

虹口区 2024-2025 学年度初三年级第一次学生学习能力诊断练习

数学练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟) 2025.1

注意:

1. 本练习含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列各组图形中, 一定相似的是 ()

- A. 两个菱形 B. 两个正方形 C. 两个三角形 D. 两个等腰三角形

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是相似图形, 根据相似图形的定义解答即可.

【详解】 解: A、两个菱形的对应角不一定相等, 故两个菱形不一定相似, 不符合题意;

B、两个正方形一定相似, 符合题意;

C、两个三角形不一定相似, 不符合题意;

D、两个等腰三角形不一定相似, 不符合题意,

故选: B.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$, 那么 $\angle B$ 的正切值为 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{3}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查锐角三角函数定义, 勾股定理, 利用勾股定理求得 AC 的长度, 然后求得 $\angle B$ 的正切值即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 3$,

$$\therefore AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore \tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3},$$

故选: D.

3. 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$, 下列条件中, 不能判定 $\vec{a} // \vec{b}$ 的是 ()

A. $\vec{a} = 2\vec{b}$

B. $\vec{a} = 2\vec{c}, 2\vec{b} = \vec{c}$

C. $|3a| = |2b|$

D. $\vec{a} // \vec{c}, \vec{b} // \vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了向量. 根据向量平行向量的定义“方向相同或相反的非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 叫做平行向量”进行逐一判定即可.

【详解】解: A. $\vec{a} = 2\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 故 $\vec{a} // \vec{b}$, 选项不符合题意;

B. $\vec{a} = 2\vec{c}, 2\vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 方向相同, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 方向相同, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同, 故 $\vec{a} // \vec{b}$, 选项不符合题意;

C. $|3a| = |2b|$, 不能说明 $\vec{a} // \vec{b}$, 选项符合题意;

D. $\vec{a} // \vec{c}, \vec{b} // \vec{c}$, 则 $\vec{a} // \vec{b}$, 选项不符合题意;

故选: C

4. 已知 $(-3, y_1)$ 、 $(0, y_2)$ 和 $(1, y_3)$ 都在抛物线 $y = (x+2)^2$ 上, 那么 y_1 、 y_2 和 y_3 的大小关系为 ()

A. $y_1 < y_2 < y_3$

B. $y_1 < y_3 < y_2$

C. $y_1 > y_2 > y_3$

D. $y_1 > y_3 > y_2$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象性质, 因为抛物线 $y = (x+2)^2$, 则函数的开口方向向上, 对称轴是 $x = -2$, 越靠近对称轴的 x 所对应的函数值越小, 即可作答.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = (x+2)^2$,

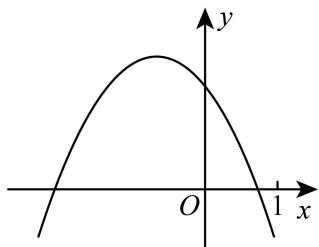
$\therefore$ 函数的开口方向向上, 对称轴是 $x = -2$, 越靠近对称轴的 x 所对应的函数值越小,

$\therefore (-3, y_1)$ 、 $(0, y_2)$ 和 $(1, y_3)$ 都在抛物线 $y = (x+2)^2$ 上, 且 $|-3 - (-2)| < |0 - (-2)| < |1 - (-2)|$,

$$\therefore y_1 < y_2 < y_3,$$

故选：A.

5. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 如图所示，下列结论中，正确的是 ()



A. $a > 0$

B. $b < 0$

C. $c < 0$

D. $a + b + c > 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象与系数的关系，根据函数图象可以判断 a 、 b 、 c 的正负情况，从而可以解答本题.

【详解】解：由函数图象，可得

函数开口向下，则 $a < 0$ ，故 A 错误；

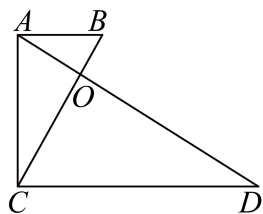
顶点在 y 轴右侧，则 $b > 0$ ，故 B 正确；

图象与 y 轴交点在 y 轴正半轴，则 $c > 0$ ，故 C 错误；

当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，则 $a + b + c < 0$ ，故 D 错误；

故选：B.

6. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ，联结 AD ， BC 交于点 O ，联结 AC ， $\angle ACB = \angle BAD$ ，如果 $AB = 2$ ， $CD = 6$ ，那么 CO 长为 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的判定和性质. 证明 $\triangle BAO \sim \triangle CDO$ ，得到 $CO = 3BO$ ，证明

$\triangle BAO \sim \triangle BCA$, 得到 $BC \cdot BO = AB^2 = 4 = 4BO^2$, 解得 $BO = 1$, 即可求出 CO 长.

