

松江区 2024-2025 学年度第一学期期末质量监控试卷

初三数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 没有特殊说明, 几何题均视为在同一个平面内研究问题.
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$, 下列结论正确的是 ()

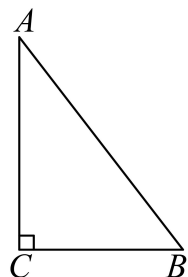
- A. $\tan A = \frac{2}{3}$ B. $\cot A = \frac{2}{3}$ C. $\sin A = \frac{2}{3}$ D. $\cos A = \frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查锐角三角函数定义, 根据锐角三角函数的定义即可求得答案.

【详解】解: 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 2$,



$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{A、} \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 故选项错误;}$$

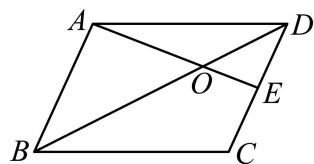
$$\text{B、} \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 故选项错误;}$$

$$\text{C、} \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 故选项错误;}$$

$$\text{A、} \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}, \text{ 故选项正确;}$$

故选：D.

2. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 是边 CD 的中点， AE 交 BD 于点 O ，如果 $\triangle DOE$ 的面积为1，那么 $\triangle ABO$ 的面积为（ ）



A. 2

B. 4

C. 6

D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质、相似三角形的判定与性质. 解决本题的关键是根据相似三角形的面积比等于相似比的平方求出 $\triangle ABO$ 的面积. 首先根据平行四边形的性质可证 $\triangle EDO \sim \triangle ABO$ 且相似比为

$\frac{1}{2}$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方可得 $\frac{S_{\triangle EDO}}{S_{\triangle ABO}} = \frac{1}{4}$ ，从而可求 $\triangle ABO$ 的面积.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ 且 $AB = CD$ ，

$\therefore \triangle EDO \sim \triangle ABO$ ，

$\because$ 点 E 是 CD 的中点，

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EDO}}{S_{\triangle ABO}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\because S_{\triangle EDO} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = 4.$$

故选：B.

3. 已知 $A(-1, y_1)$ 、 $B(3, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 上两点，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是（ ）

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的性质判定函数值的大小，掌握二次函数图象开口，对称轴，增减性是解题的关键.

根据二次函数解析式确定图象开口向上，对称轴直线为 $x = 1$ ，离对称轴直线越远，函数值越大，再确定两点与对称轴的距离，由此即可求解.

【详解】 解：抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ 中， $1 > 0$,

$\therefore$ 二次函数图象开口向上，对称轴直线为 $x = 1$,

$\therefore$ 当 $x \leq 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，当 $x \geq 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

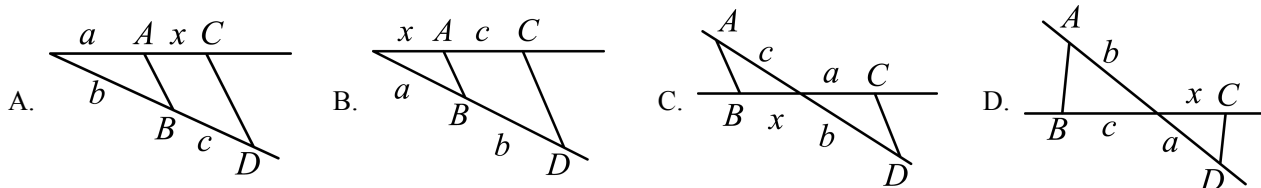
$\therefore$ 离对称轴直线越远，函数值越大，

$\because 3 - 1 = 2, 1 - (-1) = 2$,

$\therefore y_1 = y_2$,

故选：C.

4. 已知线段 a, b, c ，求作线段 x ，使 $x = \frac{ac}{b}$. 下列作图方法中 ($AB \parallel CD$) 不合理的是 ()



【答案】 B

【解析】

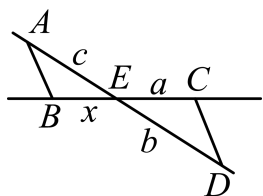
【分析】 本题考查了平行线分线段成比例，掌握比例的性质，线段成比例的计算方法是解题的关键.

