴交于点 B , 对称轴为直线 $x = 2$.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 平移上述抛物线, 所得的新抛物线的对称轴为直线 $x = t$, 顶点为点 P .

①联结 AB , 如果点 P 在 x 轴上且新抛物线与线段 AB 有公共点, 求 t 的取值范围;

②设新抛物线与直线 $x = 2$ 交于点 D , 如果点 P 在原抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上, 且在直线 $x = 2$ 的右侧,

$\angle CPD = 2\angle CBO$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) ① $-\sqrt{3} \leq t \leq 4 + \sqrt{3}$; ② $P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先由对称轴求出 b 的值, 再把 A 点坐标代入解析式即可得到抛物线解析式;

(2) ①新抛物线的解析式可设为 $y = (x-t)^2$, 当 $y = (x-t)^2$ 的图象的对称轴右边图象过 B 点 $(0,3)$ 时, 有 $3 = (0-t)^2$, 解得: $t = -\sqrt{3}$; 当 $y = (x-t)^2$ 的图象的对称轴左边图象过 A 点 $(4,3)$ 时, 有 $3 = (4-t)^2$, 解得: $t = 4 + \sqrt{3}$, 从而可知 $-\sqrt{3} \leq t \leq 4 + \sqrt{3}$;

②如图 1 所示, 作 $PE \perp CD$, 设 $P(t, t^2 - 4t + 3)$, 新抛物线可设为 $y = (x-t)^2 + t^2 - 4t + 3$, 故 $D(2, 2t^2 - 8t + 7)$, 证明 $DE = CE$, 再利用三线合一性质说明 $\angle DPC = 2\angle CPE$, 当 $\angle CPE = \angle CBO$ 时, 即 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO$ 时, 满足题意, 至此完成二倍角的转换, 最后根据 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO = \frac{CE}{PE} = \frac{(t-2)^2}{t-2} = t-2 = \frac{1}{2}$, 解出 t 的值即可得解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -2$,

$\therefore b = -4$, $y = x^2 - 4x + c$,

把 $A(4,3)$ 代入 $y = x^2 - 4x + c$, 可得 $c = 3$,

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$,

故 $B(0,3)$, $C(2,-1)$.

①当点 P 在 x 轴上时, 新抛物线的解析式可设为 $y = (x-t)^2$,

当 $y = (x-t)^2$ 的图象的对称轴右边图象过 B 点 $(0,3)$ 时, 有 $3 = (0-t)^2$,

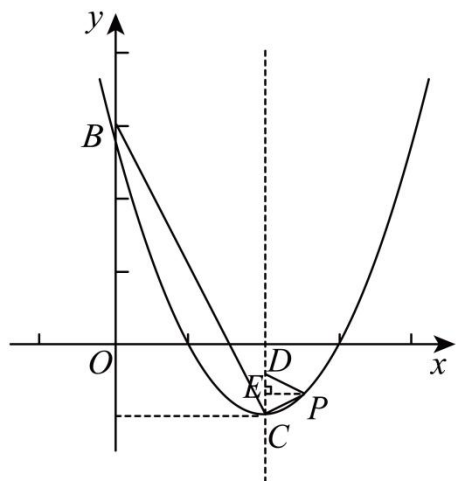
解得: $t_1 = -\sqrt{3}$, $t_2 = \sqrt{3}$ (舍去);

当 $y = (x-t)^2$ 的图象的对称轴左边图象过 A 点 $(4,3)$ 时, 有 $3 = (4-t)^2$,

解得: $t_1 = 4 + \sqrt{3}$, $t_2 = 4 - \sqrt{3}$ (舍去).

故 t 的取值范围为 $-\sqrt{3} \leq t \leq 4 + \sqrt{3}$;

②如图 1 所示, 作 $PE \perp CD$,



设 $P(t, t^2 - 4t + 3)$, 且点 P 为新抛物线顶点, 新抛物线的对称轴为直线 $x = t$,

则新抛物线可设为 $y = (x - t)^2 + t^2 - 4t + 3$, 又 D 点横坐标为 2,

则 $y_D = 2t^2 - 8t + 7$, 故 $D(2, 2t^2 - 8t + 7)$,

$$\therefore DE = y_D - y_P = 2t^2 - 8t + 7 - t^2 + 4t - 3 = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2,$$

$$CE = y_P - y_C = (t - 2)^2,$$

$\therefore DE = CE$, 从而知 PE 为 DC 中垂线,

$\therefore DP = CP$, 由三线合一性质可得: $\angle DPC = 2\angle CPE$,

$\therefore$ 当 $\angle CPE = \angle CBO$ 时, 即 $\tan \angle CPE = \tan \angle CBO$ 时, 满足题意.

$$\text{故 } \tan \angle CPE = \tan \angle CBO = \frac{CE}{PE} = \frac{(t - 2)^2}{t - 2} = t - 2,$$

$$\because \tan \angle CBO = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } t - 2 = \frac{1}{2}, \text{ 故 } t = \frac{5}{2},$$

$$\text{故 } P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right).$$

【点睛】本题以二次函数为背景考查了待定系数法, 二次函数的图象性质, 函数图象的平移, 二次函数与线段的公共点问题, 二倍角构造问题, 熟练掌握以上内容是解题关键.

25. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 、 BC 上, 且 $\angle ADE = \angle BDF$,

连接 EF .