【详解】解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CDO, \angle B = \angle DCO,$$

$$\therefore \triangle BAO \sim \triangle CDO,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{CO} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CO = 3BO$$

$$\therefore BC = BO + CO = 4BO$$

$$\because \angle ACB = \angle BAD, \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BAO \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BO}{AB},$$

$$\therefore BC \cdot BO = AB^2 = 4 = 4BO^2,$$

$$\therefore BO = 1 \text{ 或 } BO = -1 \text{ (不合题意, 舍去)}$$

$$\therefore CO = 3BO = 3$$

故选: C

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知线段 a 是线段 b 、 c 的比例中项, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$, 那么 $a = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了比例线段, 根据题意可得 $a^2 = bc$, 代入数值求解即可.

【详解】 解: $\because$ 线段 a 是线段 b, c 的比例中项, $b = 2 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$

$$\therefore a^2 = bc = 2 \times 8 = 16$$

$$\therefore a = 4 \text{ (负值舍去)}$$

$$\therefore a = 4 \text{ cm}$$

故答案为: 4.

8. 计算: $2\vec{a} + 3(\vec{b} - \vec{a}) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $-\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的计算，解题的关键是掌握平面向量的计算方法，根据平面向量的加减法计算法则和去括号法则进行计算.

【详解】 解: $2\vec{a} + 3(\vec{b} - \vec{a}) = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{a} = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

故答案为: $-\vec{a} + 3\vec{b}$.

9. 已知 $y = 2x^{m^2+2}$ 是二次函数，那么 m 的值是_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的定义，根据“形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的函数关系，称为 y 关于 x 的二次函数”，即可求解.

【详解】 解: 根据题意，得 $m^2 + 2 = 2$,

$\therefore m = 0$.

故答案为: 0.

10. 抛物线 $y = (x-1)^2 + 3$ 与 y 轴的交点是_____.

【答案】 (0,4)

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与坐标轴的交点，正确把握二次函数图象上点的特征是解题的关键. 根据题意，令 $x = 0$ ，求出 y 的值，即可求出抛物线与 y 轴的交点.

【详解】 解: 令 $x = 0$ ，则 $y = (x-1)^2 + 3 = (0-1)^2 + 3 = 4$,

$\therefore$ 抛物线 $y = (x-1)^2 + 3$ 与 y 轴的交点是 (0,4).

故答案为: (0,4).

11. 如果抛物线 $y = (m-2)x^2 - 2$ 有最高点，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图像与性质，根据抛物线有最高点，得到解析式的二次项系数小于 0，从而得到结果.

【详解】解：∵抛物线 $y = (m-2)x^2 - 2$ 有最高点

∴抛物线图像的开口向下

$$\therefore m-2 < 0$$

$$\therefore m < 2$$

故答案为： $m < 2$.

12. 已知抛物线在 y 轴右侧的部分是下降的，且经过 $(0,1)$ ，请写出一个符合上述条件的抛物线表达式是_____.

【答案】 $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质，掌握二次函数在对称轴两侧的增减性相反是解题的关键. 根据抛物线在 y 轴右侧的部分是下降的，确定其开口方向 and 对称轴所在位置，然后根据经过的点的坐标确定解析式即可.

【详解】解：∵抛物线在 y 轴右侧的部分是下降的，

∴抛物线开口向下，且对称轴为 y 轴或在 y 轴的左侧，

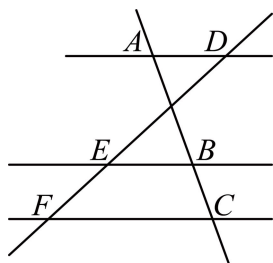
∴设抛物线的解析式可以为 $y = -x^2 + c$,

∵抛物线经过 $(0,1)$,

∴抛物线的解析式可以为 $y = -x^2 + 1$.

故答案为： $y = -x^2 + 1$ (答案不唯一).

13. 如图，直线 $AD \parallel EB \parallel FC$ ，如果 $DE = 2EF$ ， $AC = 9$ ，那么 AB 长_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理，根据平行线分线段成比例定理列出比例式计算即可，灵活运用平行线分线段成比例定理是解题的关键.

【详解】解：∵ $AD \parallel EB \parallel FC$,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore \frac{2EF}{EF} = \frac{AB}{9-AB},$$

$$\therefore \frac{AB}{9-AB} = 2,$$

$$\therefore AB = 6,$$

故答案为：6.

14. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的最长边分别是 5 和 10，如果 $\triangle ABC$ 的面积是 6，那么 $\triangle A'B'C'$ 的面积是_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的性质. 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方进行解答即可.

【详解】解：∵ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的最长边分别是 5 和 10，

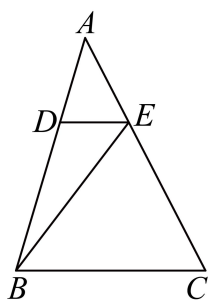
$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle A'B'C'} = 4S_{\triangle ABC} = 4 \times 6 = 24,$$

故答案为：24

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，连接 BE 、 DE ，如果 $BD = 2AD$ ， $DE \parallel BC$ ，

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BE} =$ _____.