根据作 $AB \parallel CD$ ，结合线段成比例的计算方法判定即可.

【详解】 解：A、已知线段 a, b, c ，求作线段 x ，作 $AB \parallel CD$ ，可以运用平行线分线段成比例得到 $x = \frac{ac}{b}$ ，故作图合理，不符合题意；

B、求作线段 x 的值，即运用确定的 a, b, c 的计算，B 选项中需要确定 c 的长度，点 A 也可以在点 C 的右边，故无法保证 $AB \parallel CD$ ，故作图不合理，符合题意；

C、如图， AD, BC 交于点 E ， $AB \parallel CD$ ，

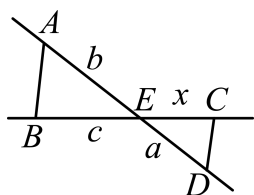


$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}, \text{ 即 } \frac{c}{b} = \frac{x}{a},$$

$$\therefore x = \frac{ac}{b}, \text{ 故作图合理, 不符合题意;}$$

D、如图所示, AD, BC 交于点 E , $AB \parallel CD$,



$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}, \text{ 即 } \frac{b}{a} = \frac{c}{x},$$

$$\therefore x = \frac{ac}{b}, \text{ 故作图合理, 不符合题意;}$$

故选: B.

5. 已知 $\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$, 且 $\vec{c}$ 是非零向量. 那么下列说法中正确的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 不平行

C. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不平行

D. $\vec{b} \parallel \vec{c}$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 不平行

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查平面向量, 解题的关键是掌握平面向量平行的判定方法. 判断出 $\vec{a} = 2.5\vec{c}$, $\vec{b} = -0.5\vec{c}$ 可得结论.

【详解】 $\because \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{c}$

$$\therefore \vec{a} = 2.5\vec{c}, \vec{b} = -0.5\vec{c}$$

$\because \vec{c}$ 是非零向量,

$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$$

故选：A.

6. 已知命题：

①两边及第三边上的中线对应成比例的两个三角形相似；

②两边及第三边上的高对应成比例的两个三角形相似.

下列对这两个命题的判断，正确的是（ ）

A. ①和②都是真命题

B. ①和②都是假命题

C. ①是真命题，②是假命题

D. ①是假命题，②是真命题

【答案】C

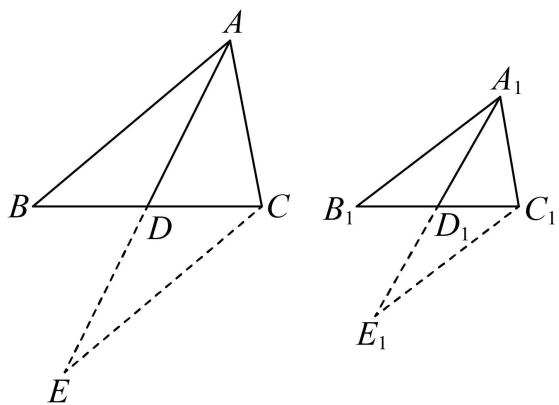
【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定，掌握其判定方法是解题的关键.

如图所示，在 $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ 中， AD, A_1D_1 是 BC, B_1C_1 边上的中线，如图所示，延长 AD 至点 E ，使得 $AD = ED$ ，连接 CE ，可得 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ （ SAS ），同理，延长 A_1D_1 至点 E_1 ，使得 $A_1D_1 = E_1D_1$ ，连接 C_1E_1 ， $\triangle A_1B_1D_1 \cong \triangle E_1C_1D_1$ （ SAS ），可证 $\triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1$ ，由此可证 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ，可判定①；如图所示，在 $\triangle ABC, \triangle ABD$ 中， $AB = AB, AC = AD$ ， AE 是 BC, BD 边上的高，由此可判定②；由此即可求解.