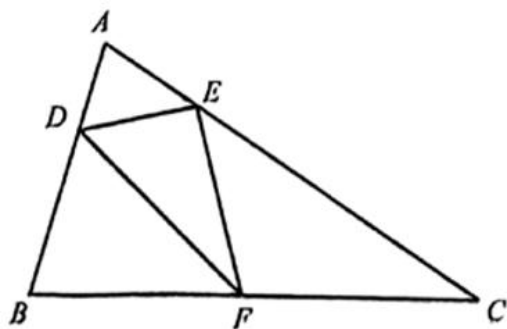


图 1

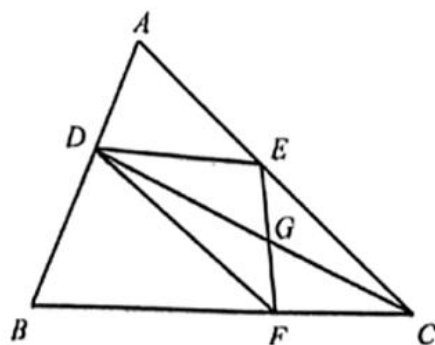


图 2

- (1) 如图 1, 如果 $BD = \frac{4}{7}AB$, $DE \perp EF$, 求 $\angle EDF$ 的余切值;
- (2) 如图 2, 连接 CD 交 EF 于点 G , 如果 $\frac{AE}{BF} = \frac{2EG}{3GF}$, 求 $\frac{EC}{FC}$ 的值;
- (3) 如果 $AE = 2$, $EC = 1$, $\angle CEF = \angle AED$, $\triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 相似, 求 AD 的长.

【答案】(1) $\cot \angle EDF = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

(2) $\frac{EC}{FC} = \frac{3}{2}$

(3) AD 的值为 $5 - \sqrt{13}$ 或 $\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle AED \sim \triangle BFD$, 由相似三角形的性质得出 $\frac{DE}{DF} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{4}$, 设 $DE = 3x$, $DF = 4x$, 由勾股定理得出 $EF = \sqrt{7}x$, 再根据余切的定义求解即可.

(2) 过点 D 分别作 $DL \perp AE$ 于点 L , $DH \perp BF$ 于点 H , 过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M , 过点 F 作 $FN \perp CD$ 于点 N , 由相似三角形的性质可得出 $\frac{AE}{BF} = \frac{DL}{DH}$, 再证明 $\triangle EMG \sim \triangle FNG$, 再利用相似三角形的性质得出 $\frac{EG}{GF} = \frac{EM}{FN}$, 再结合三角形的面积得出 $\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{EG}{GF} = \frac{EC \cdot AE}{FC \cdot BF}$, 进一步即可得出答案.

(3) 分两种情况讨论, 然后利用相似三角形的性质求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because BD = \frac{4}{7}AB$,

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$

$\because AC = BC$,

$$\therefore \angle A = \angle B$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } DE = 3x, \quad DF = 4x$$

$$\therefore DE \perp EF,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } \angle DEF = 90^\circ$$

$$\therefore DE^2 + EF^2 = DF^2$$

$$\therefore EF = \sqrt{7}x,$$

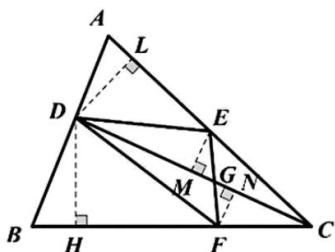
$$\text{在 Rt}\triangle DEF \text{ 中, } \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \cot \angle EDF = \frac{DE}{EF} = \frac{3x}{\sqrt{7}x} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

【小问 2 详解】

解: 过点 D 分别作 $DL \perp AE$ 于点 L , $DH \perp BF$ 于点 H ,

过点 E 作 $EM \perp CD$ 于点 M , 过点 F 作 $FN \perp CD$ 于点 N ,



由 $\triangle AED \sim \triangle BFD$,

$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{DL}{DH},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{\frac{1}{2}EC \cdot DL}{\frac{1}{2}FC \cdot DH} = \frac{EC \cdot DL}{FC \cdot DH} = \frac{EC \cdot AE}{FC \cdot BF},$$

$$\therefore EM \parallel FN,$$

$$\therefore \triangle EMG \sim \triangle FNG,$$

$$\therefore \frac{EG}{GF} = \frac{EM}{FN},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot EM}{\frac{1}{2}CD \cdot FN} = \frac{EM}{FN},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle CFD}} = \frac{EG}{GF} = \frac{EC \cdot AE}{FC \cdot BF},$$

$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{2EG}{3GF},$$

$$\therefore \frac{EC}{FC} = \frac{3}{2}.$$

【小问 3 详解】

解： $\because \angle CEF = \angle AED$ ， $\triangle ADE$ 与 $\triangle EFC$ 相似，

当 $\angle A = \angle ECF = \angle B$ ，此时 $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ ，

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{CF} = 2$$

且 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

设 $AD = x$ ，则 $BD = 3 - x$ ， $CF = \frac{1}{2}x$ ， $BF = 3 - \frac{1}{2}x$ ，

又 $\because \triangle AED \sim \triangle BFD$ ，

$$\therefore \frac{BF}{AE} = \frac{BD}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{3 - \frac{1}{2}x}{2} = \frac{3 - x}{x}, \quad x^2 - 10x + 12 = 0,$$

$$x = 5 - \sqrt{13} \quad (x = 5 + \sqrt{13} \text{ 舍}),$$

$$\therefore AD = 5 - \sqrt{13},$$

当 $\angle ADE = \angle ECF$ ，此时 $\triangle ADE \sim \triangle FCE$ ，

$$\text{则 } EF \parallel AB, \quad \frac{CF}{AD} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore AE = BF = 2, \quad CE = CF = 1$$

$$\text{设 } AD = x, \quad EF = \frac{2}{3}x,$$

$$\text{则 } \frac{1}{x} = \frac{\frac{2}{3}x}{2},$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AD = \sqrt{3},$$

综上: AD 的值为 $5 - \sqrt{13}$ 或 $\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质和判定, 余切的定义, 等腰三角形的判定与性质等知识, 掌握相似三角形的性质是解题的关键.