

2024 学年第一学期期末学情诊断初三数学试卷

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤;

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分, 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 下列函数中, 一定是二次函数的是 ()

A. $y = \frac{3}{4}x + m^2$ (其中 m 是常数)

B. $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数)

C. $y = (2x - 1)x$

D. $y = (x + 4)^2 - x^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的判断, 根据形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 这样的函数叫做二次函数, 进行判断即可.

【详解】解: A、是一次函数, 不符合题意;

B、当 $a = 0$ 时, 不是二次函数, 不符合题意;

C、 $y = (2x - 1)x = 2x^2 - x$, 是二次函数, 符合题意;

D、 $y = (x + 4)^2 - x^2 = 8x + 16$, 不含二次项, 不是二次函数, 不符合题意.

故选 C.

2. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 那么下列各式中, 正确的是 ()

A. $\sin B = \frac{3}{5}$

B. $\cos B = \frac{3}{5}$

C. $\cot B = \frac{3}{5}$

D. $\tan B = \frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查求锐角三角函数值, 根据锐角三角函数的定义, 逐一进行判断即可.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$,

$$\therefore BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4};$$

故选 A.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于抛物线 $y = -(x-20)^2 + 25$, 下列叙述正确的是 ()

- A. 抛物线有最低点, 最低点的坐标是 $(20, 25)$
- B. 抛物线有最高点, 最高点的坐标是 $(-20, 25)$
- C. 抛物线有最高点, 最高点的坐标是 $(20, 25)$
- D. 抛物线有最低点, 最低点的坐标是 $(-20, 25)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图像和性质, 根据二次函数的性质, 进行判断即可.

【详解】解: $\because y = -(x-20)^2 + 25,$

$\therefore$ 抛物线的开口向下, 顶点坐标为: $(20, 25),$

$\therefore$ 抛物线有最高点, 最高点的坐标是 $(20, 25);$

故选: C.

4. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 两个等腰三角形一定相似
- B. 两个直角三角形一定相似
- C. 含 45° 角的两个等腰三角形一定相似
- D. 含 105° 角的两个等腰三角形一定相似

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定, 等腰直角三角形的性质, 掌握相似三角形的判定是解题的关键. 利用相似三角形的判定依次判断可求解.

【详解】解: A、两个等腰三角形不一定相似, 故选项 A 不符合题意;

B、两个直角三角形不一定相似, 故选项 B 不符合题意;

C、含 45° 角的两个等腰三角形不一定相似, 故选项 C 不符合题意;

D、含 105° 角的两个等腰三角形一定相似, 故选项 D 符合题意;

故选: D.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别是边 AB , AC 的中点. 下列结论中, 错误的是 ()

A. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

B. $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

C. $DE = \frac{1}{2} BC$

D. $DE \parallel BC$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查三角形的中位线定理, 相似三角形的判定和性质, 根据中位线定理得到

$DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC$, 进而得到 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 得到

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \text{ 判断即可.}$$

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别是边 AB , AC 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = \left(\frac{DE}{BC} \right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC};$$

故错误的是选项 B,

故选 B.

6. 已知二次函数 $y = f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线, 抛物线的对称轴在 y 轴右侧. 当抛物线与 x 轴两交点的距离为 9 时, 若 $f(-5)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(4)$ 、 $f(7)$ 这四个函数值中有且只有一个值不大于 0, 那么在这四个函数值中, 值不大于 0 是 ()

A. $f(-5)$

B. $f(-1)$

C. $f(4)$

D. $f(7)$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象和性质, 根据抛物线与 x 轴两交点的距离为 9, 结合二次函数的性质进行判断即可.

【详解】 解: $\because$ 抛物线的开口向上, 对称轴在 y 轴右侧, 且抛物线与 x 轴两交点的距离为 9,

∴ 在对称轴的左侧 y 随着 x 的增大而减小，在对称轴的右侧 y 随着 x 的增大而增大，抛物线与 x 轴两交点到对称轴的距离为 4.5，

若 $f(-5) \leq 0$ ，则 $f(-1) < 0$ ，不符合题意，故 $f(-5) > 0$

若 $f(-1) \leq 0$ ，则：抛物线与 x 轴的一个交点范围为 $-4.5 < x \leq -1$ ，

∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的范围为： $4.5 < x \leq 8$ ，则： $f(4) < 0$ ，不符合题意；故 $f(-1) > 0$

当 $f(4) \leq 0$ 时，则抛物线与 x 轴的一个交点范围为 $-1 < x \leq 4$ ，

∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的范围为： $8 < x \leq 13$ ，则： $f(7) < 0$ ，不符合题意；

故只能是 $f(7) \leq 0$ ；

故选 D.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 已知 a 、 b 是不等于 0 的实数， $7a = 5b$ ，那么 $\frac{a+b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{12}{7}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的性质，熟知比例的性质是解题的关键.

根据比例的性质进行求解即可.

【详解】 解： $\because 7a = 5b$ ，

$$\therefore a = \frac{5b}{7},$$

$$\therefore \frac{a+b}{b} = \frac{\frac{5b}{7} + b}{b} = \frac{12}{7},$$

故答案为： $\frac{12}{7}$.

8. 已知 $f(x) = 4x^2 - 1$ ，那么 $f(\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 本题考查求函数值，把 $x = \sqrt{2}$ 代入函数解析式，进行计算即可.

【详解】 解： $\because f(x) = 4x^2 - 1$ ，

$$\therefore f(\sqrt{2}) = 4 \times 2 - 1 = 7;$$

故答案为：7.