【详解】解：①两边及第三边上的中线对应成比例的两个三角形相似；

如图所示，在 $\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1$ 中， AD, A_1D_1 是 BC, B_1C_1 边上的中线， $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$ ，



如图所示，延长 AD 至点 E ，使得 $AD = ED$ ，连接 CE ，

$\therefore BD = CD, \angle ADB = \angle EDC, AD = ED$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ （ SAS ），

$\therefore AB = EC, \angle B = \angle ECB$

同理, 延长 A_1D_1 至点 E_1 , 使得 $A_1D_1 = E_1D_1$, 连接 C_1E_1 ,

$$\triangle A_1B_1D_1 \cong \triangle E_1C_1D_1 (SAS), \quad A_1B_1 = E_1C_1, \quad \angle B_1 = \angle E_1C_1B_1,$$

$$\therefore \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AE}{A_1E_1},$$

$$\therefore \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AE}{A_1E_1} = \frac{EC}{E_1C_1},$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle A_1C_1E_1, \text{ 即 } \angle B + \angle ACB = \angle B_1 + \angle A_1C_1B_1,$$

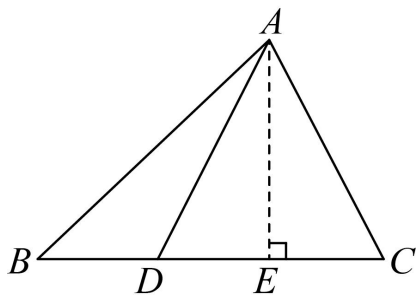
$$\therefore \angle BAC = \angle B_1A_1C_1,$$

$$\text{又} \because \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, \text{ 故①是真命题};$$

②两边及第三边上的高对应成比例的两个三角形相似.

如图所示, 在 $\triangle ABC, \triangle ABD$ 中, $AB = AB, AC = AD$, AE 是 BC, BD 边上的高,



$$\therefore \frac{AB}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AE}, \text{ 但 } \triangle ABC \text{ 与 } \triangle ABD \text{ 不相似, 故②是假命题};$$

综上所述, ①是真命题, ②是假命题,

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知一斜坡的坡度为 1:1, 则该斜坡坡角 $\alpha =$ _____ 度.

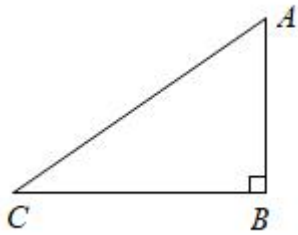
【答案】 45

【解析】

【分析】 根据坡度可以求得该坡角的正切值, 根据正切值即可求得坡角的角度.

【详解】解：如图，坡度为1:1，

$$\therefore \tan \angle ACB = \tan \alpha = 1,$$



$\therefore \alpha$ 为锐角，

$$\therefore \alpha = 45^\circ.$$

故答案为：45.

【点睛】本题考查了坡度的定义，考查了特殊角的三角函数值，考查了三角函数值在直角三角形中的应用.

8. 已知抛物线 $y = a(x-3)^2$ 经过点 $A(2,1)$ ，那么该抛物线的开口方向是_____.

【答案】向上

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象的性质，掌握二次函数图象开口方向的确定方法是解题的关键.

根据题意，把点代入计算，得到解析式，根据二次项系数的正负确定图象开口即可.

【详解】解：抛物线 $y = a(x-3)^2$ 经过点 $A(2,1)$ ，

$$\therefore a(2-3)^2 = 1,$$

解得， $a = 1 > 0$ ，

$\therefore$ 该抛物线的开口方向向上，

故答案为：向上.

9. 将抛物线 $y = x^2 - 1$ 向左平移 2 个单位后，所得到的新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x+2)^2 - 1$

【解析】

【分析】本题考查二次函数图象的平移，根据平移规则左加右减，上加下减，进行求解即可.

【详解】解：由题意，新的抛物线的解析式为： $y = (x+2)^2 - 1$ ；

故答案为： $y = (x+2)^2 - 1$.