【答案】 $-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质与判定以及平面向量，先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，再利用比例关系结合平面向量的运算法则进行计算即可.

【详解】 $\because BD = 2AD$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\vec{a}$$

$\because DE \parallel BC$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

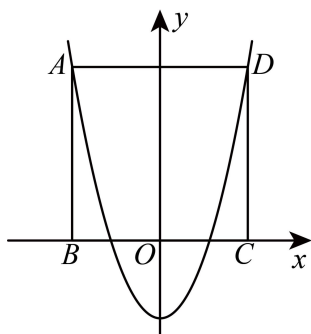
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

故答案为: $-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

16. 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点 B 、 C 在 x 轴上, 点 A 、 D 恰好在抛物线 $y = x^2 - 3$ 上, 那么正方形 $ABCD$ 的面积是_____.



【答案】 36

【解析】

【分析】 此题考查二次函数的图象和性质、正方形的性质. 根据题意设点 D 的坐标是 $(m, 2m)$, 点 A 、 D 恰好在抛物线 $y = x^2 - 3$ 上, 得到 $2m = m^2 - 3$, 解得, $m_1 = 3, m_2 = -1$ (不合题意, 舍去), 得到点 D 的坐标是 $(3, 6)$, 得到正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 即可求出正方形 $ABCD$ 的面积.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 顶点 B 、 C 在 x 轴上, 点 A 、 D 恰好在抛物线 $y = x^2 - 3$ 上,

$$\therefore BO = CO = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}CD,$$

$\therefore$ 可设点 D 的坐标是 $(m, 2m)$,

∵ 点 A、D 恰好在抛物线 $y = x^2 - 3$ 上,

$$\therefore 2m = m^2 - 3,$$

解得, $m_1 = 3, m_2 = -1$ (不合题意, 舍去),

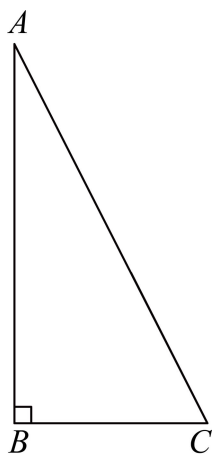
∴ 点 D 的坐标是 $(3, 6)$,

∴ 正方形 ABCD 的边长为 6,

∴ 正方形 ABCD 的面积是 36,

故答案为: 36

17. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = 5$, $\tan C = 2$, D 是 AC 上的动点, 将 $\triangle BCD$ 沿 BD 翻折, 如果点 C 落到 $\triangle ABD$ 内 (不包括边), 那么 CD 的取值范围是_____.



【答案】 $1 < CD < \frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理与折叠问题, 解直角三角形, 等腰直角三角形的性质与判定, 先解直角三角形得到 $AB = 2BC$, 再利用勾股定理求出 $BC = \sqrt{5}$; 设点 C 折叠后的对应点为 E, 再分点 E 恰好在 AC 上和点 E 恰好在 AB 上两种情况, 分别求出对应的 CD 的长即可得到结论.

【详解】 解: ∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\tan C = 2$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = 2,$$

$$\therefore AB = 2BC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得 $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

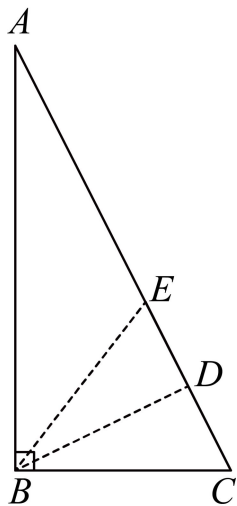
$$\therefore (2BC)^2 + BC^2 = 5^2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{5},$$

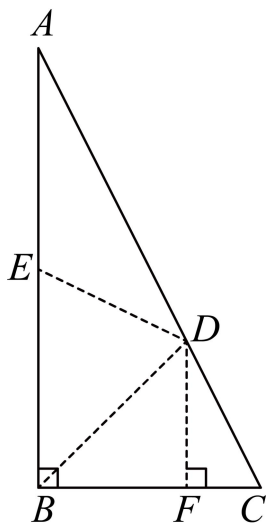
设点 C 折叠后的对应点为 E ,

如图所示, 当点 E 恰好在 AC 上时,

由折叠的性质可得 $\angle BDC = \angle BDE = 90^\circ$, 则同理可得 $CD = 1$;



如图所示, 当点 E 恰好在 AB 上时, 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ,



由折叠的性质可得 $\angle EBD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$,

$$\therefore DF \perp BC,$$

$\therefore BDF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BF = DF,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle CDF \text{ 中, } \tan C = \frac{DF}{CF} = 2,$$

$$\therefore BF = DF = 2CF,$$

$$\therefore BC = BF + CF = 3CF = \sqrt{5},$$

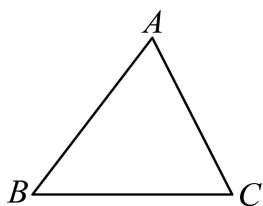
$$\therefore CF = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore CD = \sqrt{CF^2 + DF^2} = \sqrt{5}CF = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{当点 } C \text{ 落到 } \triangle ABD \text{ 内 (不包括边) 时, } 1 < CD < \frac{5}{3},$$

故答案为: $1 < CD < \frac{5}{3}$.

