

虹口区 2024 学年度初三第一次学生学习能力诊断练习

数学 练习卷

评分参考建议

2025.1

说明:

1. 解答只列出试题的一种或几种解法. 如果解法与所列解法不同, 可参照解答中评分标准相应评分;
2. 第一、二大题若无特别说明, 每题评分只有满分或零分;
3. 第三大题中各题右端所注分数, 表示正确做对这一步应得分数;
4. 评阅试卷, 要坚持每题评阅到底, 不能因解答中出现错误而中断对本题的评阅. 如果解答在某一步出现错误, 影响后继部分而未改变本题的内容和难度, 视影响的程度决定后继部分的给分, 但原则上不超过后继部分应得分数的一半;
5. 评分时, 给分或扣分均以 1 分为基本单位.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. B 2. D 3. C 4. A 5. B 6. C

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 4 8. $-\vec{a} + 3\vec{b}$ 9. 0 10. (0, 4)
11. $m < 2$ 12. $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一) 13. 6 14. 24
15. $-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ 16. 36 17. $1 < CD < \frac{5}{3}$ 18. $\frac{20}{3}$ 或 $3\sqrt{5}$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 解: 原式 = $\frac{1}{\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2}$ (8 分)
$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
 (2 分)
20. 解: (1) 把 $B(-1, 0)$ 代入,
可得 $0 = 1 - 2m + m + 1$ 解得 $m = 2$ (3 分)
 $\therefore y = x^2 + 4x + 3$
 $\therefore$ 对称轴是直线 $x = -2$ (2 分)
- (2) $\because y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ (1 分)
设新抛物线的表达式为 $y = (x+2-n)^2 - 1$ (1 分)
 $\therefore$ 新抛物线经过原点 $\therefore 0 = (0+2-n)^2 - 1$ (1 分)
解得 $n_1 = 1, n_2 = 3$
 $\therefore n$ 的值是 1 或 3 (2 分)
21. 解: (1) 过点 A 作 $AH \perp CD$, 垂足为点 H
在 $Rt\triangle ABH$ 中, $AH = AB \cdot \sin B = 10 \times \frac{3}{5} = 6$ (1 分)
 $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = 8$ (1 分)

$$\therefore CH=8-5=3 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } \tan \angle ACD = \frac{AH}{CH} = 2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AD = AC \quad \therefore \angle ADC = \angle ACD$$

$$\therefore \tan \angle ADC = \tan \angle ACD = 2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$(2) \because \angle E = \angle BAC \quad \angle ABC = \angle EBA$$

$$\therefore \triangle BAC \sim \triangle BEA \quad \therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{AB} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{10}{BE} = \frac{5}{10} \quad \therefore BE = 20 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\because AD = AC \quad AH \perp CD \quad \therefore CD = 2CH = 6$$

$$\therefore DE = 9 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$22. \text{ 证明: } (1) \because DE \perp AC \quad \therefore \angle ADE = 90^\circ$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ \quad \therefore \angle ADE = \angle ABC$$

$$\because \angle DAE = \angle BAC, \quad \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\because \angle BAD = \angle CAE \quad \therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$(2) \because \triangle ABD \sim \triangle ACE \quad \therefore \angle ABD = \angle ACE \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle DFE = \angle ABD + \angle BEF = \angle ACE + \angle CDF$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CDF \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because BC = BE \quad \therefore \angle BEF = \angle BCF$$

$$\therefore \angle CDF = \angle BCF \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because \angle DBC = \angle CBF \quad \therefore \triangle BCD \sim \triangle BFC$$

$$\therefore \frac{BC}{BF} = \frac{BD}{BC} \text{ 即 } BC^2 = BF \cdot BD \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{Rt}\triangle CBE \text{ 中, } \angle BEF = \angle BCF = 45^\circ \quad \therefore CE = \sqrt{2}BC$$