9. 将二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$ 化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式： $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x - 2)^2 - 1$

【解析】

【分析】由于二次项系数为 1，故运用配方法，即等式右边直接同时添加和减去一次项系数一半的平方，将原二次函数化为顶点式形式，通过位置的一一对应确定参数数值.

【详解】 $y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1,$

故答案为 $(x - 2)^2 - 1$.

【点睛】本题考查了二次函数解析式中一般式和顶点式之间的关系.

10. 第七届中国国际进口博览会（简称“进博会”）于 2024 年 11 月 5 日至 10 日在国家会展中心（上海）隆重举办. 以“新时代、共享未来”为主题，是世界上首个以进口为主题的国家级博览会. 小海在地图上（如图 1）测量他家与国家会展中心（上海）的距离为 2.6 厘米，那么请帮小海计算出他家与国家会展中心（上海）的实际距离为 千米.



【答案】 52

【解析】

【分析】本题考查了成比例线段，熟练掌握“比例尺 = $\frac{\text{图上距离}}{\text{实际距离}}$ ”是解题的关键，注意单位的统一.

设小海家与国家会展中心（上海）的实际距离为 x 厘米，根据“比例尺 = 图上距离 : 实际距离”列出比例式，由此即可得出小海家与国家会展中心（上海）的实际距离.

【详解】解：设小海家与国家会展中心（上海）的实际距离为 x 厘米，依题意得：

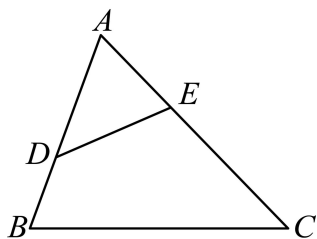
$$2.6 : x = 1 : 2000000,$$

$$\therefore x = 5200000,$$

$$5200000 \text{ 厘米} = 52 \text{ 千米},$$

故答案为：52.

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D , E 分别在边 AB , AC 上. 添加一个条件使 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，则这个条件可以是_____。（写出一种情况即可）



【答案】 $\angle ADE = \angle C$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定，掌握相似三角形的判定方法（三组对应边的比相等的两个三角形相似；两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；有两组角对应相等的两个三角形相似）成为解题的关键.

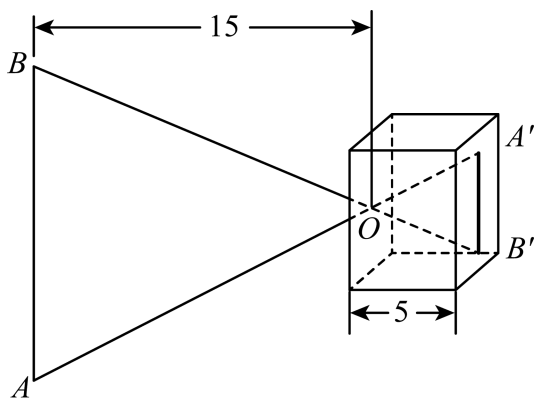
根据相似三角形的判定方法解答即可.

【详解】 解： $\because \angle DAE = \angle BAC$,

$\therefore$ 添加条件： $\angle ADE = \angle C$ 可判定 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.

故答案为： $\angle ADE = \angle C$ （答案不唯一）.

12. （洞孔成像）如图， $AB \parallel A'B'$ ，物像 $A'B'$ 所在正方体的面与平面 $A'B'AB$ 垂直，根据图中尺寸，已知物像 $A'B'$ 的长为 4，那么物 AB 长为_____.



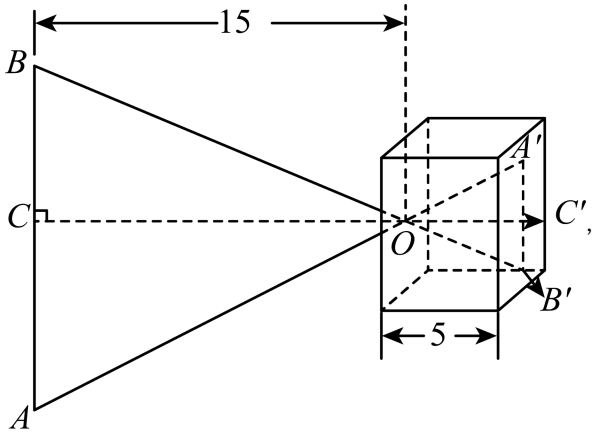
【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质，证明三角形相似是解题的关键.

过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C ，延长 BO 交 $A'B'$ 于点 C' ，再证 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ ，再根据相似三角形的性质求解即可.

【详解】 解：过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C ，延长 BO 交 $A'B'$ 于点 C' ，如图，



依题意得 $OC = 15$ ， $OC' = 5$ ，

$$\because AB \parallel A'B', \quad OC \perp AB,$$

$$\therefore OC \perp A'B',$$

$$\because AB \parallel A'B',$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OA'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OC}{OC'},$$

$$\because A'B' = 4$$

$$\therefore \frac{AB}{4} = \frac{15}{5}$$

$$\therefore AB = 12,$$

故答案为：12.

13. 已知两个相似三角形的一组对应边长分别是 5 厘米和 2 厘米，如果这组对应边上的高的长度相差 2.4 厘米，那么这两条高的长度和为_____厘米.

