

虹口区 2024 学年度初三年级第一次学生学习能力诊断练习

数学 练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

2025.1

注意:

1. 本练习含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列各组图形中, 一定相似的是
A. 两个菱形; B. 两个正方形; C. 两个三角形; D. 两个等腰三角形.
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C=90^\circ$, $AB=5$, $BC=3$, 那么 $\angle B$ 的正切值为
A. $\frac{3}{5}$; B. $\frac{3}{4}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $\frac{4}{3}$.
3. 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$, 下列条件中, 不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是
A. $\vec{a}=2\vec{b}$; B. $\vec{a}=2\vec{c}$, $2\vec{b}=\vec{c}$; C. $|3\vec{a}|=|2\vec{b}|$; D. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$.
4. 已知 $(-3, y_1)$ 、 $(0, y_2)$ 和 $(1, y_3)$ 都在抛物线 $y=(x+2)^2$ 上, 那么 y_1 、 y_2 和 y_3 的大小关系为
A. $y_1 < y_2 < y_3$; B. $y_1 < y_3 < y_2$; C. $y_1 > y_2 > y_3$; D. $y_1 > y_3 > y_2$.
5. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 如图 1 所示, 下列结论中, 正确的是
A. $a > 0$; B. $b < 0$; C. $c < 0$; D. $a+b+c > 0$.
6. 如图 2, 已知 $AB \parallel CD$, 联结 AD 、 BC 交于点 O , 联结 AC , $\angle ACB = \angle BAD$, 如果 $AB=2$, $CD=6$, 那么 CO 长为
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

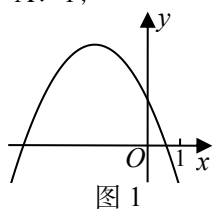


图 1

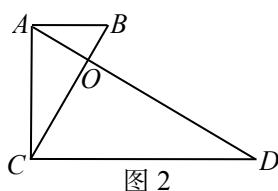


图 2

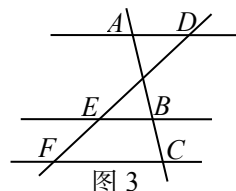


图 3

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知线段 a 是线段 b 、 c 的比例中项, $b=2\text{cm}$, $c=8\text{cm}$, 那么 $a=\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle\text{cm}$.
8. 计算: $2\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{a})=\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.
9. 已知 $y=2x^{m^2+2}$ 是二次函数, 那么 m 的值是 $\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.
10. 抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 与 y 轴的交点是 $\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.
11. 如果抛物线 $y=(m-2)x^2-2$ 有最高点, 那么 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.
12. 已知抛物线在 y 轴右侧的部分是下降的, 且经过 $(0, 1)$, 请写出一个符合上述条件的抛物线表达式是 $\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.
13. 如图 3, 直线 $AD \parallel EB \parallel FC$, 如果 $DE=2EF$, $AC=9$, 那么 AB 长是 $\underline{\hspace{1cm}}\blacktriangle$.

14. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的最长边分别是 5 和 10，如果 $\triangle ABC$ 的面积是 6，那么 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 ▲ .
15. 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，联结 BE 、 DE ，如果 $BD=2AD$ ， $DE \parallel BC$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BE} =$ ▲ .
16. 如图 5，正方形 $ABCD$ 的顶点 B 、 C 在 x 轴上，点 A 、 D 恰好在抛物线 $y = x^2 - 3$ 上，那么正方形 $ABCD$ 的面积是 ▲ .
17. 如图 6，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $\tan C = 2$ ， D 是 AC 上的动点，将 $\triangle BCD$ 沿 BD 翻折，如果点 C 落到 $\triangle ABD$ 内（不包括边），那么 CD 的取值范围是 ▲ .

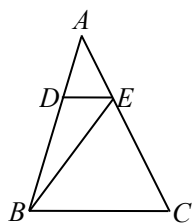


图 4

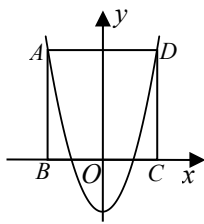


图 5

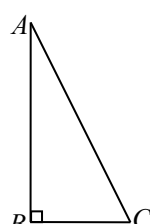


图 6

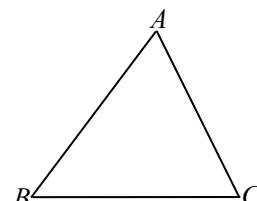


图 7

18. 过三角形的重心作一条直线与这个三角形两边相交，如果截得的三角形与原三角形相似，那么我们把这条直线叫做这个三角形的“重似线”，这条直线与两边交点之间的线段叫做这个三角形的“重似线段”。如图 7，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $\tan B = \frac{4}{3}$ ， $\tan C = 2$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，如果线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的“重似线段”，那么 $DE =$ ▲ .

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. （本题满分 10 分）

计算：
$$\frac{\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \sin 30^\circ} - \cos 60^\circ.$$

20. （本题满分 10 分，第（1）题满分 5 分，第（2）题满分 5 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + 2mx + m + 1$ 经过点 $B(-1, 0)$ 。

- （1）求 m 的值以及抛物线的对称轴；
- （2）将该抛物线向右平移 n 个单位后得到新抛物线，如果新抛物线经过原点，求 n 的值。

21. （本题满分 10 分，第（1）题满分 5 分，第（2）题满分 5 分）

如图 8，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 5$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ，点 D 、 E 在 BC 的延长线上，联结 AD 、

AE ，且 $AD = AC$ 。

- （1）求 $\tan \angle ADC$ 的值；
- （2）如果 $\angle E = \angle BAC$ ，求 DE 的长。

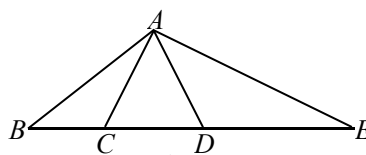


图 8

22. (本题满分 10 分, 第 (1) 题满分 5 分, 第 (2) 题满分 5 分)

如图 9, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, 点 D 在边 AC 上, 过点 D 作 DE 垂直 AC 交 AB 于点 E , 联结 EC 、 BD 交于点 F .