18. 过三角形的重心作一条直线与这个三角形两边相交, 如果截得的三角形与原三角形相似, 那么我们把这条直线叫做这个三角形的“重似线”, 这条直线与两边交点之间的线段叫做这个三角形的“重似线段”. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=10$, $\tan B = \frac{4}{3}$, $\tan C = 2$, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 如果线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的“重似线段”, 那么 $DE =$ _____.



【答案】 $\frac{20}{3}$ 或 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】如图, 作 $AG \perp BC$ 于 G , 求解 $AG=8$, $BG=6$, $CG=4$, $BC=6+4=10$,

$AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$, 作 $\triangle ABC$ 的中线 AF , Q 为 $\triangle ABC$ 的重心, 线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的“重似线段”,

分两种情况: 当 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 时, 当 $\triangle AD'E' \sim \triangle ACB$ 时, 过 B 作 $BH \perp AC$ 交 AC 于 H , 再进一步求解即可.

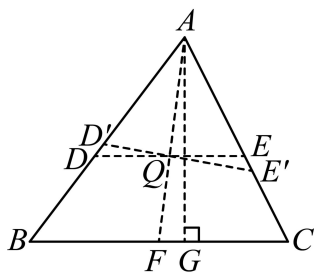
【详解】解: 如图, 作 $AG \perp BC$ 于 G , $AB=10$, $\tan B = \frac{4}{3}$, $\tan C = 2$,

$$\therefore \frac{AG}{BG} = \frac{4}{3}, \quad \frac{AG}{CG} = 2,$$

$$\therefore AG=8, \quad BG=6, \quad CG=4,$$

$$\therefore BC=6+4=10, \quad AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5},$$

作 $\triangle ABC$ 的中线 AF , Q 为 $\triangle ABC$ 的重心,



$$\therefore \frac{AQ}{AF} = \frac{2}{3},$$

$\therefore$ 线段 DE 是 $\triangle ABC$ 的“重似线段”，

$\therefore$ 当 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 时，

$$\therefore \angle ADE = \angle B, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

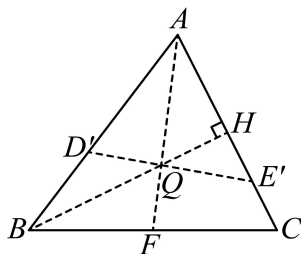
$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AQ}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{10} = \frac{DE}{10} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{20}{3}, \quad AD = \frac{20}{3},$$

当 $\triangle AD'E' \sim \triangle ACB$ 时，过 B 作 $BH \perp AC$ 交 AC 于 H ，



$$\therefore \angle AE'D' = \angle ABC, \quad \angle AD'E' = \angle C, \quad \frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} = \frac{D'E'}{BC},$$

$$\therefore BA = BC = 10,$$

$$\therefore \angle C = \angle BAC, \quad AH = CH = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle BAC = \angle AD'E', \quad BH = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}, \quad Q \text{ 在 } BH \text{ 上},$$

$$\therefore AE' = D'E',$$

$$\therefore \frac{BQ}{BH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore QH = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$$\because \tan \angle AE'D' = \tan \angle ABC = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{\frac{4\sqrt{5}}{3}}{E'H} = \frac{4}{3}, \text{ 则 } E'H = \sqrt{5},$$

$$\therefore D'E' = AE' = AH + HE' = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{综上: } DE = \frac{20}{3} \text{ 或 } 3\sqrt{5};$$

$$\text{故答案为: } \frac{20}{3} \text{ 或 } 3\sqrt{5};$$

【点睛】 本题考查的是等腰三角形的判定与性质，三角形的重心的性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理的应用，锐角三角函数的应用，作出合适的辅助线是解本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2\sin 30^\circ} - \cos 60^\circ.$$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了特殊角的三角函数值的混合运算. 把特殊角的三角函数值代入后计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{\tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2\sin 30^\circ} - \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + 2mx + m + 1$ 经过点 $B(-1, 0)$.

(1) 求 m 的值以及抛物线的对称轴;

(2) 将该抛物线向右平移 n 个单位后得到新抛物线, 如果新抛物线经过原点, 求 n 的值.

【答案】(1) $m = 2$ ，直线 $x = 2$

(2) 1 或 3

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与几何变换、二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握以上知识点是关键.