【答案】 5.6

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质：熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键；

根据相似三角形的高线比等于相似比，设未知数，列出一元一次方程，进行求解即可

【详解】 解：由题意得：两个相似三角形的相似比为：5:2，

∴ 两个三角形的高线比为 $5:2$,

设较大三角形的高为 $5x$ (厘米), 较小三角形的高为 $2x$ (厘米),

$$\therefore 5x - 2x = 2.4,$$

解得: $x = 0.8$,

∴ 两个三角形的高的长度和为 $5 \times 0.8 + 2 \times 0.8 = 5.6$ (厘米),

故答案为: 5.6 .

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB = AC$, 这个三角形的重心为点 G , 设 $\overrightarrow{GB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GA} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

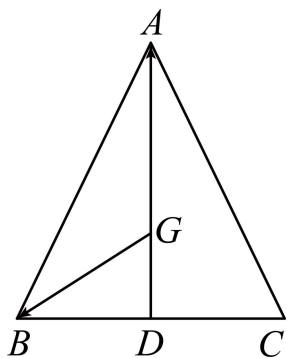
【答案】 $-2\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形重心的性质, 向量的线性运算等知识点, 熟练掌握三角形法则和平行四边形法则是解题的关键.

根据“三角形重心的性质 —— 重心到顶点的距离等于到对边中点距离的 2 倍” 可得 $GD = \frac{1}{2}AG$, 然后根据向量的三角形法则可得 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, 由 $BC = 2BD$ 可得 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$, 于是得解.

【详解】 解: 如图,



∵ G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore GD = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore \overrightarrow{GA} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{GB} = \vec{a},$$

∴ 由三角形法则可得: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$,

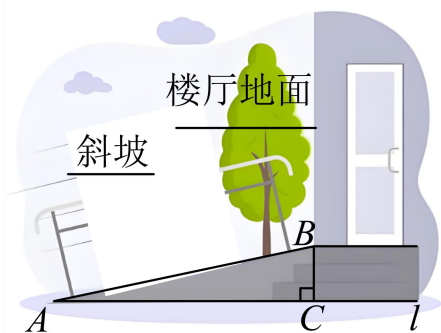
∴ D 为 BC 的中点,

∴ $BC = 2BD$,

∴ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} = 2\left(-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -2\vec{a} - \vec{b}$,

故答案为: $-2\vec{a} - \vec{b}$.

15. 如图, 一座大楼前的残疾人通道是斜坡, 用 AB 表示, 沿着通道走 3.2 米可进入楼厅, 楼厅比楼外的地面高 0.4 米, 那么残疾人通道的坡度为_____. (结果保留根号的形式)



【答案】 $1:3\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理、坡度, 熟练掌握利用正切求坡度是解题关键. 先利用勾股定理求出 AC 的长, 再利用正切求坡度即可得.

【详解】 解: 由题意得: $AB = 3.2$ 米, $BC = 0.4$ 米, $BC \perp AC$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3.2^2 - 0.4^2} = \frac{6\sqrt{7}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{0.4}{\frac{6\sqrt{7}}{5}} = \frac{1}{3\sqrt{7}},$$

∴ 残疾人通道的坡度为 $1:3\sqrt{7}$,

故答案为: $1:3\sqrt{7}$.

16. 某校初三数学活动小组在利用尺规把线段 AB 分割成两条线段.

①过点 B 作 $BC \perp AB$, 使 $BC = \frac{1}{2}AB$.

②连接 AC ，在线段 CA 上截取 $CD = CB$ 。

③在线段 AB 上截取 $AE = AD$ 。

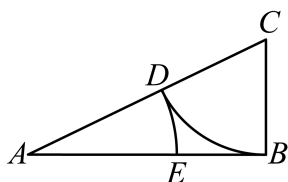
那么 $\frac{AE}{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理，二次根式的运算，根据题意，画出图形，利用勾股定理，求出 AE, BE 的长，即可得出结果。

【详解】 解：设 $AB = 2x$ ，则： $BC = x$ ， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}x$ ，



$$\therefore CD = BC = x,$$

$$\therefore AD = AE = (\sqrt{5} - 1)x,$$

$$\therefore BE = AB - AE = (3 - \sqrt{5})x,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2};$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 。

17. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 13$ ，点 E 在边 DC 上，将矩形 $ABCD$ 沿 AE 翻折，点 D 恰好落在边 BC 上的点 F 处，那么 EC 的长为_____。

【答案】 $\frac{12}{5}$

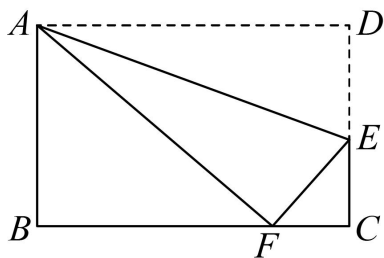
【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。也考查了矩形的性质和勾股定理。

先根据矩形的性质得 $AD = BC = 5$ ， $AB = CD = 3$ ，再根据折叠的性质得 $AF = AD = 5$ ， $EF = DE$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，利用勾股定理计算出 $BF = 12$ ，则 $CF = 1$ ，设 $CE = x$ ，则 $DE = EF = 5 - x$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ECF$

中根据勾股定理得到 $x^2 + 1^2 = (5-x)^2$ ，解方程即可得到 x 即可求解.