(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

(2) 如果 $BC=BE$, 求证: $\frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$.

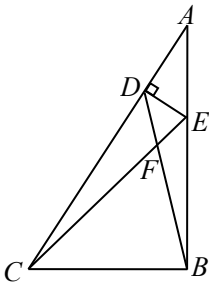
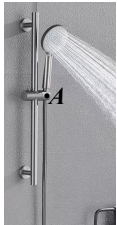
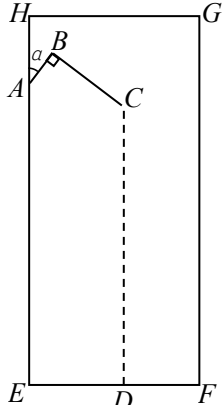


图 9

23. (本题满分 12 分, 任务一满分 5 分, 任务二满分 7 分)

根据以下素材, 完成任务.

探究淋浴喷头的位置		
素材 1	图 10 是一种淋浴喷头, 淋浴喷头固定器装在升降杆上的某处, 手柄与固定器的连接处记为点 A (点 A 与墙之间的距离忽略不计). 图 11 视作淋浴喷头喷水后的截面示意图, 线段 AB 为手柄, 射线 BC 为水流, BC 与 AB 的夹角 $\angle ABC$ 为 90°, 手柄 AB 与墙 EH 的夹角 $\angle HAB$ 为淋浴喷头的“调整角”, 记为 α. 已知 AB 长为 20cm.	  图 10 图 11
素材 2	图 12 中的矩形 $EFGH$ 是淋浴房的截面图, $EF=90\text{cm}$, $EH=195\text{cm}$. 为了方便在淋浴房里淋浴, 规定淋浴时, 人一直站在 D 处, $DE=52\text{cm}$.	 图 12
素材 3	我们把人竖直站立时, 头顶以下 30cm 处记为这个人的“舒适喷淋点”, 即“舒适喷淋点”到地面的距离等于人的身高减 30cm. 已知小明的身高是 130cm, 他爸爸和妈妈的身高分别是 176cm 和 160cm. 某次爸爸洗澡时, 将淋浴喷头固定器调整至如图 12 的点 A 处, “调整角” α 为 37°, 此时水流正好喷在爸爸的“舒适喷淋点” C 处 (即 $CD=\text{爸爸身高}-30$).	
素材 4	参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$.	
问题解决	任务一	求图 12 中, 淋浴喷头手柄与固定器的连接处点 A 到地面的距离 AE .
	任务二	爸爸洗完澡后, 不改变固定器的位置 (即 AE 不变), 把淋浴喷头的“调整角” α 调整至 60°, 然后小明进淋浴房洗澡. ①小明发现水流无法喷在他的“舒适喷淋点”处, 请通过计算说明理由; ②下降固定器 (将固定器下降后的位置记为点 A') 后, 小明发现水流可以喷在他的“舒适喷淋点”处, 求此时固定器下降的距离 AA' (精确到 1cm).

24. (本题满分 12 分, 第 (1) 题满分 4 分, 第 (2) ①题满分 3 分, 第 (2) ②题满分 5 分)

如图 13, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 联结 AC , $\tan \angle CAO = 3$, 抛物线的顶点为点 D .

(1) 求 b 的值和点 D 的坐标;

(2) 点 P 是抛物线上一点 (不与点 B 重合), 点 P 关于 x 轴的对称点恰好在直线 BC 上.

①求点 P 的坐标;

②点 M 是抛物线上一点且在对称轴左侧, 联结 BM , 如果 $\angle MBP = \angle ABD$, 求点 M 的坐标.

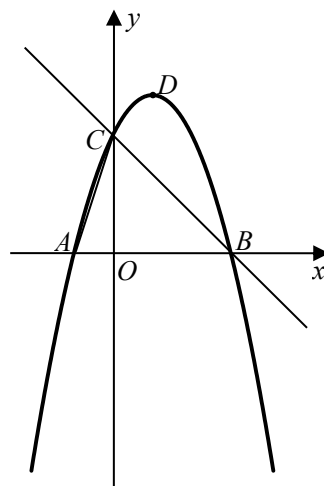


图 13

25. (本题满分 14 分, 第 (1) 题满分 4 分, 第 (2) 题满分 5 分, 第 (3) 题满分 5 分)

如图 14, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = 2$, E 是 CD 的中点, AC 、 BE 交于点 F , 且 $\angle ACD = 2\angle EBC$.

(1) 求证: $CE = CF$;

(2) 如果 $BC = 2AD$, 求 $\tan \angle ABC$ 的值;

(3) 如果 $\angle ABE = \angle ACB$, 求 $\frac{AD}{BC}$ 的值.

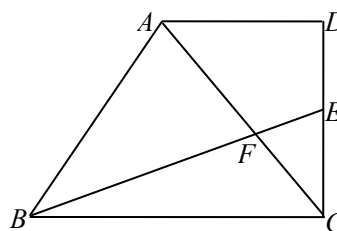


图 14