(1) 将点 B 坐标代入解析式求出 m 值，再写出抛物线解析式顶点式，据此写出对称轴即可；

(2) 先求出平移后的解析式，根据抛物线图象上点的坐标特征求出 n 值即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = x^2 + 2mx + m + 1$ 经过点 $B(-1, 0)$,

$$\therefore 1 - 2m + m + 1 = 0,$$

解得 $m = 2$,

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1,$$

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = -2$;

【小问 2 详解】

解：将抛物线 $y = (x + 2)^2 - 1$ 向右平移 n 个单位后得到新抛物线为 $y = (x + 2 - n)^2 - 1$,

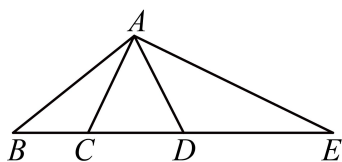
∵ 新抛物线经过原点,

$$\therefore (2 - n)^2 - 1 = 0,$$

解得 $n = 3$ 或 1 .

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $BC = 5$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ，点 D 、 E 在 BC 的延长线上，连接 AD 、 AE ，

且 $AD = AC$.



(1) 求 $\tan \angle ADC$ 的值;

(2) 如果 $\angle E = \angle BAC$ ，求 DE 的长.

【答案】(1) $\tan \angle ADC = 2$;

(2) $DE = 9$.

【解析】

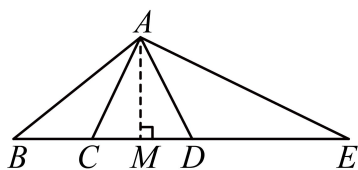
【分析】(1) 过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M ，根据正弦定义及勾股定理求出 $AM = 6$ ， $BM = 8$ ，则 $CM = 3$ ，根据等腰三角形的性质求出 $CM = DM = 3$ ，再根据正切定义求解即可；

(2) 根据“两角对应相等的两个三角形相似”求出 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$ ，再根据相似三角形的性质及线段的和差求解即可；

此题考查了相似三角形的判定与性质，解直角三角形，等腰三角形的性质，掌握知识点的应用是解题的关键。

【小问 1 详解】

解：如图，过点 A 作 $AM \perp CD$ 于点 M ，



在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中， $AB = 10$ ， $\sin B = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$ ，

$$\therefore AM = 6,$$

$$\therefore BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore BC = 5,$$

$$\therefore CM = BM - BC = 3,$$

$$\therefore AD = AC, \quad AM \perp CD,$$

$$\therefore CM = DM = 3,$$

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{AM}{DM} = \frac{6}{3} = 2;$$

【小问 2 详解】

解： $\because \angle E = \angle BAC, \quad \angle ABE = \angle CBA,$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB},$$

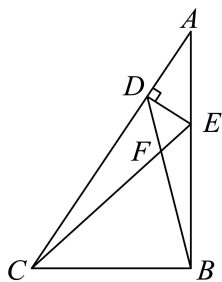
$$\therefore \frac{10}{5} = \frac{BE}{10},$$

$$\therefore BE = 20,$$

$$\therefore DE = BE - BC - CM - DM = 20 - 5 - 3 - 3 = 9.$$

22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 D 在边 AC 上，过点 D 作 DE 垂直 AC 交 AB 于点 E ，连

接 EC 、 BD 交于点 F 。



(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

(2) 如果 $BC = BE$, 求证: $\frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$ 。

【答案】(1) 详见解析 (2) 详见解析

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识:

(1) 由 $\angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle A = \angle A$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, 所以 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$, 则 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

(2) 由相似三角形的性质得 $\angle ABD = \angle ACE$, 推导出 $\angle BDC = \angle BEC$, 由 $BC = BE$, $\angle CBE = 90^\circ$, 得 $\angle BCF = \angle BEC$, $CE^2 = BC^2 + BE^2 = 2BC^2$, 则 $\angle BCF = \angle BDC$, $BC^2 = \frac{1}{2}CE^2$, 而 $\angle FBC = \angle CBD$, 所以 $\triangle FBC \sim \triangle CBD$, 则 $\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BC}$, 所以 $BC^2 = BF \cdot BD$, 则 $\frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$

【小问 1 详解】

$$\because \angle ABC = 90^\circ, DE \perp AC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\because \angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE$$

$$\therefore \angle BFC - \angle ACE = \angle BFC - \angle ABD$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC - \angle ACE, \quad \angle BEC = \angle BFC - \angle ABD$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEC$$

$$\because BC = BE, \angle CBE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BEC, \quad CE^2 = BC^2 + BE^2 = 2BC^2$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BDC, BC^2 = \frac{1}{2}CE^2$$

$$\because \angle FBC = \angle CBD$$

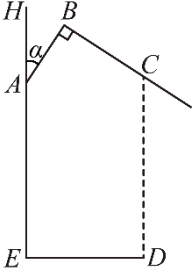
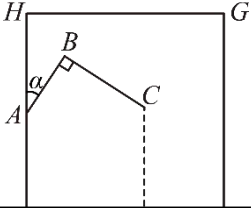
$$\therefore \triangle FBC \sim \triangle CBD$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BC}$$

$$\therefore BC^2 = BF \cdot BD$$

$$\therefore \frac{1}{2}CE^2 = BF \cdot BD$$

23. 根据以下素材，完成任务.