【详解】解：如图，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore AD = BC = 13$ ， $AB = CD = 5$ ，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 折叠，顶点 D 恰好落在 BC 边上的 F 处，

$\therefore AF = AD = 13$ ， $EF = DE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $\therefore BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = 12$ ，

$\therefore CF = BC - BF = 13 - 12 = 1$ ，

设 $CE = x$ ，则 $DE = EF = 5 - x$

在 $\text{Rt}\triangle ECF$ 中， $\therefore CE^2 + FC^2 = EF^2$ ，

$\therefore x^2 + 1^2 = (5-x)^2$ ，

解得 $x = \frac{12}{5}$ 。

故答案为 $\frac{12}{5}$ 。

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $l_1: y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常数，且 $a \neq 0$)，以原点为中心，旋转 180° 得抛物线 l_2 ，则称 l_2 是 l_1 的“中心对称抛物线”。已知抛物线 $y_1 = x^2 - 3x - 4$ ，将抛物线 y_1 向左平移 n 个单位长度，与 x 轴的交点从左到右依次为 A 、 B 。将抛物线 y_1 的“中心对称抛物线” y_2 向右也平移 n 个单位长度，与 x 轴的交点从左到右依次为 C 、 D 。当线段 BC 是线段 AB 、 BD 的比例中项时， n 的值为_____。

【答案】 $\frac{21 \pm 5\sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象的变换，比例的性质，根据题意，求出 A, B, C, D 四点的坐标，进而求出 AB ，

BD , BC 的长, 根据比例中项的定义, 得到 $BC^2 = AB \cdot BD$, 列出方程进行求解即可.

【详解】解: $\because y_1 = x^2 - 3x - 4$,

$\therefore$ 当 $y_1 = x^2 - 3x - 4 = 0$ 时, 解得: $x_1 = 4, x = -1$,

$\therefore$ 抛物线 $y_1 = x^2 - 3x - 4$ 与 x 轴的交点坐标为: $(4, 0), (-1, 0)$,

$\therefore$ 当抛物线 y_1 向左平移 n 个单位长度后, 新的抛物线与 x 轴的交点坐标为: $(4-n, 0), (-1-n, 0)$, 即:

$B(4-n, 0), A(-1-n, 0)$,

抛物线 y_1 的“中心对称抛物线” y_2 与 x 轴的交点坐标为: $(-4, 0), (1, 0)$,

$\therefore y_2$ 向右也平移 n 个单位长度,

$\therefore$ 平移后的抛物线与 x 轴的交点坐标为: $C(-4+n, 0), D(1+n, 0)$,

$\therefore AB = 4-n+1+n = 5$, $BC = 4-n+4-n = |8-2n|$, $BD = 4-n-1-n = |3-2n|$,

$\therefore$ 线段 BC 是线段 AB 、 BD 的比例中项,

$\therefore BC^2 = AB \cdot BD$,

$\therefore (8-2n)^2 = 5|3-2n|$,

解得: $n = \frac{21 \pm 5\sqrt{5}}{4}$;

故答案为: $n = \frac{21 \pm 5\sqrt{5}}{4}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ} - \cot^2 30^\circ + \frac{4 \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ + \tan 45^\circ}$.

【答案】 $\frac{3}{2} - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角的三角函数值的混合运算, 熟练掌握特殊角的三角函数值是解题关键. 根据特殊角的三角函数值和实数混合运算法则进行计算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：原式} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - (\sqrt{3})^2 + \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \\
 &= \frac{1}{2} - 3 + 4 - 2\sqrt{2} \\
 &= \frac{3}{2} - 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知：抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(-4, 3)$ 和 $B(2, 1)$.

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若点 $C(6, m)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ 上，求 $\angle ACO$ 的正弦值.

$$\text{【答案】(1) } y = \frac{5}{24}x^2 + \frac{1}{12}x$$

$$(2) \frac{\sqrt{5}}{5}$$

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，求角的正弦值，正确的求出函数解析式，利用数形结合的思想进行求解，是解题的关键：

(1) 待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 求出 C 点坐标，勾股定理逆定理，推出 ABC 为直角三角形，利用正弦的定义，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(-4, 3)$ 和 $B(2, 1)$

$$\therefore \begin{cases} 3 = 16a - 4b \\ 1 = 4a + 2b \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{5}{24} \\ b = \frac{1}{12} \end{cases},$$

∴ 抛物线的表达式为 $y = \frac{5}{24}x^2 + \frac{1}{12}x$;

【小问 2 详解】

∵ 点 $C(6, m)$ 在抛物线 $y = \frac{5}{24}x^2 + \frac{1}{12}x$ 上

$$\therefore m = \frac{5}{24} \times 6^2 + \frac{1}{12} \times 6 = 8$$

$$\therefore C(6,8)$$

$$\because C(6,8)、A(-4,3)、O(0,0)$$

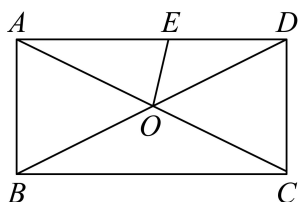
$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad OC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad AC = \sqrt{(6+4)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\therefore OA^2 + OC^2 = AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，

$$\text{在直角三角形 } ABC \text{ 中, } \sin \angle ACO = \frac{OA}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=4$ ，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E 在边 AD 上，且 $\angle AEO = \angle AOE$ 。



(1) 求 AE 的长；

(2) 求 $\tan \angle AEO$ 的值.