$$\therefore \frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

23. 解: 任务一: 过点 B 作 EH 的垂线分别交 EH 、 DC 的延长线于点 M 、 N

$$\text{在 Rt}\triangle BAM \text{ 中, } BM = AB \cdot \sin \angle BAM = 20 \times \sin 37^\circ \approx 12 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$AM = AB \cdot \cos \angle BAM = 20 \times \cos 37^\circ \approx 16 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{由题可得 } MN = ED = 52 \quad \therefore BN = 40$$

$$\text{可得 } \angle CBN = \angle BAM = 37^\circ$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCN \text{ 中, } CN = BN \cdot \tan \angle CBN = 40 \times \tan 37^\circ \approx 30 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore CD = 176 - 30 = 146, \quad \therefore EM = DN = 146 + 30 = 176$$

$$\therefore AE = EM - AM = 160\text{cm} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

答: 点 A 到地面的距离 AE 长约为 160cm . $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

任务二: ①小明洗澡时“舒适喷淋点”的高度为 $130 - 30 = 100 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{在 Rt}\triangle BAM \text{ 中, } BM = AB \cdot \sin \angle BAM = 20 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

$$AM = AB \cdot \cos \angle BAM = 20 \times \cos 60^\circ = 10 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{由题可得 } MN = DE = 52 \quad \therefore BN = 52 - 10\sqrt{3}$$

$$\text{由 } \angle ABC = 90^\circ \text{ 可得 } \angle CBN = \angle BAM = 60^\circ$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCN \text{ 中, } CN = BN \cdot \tan \angle CBN = (52 - 10\sqrt{3}) \times \tan 60^\circ$$

$$= 52\sqrt{3} - 30 \approx 59.5 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AE = 160 \quad \therefore EM = DN = 160 + 10 = 170$$

$$\therefore CD = DN - CN = 170 - (52\sqrt{3} - 30) = 200 - 52\sqrt{3} = 110.04 > 100 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

∴ 不改变固定器的位置, 小明发现水流无法喷在他的“舒适喷淋点”处.

② 设当点 A 下降至点 A' 时, 点 B 下降至点 B' , 点 C 下降至点 C'

过点 B' 作 EH 的垂线分别交 EH 、 DC' 的延长线于点 M' 、 N'

由题可得此时 $C'D=100$, $\angle M'A'B'=60^\circ$

由①题可得 $C'N'=52\sqrt{3}-30$, $EM'=DN'$, $A'M'=10$, $AE=160$

$$\therefore EM'=DN'=100+52\sqrt{3}-30=70+52\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore A'E=EM'-A'M'=70+52\sqrt{3}-10=60+52\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AA'=AE-A'E=160-(60+52\sqrt{3})=100-52\sqrt{3} \approx 10 \quad \dots\dots\dots (1$$

分)

答: 此时固定器下降的距离 AA' 为 10cm.

24. 解: (1) 由题得点 $C(0, 3)$ $\therefore OC=3$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = 3$

$$\therefore OA=1 \quad \therefore A(-1, 0) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$\therefore$ 抛物线 $y=-x^2+bx+3$ 经过点 $A(-1, 0)$

$$\therefore 0=-1-b+3, \text{ 解得 } b=2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$\therefore$ 抛物线的表达式 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

$$\therefore D(1, 4) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(2) ① 可得 $B(3, 0)$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

设 $P(t, -t^2+2t+3)$

由题可得 P 关于 x 轴的对称点 $P'(t, t^2-2t-3)$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$\therefore$ 点 P' 在直线 BC 上 $\therefore t^2-2t-3=-t+3$

解得 $t=3$ (舍) 或 $t=-2$

$$\therefore P(-2, -5) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

② 易得 $\angle ABC=\angle ABP=45^\circ$, 点 M 在 BP 上方

$$\therefore \angle MBP=\angle ABD, \quad \therefore \angle ABM=\angle DBC \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

在 $\triangle BDC$ 中, $CD=\sqrt{2}$, $BC=3\sqrt{2}$, $BD=2\sqrt{5}$,

$$\therefore CD^2+BC^2=BD^2 \quad \therefore \angle BCD=90^\circ$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