探究淋浴喷头的位置		
素材 1	图 1 是一种淋浴喷头，淋浴喷头固定器装在升降杆上的某处，手柄与固定器的连接处记为点 A（点 A 与墙之间的距离忽略不计）. 图 2 视作淋浴喷头喷水后的截面示意图，线段 AB 为手柄，射线 BC 为水流，BC 与 AB 的夹角 $\angle ABC$ 为 90°，手柄 AB 与墙 EH 的夹角 $\angle HAB$ 为淋浴喷头的“调整角”，记为 α. 已知 AB 长为 20 cm.	  图1 图2
素材 2	图 3 中的矩形 EFGH 是淋浴房的截面图，$EF = 90\text{ cm}$，$EH = 195\text{ cm}$. 为了方便在淋浴房里淋浴，规定淋浴时，	

	人一直站在 D 处, $DE = 52\text{ cm}$.	
素材 3	我们把人竖直站立时, 头顶以下 30cm 处记为这个人的“舒适喷淋点”, 即“舒适喷淋点”到地面的距离等于人的身高减 30cm . 已知小明的身高是 130cm , 他爸爸和妈妈的身高分别是 176 cm 和 160 cm . 某次爸爸洗澡时, 将淋浴喷头固定器调整至如图 12 的点 A 处, “调整角” α 为 37° , 此时水流正好喷在爸爸的“舒适喷淋点” C 处 (即 $CD = \text{爸爸身高} - 30$).	
素材 4	参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$.	
问题 解决	任务一	(1) 求图 3 中, 淋浴喷头手柄与固定器的连接处点 A 到地面的距离 AE .
	任务二	(2) 爸爸洗完澡后, 不改变固定器的位置 (即 AE 不变), 把淋浴喷头的“调整角” α 调整至 60° , 然后小明进淋浴房洗澡. ①小明发现水流无法喷在他的“舒适喷淋点”处, 请通过计算说明理由; ②下降固定器 (将固定器下降后的位置记为点 A') 后, 小明发现水流可以喷在他的“舒适喷淋点”处, 求此时固定器下降的距离 AA' (精确到 cm).

【答案】(1) 160cm ; (2) ①理由见解析; ② 10cm

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的应用. 把所给的角度整理到直角三角形中并进行解答是解决本题的关键.

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CBM = 60^\circ$,
 $\therefore AB = 20\text{cm}$,
 $\therefore AN = 10(\text{cm})$, $BN = 10\sqrt{3}(\text{cm})$,
 $\therefore BM = (52 - 10\sqrt{3})(\text{cm})$,
 $\therefore CM = (52 - 10\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 52\sqrt{3} - 30 \approx 59.96(\text{cm})$,
 $\therefore CD = AE + AN - CM = 160 + 10 - 59.96 \approx 110.04(\text{cm})$,
 $\therefore$ 小明的身高是 130cm ,
 $\therefore$ 小明的舒适距离 $CD = 130 - 30 = 100(\text{cm})$,
 $\therefore 110.04 > 100$,
 $\therefore$ 水流无法喷在小明的“舒适喷淋点”处;

② 设点 A 移动到了点 A' , 此时在小明的“舒适喷淋点”,

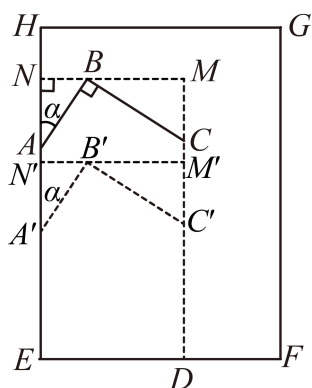
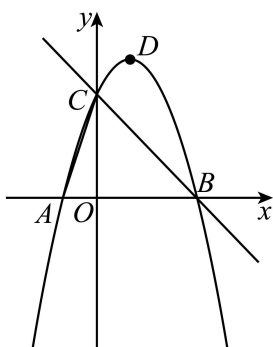


图3

$\therefore C'D = 100\text{cm}$,
 由题意得: $C'M' = CM \approx 59.96\text{cm}$, $A'N' = AN = 10\text{cm}$,
 $\therefore A'E = C'D + C'M' - A'N' = 100 + 59.96 - 10 \approx 150(\text{cm})$,
 $\therefore AA' = AE - A'E \approx 10(\text{cm})$.

答: 固定器下降的距离 AA' 约为 10cm .

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 联结 AC , $\tan \angle CAO = 3$, 抛物线的顶点为点 D .



(1) 求 b 的值和点 D 的坐标;

(2) 点 P 是抛物线上一点 (不与点 B 重合), 点 P 关于 x 轴的对称点恰好在直线 BC 上.