【答案】 (1) $\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{5}+2$

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质得 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $OA = OC = \frac{1}{2}AC$ ，利用勾股定理求得 AC ，即可得 AO ，结合等腰三角形的性质得 $AE = AO$ 即可；

(2) 过点 O 作 $OH \perp AD$ 垂足为 H ，根据矩形的性质得 $\angle BAD = 90^\circ$ 和 $OD = OB = \frac{1}{2}BD$ ，则 $OH \parallel AB$ ，即 $\frac{OH}{AB} = \frac{DO}{BD}$ ，求得 OH ，利用勾股定理求得 AH ，即可求得 HE ，再次利用解直角三角形即可求得 $\tan \angle AEO$ 。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=2$ ， $BC=4$ ，

$$\therefore AC = 2\sqrt{5},$$

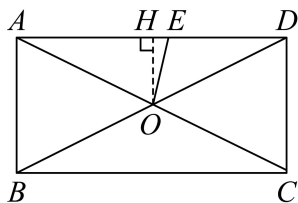
$$\therefore AO = \sqrt{5},$$

$$\because \angle AEO = \angle AOE,$$

$$\therefore AE = AO = \sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

解：过点 O 作 $OH \perp AD$ 垂足为 H ，如图，



$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \quad OD = OB = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BA \perp AD,$$

$$\therefore OH \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DHO \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{OH}{AB} = \frac{DO}{BD},$$

$$\because AB = 2,$$

$$\therefore OH = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle AHO$ 中， $AO = \sqrt{5}$ ， $OH = 1$ ，

$$\therefore AH = 2,$$

$$\because AE = AO = \sqrt{5}$$

$$\therefore HE = \sqrt{5} - 2,$$

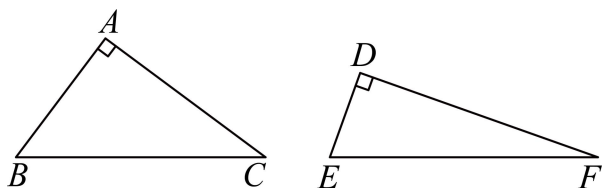
在 $\text{Rt}\triangle EHO$ 中， $HO = 1$ ， $EH = \sqrt{5} - 2$ ，

$$\therefore \tan \angle AEO = \frac{OH}{EH} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2.$$

【点睛】本题主要考查矩形的性质、勾股定理、等腰三角形的性质、平行线的性质和解直角三角形，解题的关键是熟悉矩形的性质和解直角三角形.

22. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 都是直角三角形纸片， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ 且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 不相似. 其中 $AB = a$ ，

$AC = b$, $DE = m$, $DF = n$ ($n > b > a > m$). 是否存在经过锐角顶点的一条直线, 能把 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 分割成两个三角形, 使分割得的两个三角形中有一个三角形 (记这个三角形的面积为 S) 与没有分割的三角形相似.



- (1) 如果存在, 请写出你的分割方案 (只要写出一个方案即可), 并证明方案的正确性;
- (2) 按照你写出的分割方案, 求出 S 的值 (可以用 a 或 b 或 m 或 n 的代数式表示).

【答案】(1) 存在, 见解析

$$(2) S = \frac{am^2}{2b}$$

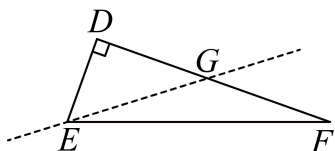
【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质, 解直角三角形:

- (1) 根据锐角的正切值可以得到 $\tan \angle DEF > \tan B > \tan C > \tan F$, 故过点 E 的直线交边 DF 于点 G , 使得 $\angle DEG = \angle B$, 即可;
- (2) 根据相似的性质, 求出 DG 的长, 利用三角形的面积公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: 存在, 分割方案: (答案不唯一) 如图:



过点 E 的直线交边 DF 于点 G , 使得 $\angle DEG = \angle B$,

证明: $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $AB = a$, $AC = b$, $DE = m$, $DF = n$,

$$\therefore \tan B = \frac{b}{a}, \quad \tan C = \frac{a}{b}, \quad \tan \angle DEF = \frac{n}{m}, \quad \tan F = \frac{m}{n},$$

$$\because n > b > a > m,$$

$$\therefore \frac{n}{m} > \frac{b}{a} > \frac{a}{b} > \frac{m}{n} \text{ 即 } \tan \angle DEF > \tan B > \tan C > \tan F,$$

$$\therefore \angle E > \angle B > \angle C > \angle F,$$

$$\because \angle A = \angle D = 90^\circ, \quad \angle DEG = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEG;$$

【小问2 详解】

$$\because \triangle ABC \sim \triangle DEG$$

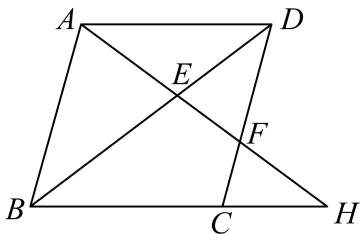
$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DG},$$

$$\because AB = a, AC = b, DE = m,$$

$$\therefore DG = \frac{bm}{a},$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DG = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{bm}{a} = \frac{bm^2}{2a}.$$

23. 已知：如图，点 E 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点，射线 AE 与 DC 交于点 F ，与 BC 的延长线交于点 H 。



(1) 求证： $AE^2 = EF \cdot EH$ ；

(2) 连接 DH ，若 $DH = AB$ ， $AD^2 = AE \cdot AH$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 可得 $\triangle AED \sim \triangle HEB$ ， $\triangle AEB \sim \triangle FED$ ，则 $\frac{AE}{EH} = \frac{DE}{EB}$ ， $\frac{EF}{AE} = \frac{DE}{EB}$ ，即可证明；

(2) 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle AHD$ ，再证明 $\triangle ABE \sim \triangle AHB$ ，再根据相似三角形的性质以及平行四边形的性质求证。