设 $M(m, -m^2+2m+3)$, 过点 M 作 $MH \perp x$ 轴, 垂足为点 H

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle MBH \text{ 中, } \tan \angle MBH = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$$

$$\text{即 } \frac{-m^2+2m+3}{3-m} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得 } m_1=3 \text{ (舍), } m_2=-\frac{2}{3} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore M(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}) \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

25. (1) 证明: $\therefore \angle BCD=90^\circ \quad \therefore \angle BEC=90^\circ-\angle EBC$, $\angle ACB=90^\circ-\angle ACD$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\therefore \angle ACD=2\angle EBC, \quad \angle CFE=\angle ACB+\angle EBC$$

$$\therefore \angle CFE=90^\circ-\angle ACD+\angle EBC=90^\circ-\angle EBC \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle BEC=\angle CFE \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore CE=CF \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(2) 延长 AD 、 BE 相交于点 G , 过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为点 H

$$\therefore CD=2, E \text{ 是 } CD \text{ 的中点} \quad \therefore DE=CE=1$$

$$\because AD \parallel BC \quad \therefore \frac{DG}{BC} = \frac{DE}{CE} = 1, \text{ 即 } DG=BC \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because BC=2AD, \quad \therefore AG=\frac{3}{2}BC, \quad \therefore \frac{AF}{CF} = \frac{AG}{BC} = \frac{3}{2}.$$

$$\because CF=CE=1 \quad \therefore AF=\frac{3}{2} \quad \therefore AC=\frac{5}{2} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because AD \parallel BC, \angle BCD=90^\circ \quad \therefore \angle ADC=180^\circ - \angle BCD=90^\circ$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{3}{2} \quad \therefore BC=3 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可得四边形 AHCD 是矩形

$$\therefore AH=CD=2, CH=AD=\frac{3}{2} \quad \therefore BH=\frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(3) 延长 AD、BE 相交于点 G, 过点 A 作 AH⊥BC, 垂足为点 H

$$\because \angle ABE = \angle ACB = 90^\circ - 2\angle EBC$$

$$\therefore \angle ABH = \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ - \angle EBC$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } \angle BAH = 90^\circ - \angle ABH \quad \therefore \angle BAH = \angle EBC$$

$$\because \angle AHB = \angle ECB = 90^\circ \quad \therefore \triangle ABH \sim \triangle BEC$$

设 BC=x

$$\therefore \frac{AH}{BC} = \frac{BH}{EC} \text{ 即 } \frac{2}{x} = \frac{BH}{1} \quad \text{解得 } BH = \frac{2}{x} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AD = CH = BC - BH = x - \frac{2}{x}$$

$$\because AD \parallel BC, \quad \therefore \frac{DG}{BC} = \frac{DE}{CE} = 1, \text{ 即 } DG=BC=x.$$

$$\therefore AG=AD+DG=2x-\frac{2}{x}$$

$$\because AD \parallel BC \quad \therefore \frac{AG}{BC} = \frac{AF}{CF}$$

$$\text{即 } \frac{2x-\frac{2}{x}}{x} = \frac{AF}{1} \quad \therefore AF = 2 - \frac{2}{x^2} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } AB^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2^2$$

$$\because \angle ABF = \angle ACB, \angle BAF = \angle CAB, \quad \therefore \triangle ABF \sim \triangle ACB$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad \text{即 } AB^2 = AF \cdot AC \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2^2 = \left(2 - \frac{2}{x^2}\right)\left(2 - \frac{2}{x^2} + 1\right)$$

$$\text{解得 } x^2 = \frac{7+\sqrt{41}}{2} \text{ 或 } x^2 = \frac{7-\sqrt{41}}{2} \text{ (舍)} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{x-\frac{2}{x}}{x} = \frac{x^2-2}{x^2} = \frac{\sqrt{41}-5}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$