①求点 P 的坐标;

②点 M 是抛物线上一点且在对称轴左侧, 连接 BM , 如果 $\angle MBP = \angle ABD$, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $b = 2$; $D(1, 4)$

(2) ① $(-2, -5)$; ② $(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9})$

【解析】

【分析】 此题考查了二次函数的图象和性质, 解直角三角形、一次函数的图象和性质等知识.

(1) 点 C 的坐标为 $(0, 3)$, 得到 $OC = 3$ 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\tan \angle CAO = \frac{CO}{AO} = 3$, 得到 $AO = 1$, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 得到 $0 = -1^2 - b + 3$, 解得 $b = 2$;

(2) ①点 B 的坐标为 $(3, 0)$, 求出直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$, 设点 P 的坐标为 $(t, -t^2 + 2t + 3)$, 则点 P 关于 x 轴的对称点为 $P'(t, t^2 - 2t - 3)$, 得到 $P'(t, t^2 - 2t - 3)$ 在直线 BC 上, 得到 $t^2 - 2t - 3 = -t + 3$, 解方程即可得到答案; ②设 BM 交抛物线的对称轴于点 H , 过点 H 作 $HN \perp BD$ 于点 N , 证明 $\angle ABC = 45^\circ$, 求出直线 BP 的解析式为 $y = x - 3$, 得到 $\angle ABC = \angle ABP = 45^\circ$, 得到 $\tan \angle BDH = \frac{1}{2}$, 证明 $\angle ABP = \angle DBM = 45^\circ$, 在 $\triangle BDH$ 中, $\tan \angle BDH = \frac{1}{2}$, $\angle DBH = 45^\circ$ 设 $NH = x = NB$, 则 $DN = 2x$, 则 $DH = \sqrt{5}x$, 得到 $BD = BN + DN = 3x$, 由 $BD = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$ 得到 $3x = 2\sqrt{5}$, 则 $x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$, 得到 $DH = \sqrt{5}x = \frac{10}{3}$, 则点 H 的坐标是 $(1, \frac{2}{3})$, 求出直线 BH 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 1$, 与抛物线解析式联立得到 $-\frac{1}{3}x + 1 = -x^2 + 2x + 3$ 求出点 M 的横坐标, 即可得到点 M 的坐标.

【小问 1 详解】

解：当 $x=0$ 时， $y=-x^2+bx+3=3$ ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,3)$ ，

$\therefore OC=3$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\tan \angle CAO = \frac{CO}{AO} = 3$ ，

$\therefore AO=1$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-1,0)$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y=-x^2+bx+3$ 与 x 轴交于点 A ，

$\therefore 0=-1^2-b+3$ ，

解得 $b=2$ ，

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ ，

$\therefore D(1,4)$ ；

【小问 2 详解】

①当 $y=0$ 时， $-x^2+2x+3=0$ ，解得 $x=-1$ 或 $x=3$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$ ，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+m$

$$\therefore \begin{cases} 3k+m=0 \\ m=3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=-1 \\ m=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$ ，

设点 P 的坐标为 $(t, -t^2+2t+3)$ ，

则点 P 关于 x 轴的对称点为 $P'(t, t^2-2t-3)$ ，

$\therefore P'(t, t^2-2t-3)$ 在直线 BC 上，

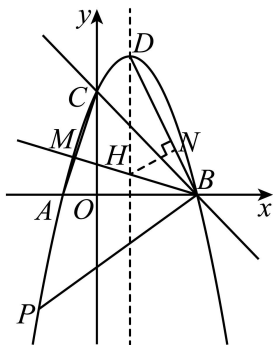
$\therefore t^2-2t-3=-t+3$ ，

解得 $t=-2$ 或 $t=3$ （不合题意，舍去）

$$\therefore -t^2 + 2t + 3 = -4 - 4 + 3 = -5,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-2, -5)$;

② 设 BM 交抛物线的对称轴于点 H , 过点 H 作 $HN \perp BD$ 于点 N ,



$$\because OB = OC = 3, \quad \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ$$

设直线 BP 的解析式为 $y = nx + d$,

$$\text{则} \begin{cases} 3n + d = 0 \\ -2n + d = -5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} n = 1 \\ d = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = x - 3,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABP = 45^\circ,$$

$\because B(3, 0), D(1, 4)$, 且点 D 在抛物线对称轴直线 $x = 1$ 上,

$$\therefore \tan \angle BDH = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle MBP = \angle ABD$$

$$\therefore \angle ABP = \angle DBM = 45^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle BDH \text{ 中, } \tan \angle BDH = \frac{1}{2}, \angle DBH = 45^\circ$$

设 $NH = x = NB$, 则 $DN = 2x$, 则 $DH = \sqrt{HN^2 + DN^2} = \sqrt{5}x$,

$$\therefore BD = BN + DN = 3x,$$

$$\therefore BD = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore 3x = 2\sqrt{5}, \text{ 则 } x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore DH = \sqrt{5}x = \frac{10}{3},$$