【小问1 详解】

证明： $\because$ 平行四边形 $ABCD$

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle HEB, \triangle AEB \sim \triangle FED,$$

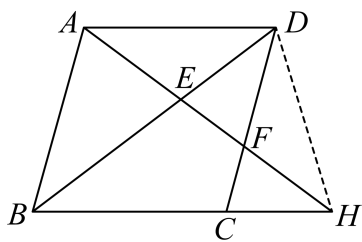
$$\therefore \frac{AE}{EH} = \frac{DE}{EB}, \frac{EF}{AE} = \frac{DE}{EB}$$

$$\therefore \frac{AE}{EH} = \frac{EF}{AE}$$

$$\therefore AE^2 = EF \cdot EH;$$

【小问2 详解】

证明：如图，连接 DH ，



$$\because AD^2 = AE \cdot AH,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AH}{AD}, \text{ 又 } \because \angle DAE = \angle DAH,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AHD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AHD,$$

$$\because AD \parallel BC, AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DBC, \angle ABC = \angle DCH,$$

$$\therefore \angle AHD = \angle DBC,$$

$$\because \text{平行四边形 } ABCD,$$

$$\therefore AB = DC,$$

$$\because DH = AB,$$

$$\therefore DC = DH,$$

$$\therefore \angle DHC = \angle DCH,$$

$$\therefore \angle DHC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AHB, \text{ 又 } \because \angle BAE = \angle BAH,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AHB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AB} \text{ 即 } AB^2 = AE \cdot AH,$$

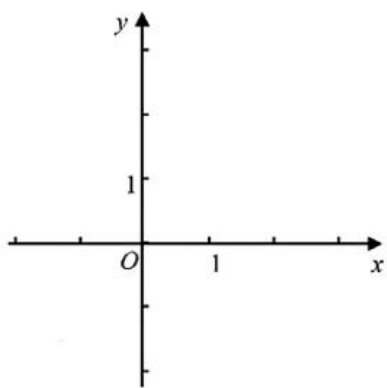
$$\therefore AB = AD,$$

$$\because \text{平行四边形 } ABCD,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形.}$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，菱形的判定，熟练掌握知识点是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $f(x) = x^2 + (b+1)x + b (b < 0)$, $f(x)$ 的图像与 x 轴的两个交点为点 P 、点 Q (其中点 P 在点 Q 左侧).



- (1) 若将 $f(x)$ 的图像向上平移 2 个单位, 得到的新抛物线 $g(x)$ 经过点 $(1, -3)$, 求抛物线 $g(x)$ 的表达式;
- (2) 若 $f(x)$ 的图像在直线 $x=1$ 的右侧呈上升趋势, 求 b 的取值范围;
- (3) 在 (1) 中所求的 $g(x)$ 的图像与 y 轴的交点记为点 B , 与 x 轴的正半轴交点记为点 A , 点 M 在 $g(x)$ 的图像上. 当直线 MQ 与直线 PB 垂直, 且 $QP = \frac{3}{5}QA$ 时, 求点 M 的坐标.

【答案】(1) $g(x) = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$

(2) $-3 \leq b < 0$

(3) $M_1\left(\frac{7}{2}, 2\right), M_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 把点 $(1, -3)$ 代入解析式 $g(x)$ 中即可解出 b 的值;

(2) 先求出抛物线 $f(x)$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{b+1}{2}$, 开口向上, 由原抛物线在直线 $x=1$ 的右侧呈上升趋势, 得 $-\frac{b+1}{2} \leq 1$, 解得: $-3 \leq b < 0$;

(3) 先求出 $B\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, $A(3, 0)$, $P(-1, 0)$, $Q(-b, 0)$, 则 $QP = -b+1$, $QA = b+3$, 根据 $QP = \frac{3}{5}QA$ 建立方程 $-b+1 = 3|b+3|$, 解得 $b = -\frac{1}{2}$, 所以 $Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $M\left(t, t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}\right)$, 当直线 MQ 与直线 PB 垂

直时, 垂足为 H , 交 y 轴于点 G , 如图所示, 可证明 $\tan \angle PBO = \tan \angle MQA$, 得 $\frac{OP}{OB} = \frac{t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2}}$, 解

得 $t_1 = \frac{7}{2}$, $t_2 = -\frac{1}{3}$, 可求 M 点坐标.

【小问 1 详解】

解：将抛物线 $f(x) = x^2 + (b+1)x + b$ ($b < 0$) 向上平移 2 个单位，

$$\therefore \text{新抛物线的表达式 } g(x) = x^2 + (b+1)x + b + 2,$$

$\because$ 新抛物线经过点 $(1, -3)$,

$$\therefore -3 = 1^2 + (b+1) + b + 2,$$

$$\therefore b = -\frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{新抛物线的表达式 } g(x) = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 抛物线 $f(x) = x^2 + (b+1)x + b$ ($b < 0$),

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b+1}{2},$$

$\because$ 原抛物线在直线 $x = 1$ 的右侧呈上升趋势，

$$\therefore -\frac{b+1}{2} \leq 1,$$

$$\therefore b \geq -3,$$

$$\because b < 0,$$

$$\therefore -3 \leq b < 0;$$

【小问 3 详解】

解：由 (1) 得 $g(x) = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = (x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$,