则点 H 的坐标是 $\left(1, 4 - \frac{10}{3}\right)$, 即 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$,

设直线 BH 的解析式为 $y = px + e$,

$$\text{则 } \begin{cases} 3p + e = 0 \\ p + e = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = -\frac{1}{3} \\ e = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BH 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 1$,

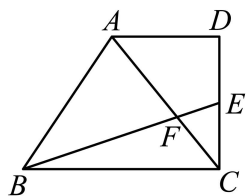
与抛物线解析式联立得到 $-\frac{1}{3}x + 1 = -x^2 + 2x + 3$

解得 $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 3$ (不合题意, 舍去)

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, $y = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{11}{9}$

$\therefore M\left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{9}\right)$

25. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = 2$, E 是 CD 的中点, AC 、 BE 交于点 F , 且 $\angle ACD = 2\angle EBC$.



(1) 求证: $CE = CF$;

(2) 如果 $BC = 2AD$, 求 $\tan \angle ABC$ 的值;

(3) 如果 $\angle ABE = \angle ACB$, 求 $\frac{AD}{BC}$ 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{4}{3}$

$$(3) \frac{\sqrt{41}-5}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 设 $\angle EBC = x$ ，根据题意进行角度计算，得出 $\angle CEF = \angle CFE$ ，即可得证；

(2) 延长 BE 交 AD 延长线于 H ，求出 AD 的长度，即可得出 $\tan \angle ABC$ 的值；

(3) 过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，设 $BC = DH = x$ ， $AF = k$ ，根据相似三角形和勾股定理，得出结果.

【小问 1 详解】

解：证明：设 $\angle EBC = x$ ，则 $\angle ACD = 2x$ ，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 90^\circ - 2x, \quad \angle CEF = 90^\circ - x,$$

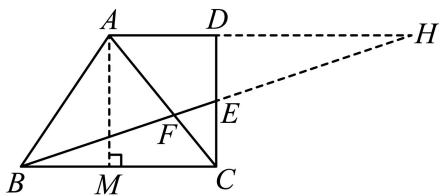
$$\therefore \angle CFE = \angle EBC + \angle ACB = x + 90^\circ - 2x = 90^\circ - x,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CFE,$$

$$\therefore CE = CF;$$

【小问 2 详解】

解：延长 BE 交 AD 延长线于 H ，过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，



$$\therefore E \text{ 是 } CD \text{ 的中点, } AD \parallel BC,$$

$$\therefore DE = CE, \quad \angle H = \angle EBC$$

$$\therefore \angle DEH = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle DEH \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore DH = BC = 2AD,$$

$$\therefore \angle H = \angle EBC, \quad \angle AFH = \angle BFC$$

$$\therefore \triangle AFH \sim \triangle CFB,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CB}{AH} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AC = \frac{5}{2}CF = \frac{5}{2}CE = \frac{5}{4}CD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{3}{2},$$

$$\because BC = 2AD, \quad AD = CM,$$

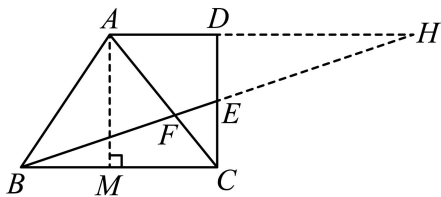
$$\therefore BM = CM,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \tan \angle ACB = \tan \angle CAD = \frac{4}{3};$$

【小问3 详解】

解：过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ,



$$\because \angle ABE = \angle ACB, \quad \angle BAF = \angle CAB$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore AB^2 = AF \cdot AC,$$

$$\text{由 (2) 可设 } BC = DH = x, \quad AF = k, \quad \text{则 } AC = AF + CF = AF + CE = AF + \frac{1}{2}CD = AF + 1 = k + 1$$

$$\therefore AB^2 = AF \cdot AC = k(k+1),$$

$$\because \triangle AFH \sim \triangle CFB,$$

$$\therefore \frac{AH}{BC} = \frac{AF}{CF}$$

$$\therefore AH = kx, \quad AD = CM = AH - DH = (k-1)x, \quad BM = BC - CM = (2-k)x,$$

$$\because AC^2 = AD^2 + CD^2,$$

$$\therefore (k+1)^2 = (k-1)^2 x^2 + 4,$$

$$\therefore x^2 = \frac{k+3}{k-1},$$

$$\because AB^2 = AM^2 + BM^2,$$

$$\therefore k(k+1) = (2-k)^2 x^2 + 4,$$

$$\therefore k^2 + 3k - 8 = 0,$$

$$\text{解得: } k = \frac{\sqrt{41}-3}{2} \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = k - 1 = \frac{\sqrt{41} - 5}{2}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定，直角三角形的性质，等腰三角形的判定，勾股定理等，掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.