令 $x = 0$, 则 $y = -\frac{3}{2}$; 令 $y = 0$, 则 $(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 3$,

$$\therefore B\left(0, -\frac{3}{2}\right), A(3, 0),$$

$$\therefore OB = \frac{3}{2},$$

$\because$ 原抛物线与 x 轴的两个交点为点 P 、点 Q ,

$$\therefore P(-1, 0), Q(-b, 0),$$

$$\therefore OP = 1,$$

则 $QP = -b + 1$, $QA = |b + 3|$, 且 $QP = \frac{3}{5}QA$,

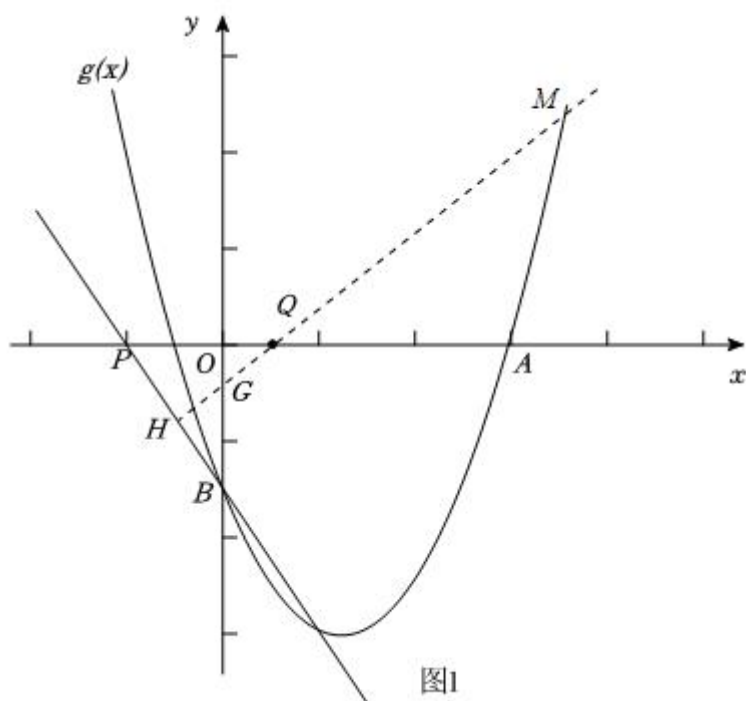
即 $-b + 1 = \frac{3}{5}|b + 3|$,

解得 $b = -\frac{1}{2}$ 或 7 (舍去),

$\therefore Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

设 $M\left(t, t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}\right)$,

当直线 MQ 与直线 PB 垂直时, 垂足为 H , 交 y 轴于点 G , 如图所示,



$\therefore \angle GHB = \angle GOQ = 90^\circ$, $\angle OGQ = \angle HGB$,

$\therefore \angle OQG = \angle HBG$,

又 $\therefore \angle OQG = \angle MQA$,

$\therefore \angle MQA = \angle PBO$,

$\therefore \tan \angle PBO = \tan \angle MQA$,

$$\therefore \frac{OP}{OB} = \frac{t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2}}, \text{ 即 } \frac{2}{3} = \frac{t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2}}{t - \frac{1}{2}},$$

$$\therefore t_1 = \frac{7}{2}, \quad t_2 = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore M_1\left(\frac{7}{2}, 2\right), \quad M_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{9}\right).$$

【点睛】本题以二次函数为背景考查了二次函数的图象平移，二次函数的增减性性质，线线垂直问题，线段的倍分关系问题，掌握以上内容并能数形结合分析是解题的关键.

25. 已知三角形 ADE 的顶点 E 在三角形 ABC 的内部，点 D 、点 E 在直线 AC 同侧.

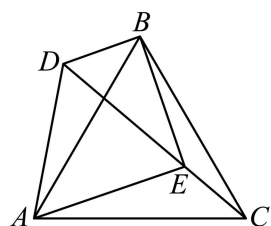


图1

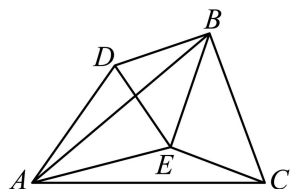
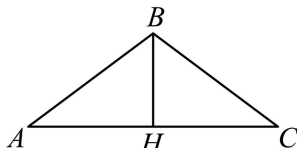


图2



备用图

- (1) 如图 1，连接 BD 、 BE 、 CE ，若 ABC 和 ADE 是等边三角形时，点 C 、 D 、 E 三点共线， $CE:DE=1:2$ ，求 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ 的比值；
- (2) 如图 2，连接 BD 、 BE 、 CE （点 C 、 D 、 E 三点不共线）， $\angle BAC = \angle DAE = n^\circ$ ($0 < n < 90$)，若 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，求 $\angle BEC - \angle DBE$ 的值（用含 n 的代数式表示）；
- (3) 若 ABC 是等腰三角形， $AB = BC = 5$ ， $AC = 8$ ， $BH \perp AC$ ，点 E 在高 BH 上，点 D 在 HB 的延长线上，连接 AE 并延长交边 BC 于点 F ，连接 DF ， DA ，当 $\angle DAE = \angle ABH$ ， $\triangle ABD$ 与 BDF 相似时，求 EH 的长.

【答案】(1) $\frac{4}{7}$

(2) n°

(3) $\frac{33}{61}$

【解析】

【分析】(1) 设 $CE = k$ ， $DE = 2k$ ，过点 A 作 $AF \perp CD$ ，求出 AC 的长，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，利用面积比等于相似比，进行求解即可；

(2) 证明 $\triangle ADB \cong \triangle AEC$ ，得到 $\angle ABD = \angle ACE$ ，利用三角形的内角和定理和角度之间的和差关系进行求解即可；

(3) 分 $\angle ADB = \angle FDB$ 和 $\angle ADB = \angle BFD$ ($\angle DAB = \angle BDF$) 两种情况, 利用相似三角形的性质以及解直角三角形, 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because CE:DE = 1:2$,

$\therefore$ 设 $CE = k$, $DE = 2k$,

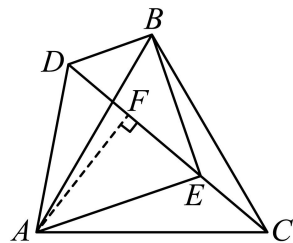
$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$\therefore AE = DE = 2k$, $\angle AED = 60^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 120^\circ$,

在 $\triangle AEC$ 中, $AE = 2k$, $\angle AEC = 120^\circ$, $CE = k$,

过点 A 作 $AF \perp CD$, 则: $EF = \frac{1}{2}DE = k$,



$\therefore CF = CE + EF = 2k$, $AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{3}k$,

$\therefore AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{7}k$,

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形, ABC 为等边三角形,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = AE^2 : AC^2 = \frac{4}{7}$;

【小问 2 详解】

$\because \angle BAC = \angle DAE = n^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE = n^\circ - \angle BAE$,

$\because AB = AC$, $AD = AE$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle AEC$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$;

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$,

在 $\triangle BCE$ 中, $\angle BEC + \angle EBC + \angle BCE = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle BEC + \angle EBC + \angle BCE,$$

$$\text{即 } n^\circ + (\angle ABC - \angle EBC) + (\angle ACB - \angle BCE) = \angle BEC,$$

$$\therefore n^\circ + \angle ABE + \angle ACE = \angle BEC,$$

$$\therefore n^\circ + \angle ABE + \angle ABD = \angle BEC,$$

$$\therefore n^\circ + \angle EBD = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle BEC - \angle DBE = n^\circ$$

【小问3详解】

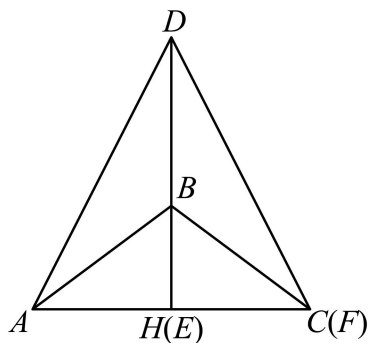
$$\because AB = BC = 5, \quad AC = 8, \quad BH \perp AC,$$

$$\therefore AH = CH = 4, \quad \angle ABH = \angle CBH,$$

$$\therefore BH \text{ 垂直平分 } AC, \quad BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 3,$$

当 $\angle DAE = \angle ABH$, $\triangle ABD$ 与 BDF 相似时:

①当 $\angle ADB = \angle FDB$ 时:



$$\because \angle ABH = \angle CBH,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because DB = DB$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle FDB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AD = FD,$$

$\because$ 点 D 在 AC 的中垂线上,

$$\therefore AD = CD,$$

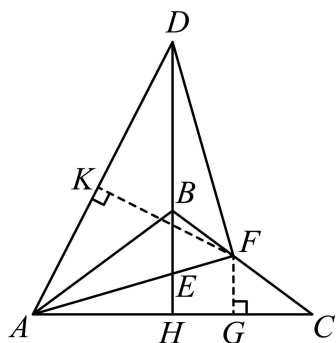
$$\therefore CD = FD,$$

$\because$ 点 F 在 BC 上,

$\therefore$ 点 C, F 重合;

此时：点 E 与点 H 重合（不合题意舍去）；

②当 $\angle ADB = \angle BFD$ ($\angle DAB = \angle BDF$) 时：



$$\because \angle ABH = \angle ADB + \angle BAD, \quad \angle DAE = \angle BAE + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ADF = \angle ABH,$$

$$\therefore AF = DF,$$

过点 F 作 $FG \perp AC$, $FK \perp AD$,

$$\therefore AD = 2AK,$$

$$\because \cos \angle DAF = \cos \angle ABH,$$

$$\therefore \frac{AK}{AF} = \frac{EH}{AB} = \frac{3}{5},$$

设 $AK = 3x$, 则: $AF = 5x, AD = 6x$,

$$\therefore DF = AF = 5x$$

$\because \triangle ABD$ 与 $\triangle BDF$ 相似

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{AB}{DB} = \frac{DB}{FB} \text{ 即 } \frac{6x}{5x} = \frac{5}{DB} = \frac{DB}{BF}$$

$$\therefore DB = \frac{25}{6}, \quad BF = \frac{125}{36},$$

$$\therefore CF = BC - BF = \frac{55}{36},$$

$$\therefore FG = CF \cdot \sin \angle ACB = CF \cdot \frac{BH}{CB} = \frac{55}{36} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{12}, \quad FG = CF \cdot \cos \angle ACB = CF \cdot \frac{CH}{BC} = \frac{55}{36} \times \frac{4}{5} = \frac{11}{9},$$

$$\therefore AG = AC - CG = \frac{61}{9},$$

$$\therefore \tan \angle FAG = \frac{EH}{AH} = \frac{FG}{AG} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{61}{9}}, \quad AH = 4,$$

$$\therefore EH = \frac{33}{61}.$$

【点睛】 本题考查等边三角形的性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识点，熟练掌握相关知识点，利用分类讨论的思想进行求解，是解题的关键.