10. 已知线段 $AB = 6\text{ cm}$ ， P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么 $AP = \underline{\hspace{1cm}}\text{ cm}$.

【答案】 $3\sqrt{5}-3$

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，黄金分割点的计算，掌握线段成比例的计算方法，黄金分割点的计算是解题的关键.

根据黄金分割点的计算可得 $\frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，代入计算即可求解.

【详解】 解：线段 $AB = 6\text{ cm}$ ， P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，

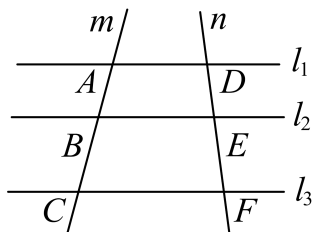
$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 6 = 3\sqrt{5}-3,$$

故答案为： $3\sqrt{5}-3$.

11. 如图, 已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别与直线 m 交于点 A 、 B 、 C ，与直线 n 交于点 D 、 E 、 F ，如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，

$AB = \frac{2}{3}BC$ ， $DF = 10$. 那么 $DE =$ _____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例，掌握平行线截线段成比例的计算方法，找准线段的比是解题的关键.

根据 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $AB = \frac{2}{3}BC$ ，得到 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3}$ ，由 $DF = DE + EF = 10$ ，得 $EF = 10 - DE$ ，代入计算即可求解.

【详解】 解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\therefore AB = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DF = DE + EF = 10,$$

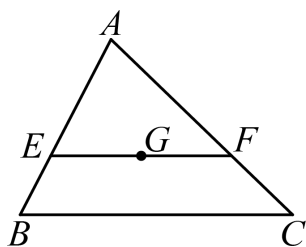
$$\therefore EF = 10 - DE,$$

$$\therefore \frac{DE}{10 - DE} = \frac{2}{3},$$

解得, $DE = 4$,

故答案为: 4.

12. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, EF 经过点 G , 且 $EF \parallel BC$. 那么 $\triangle AEF$ 的周长与 $\triangle ABC$ 的周长之比为_____.

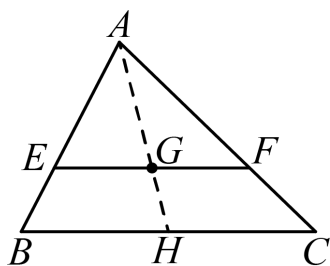


【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 重心的性质, 连接 AG 并延长交 BC 于点 H , 平行线分线段成比例, 得到 $\frac{AE}{BE} = \frac{AG}{HG}$, 证明 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形的性质, 进行求解即可.

【详解】 解: 连接 AG 并延长交 BC 于点 H ,



$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{AG}{HG} = \frac{2}{1},$$

$\therefore EF \parallel BC$,

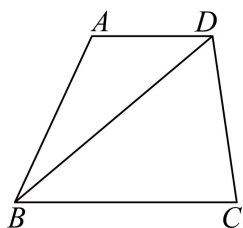
$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AG}{HG} = \frac{2}{1}, \quad \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3};$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长与 } \triangle ABC \text{ 的周长之比为 } \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3};$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

13. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD}$ 可以用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的线性计算. 熟练掌握三角形法则, 是解题的关键. 先根据 $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 得出 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$, 然后利用三角形法则, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

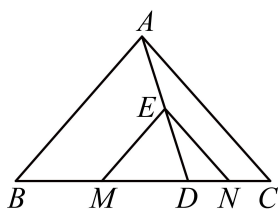
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

故答案为: $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

14. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, E 是 AD 的中点, $EM \parallel AB$, $EN \parallel AC$. 如果 $BC = 6$, 那么 MN 的长度为_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定和性质得到 $\frac{DM}{DB} = \frac{1}{2}, \frac{DN}{DC} = \frac{1}{2}$ 是解题的关键.

根据 $EM \parallel AB$, $EN \parallel AC$ 得到 $\triangle DEM \sim \triangle DAB, \triangle DEN \sim \triangle DAC$, 根据 E 是 AD 的中点, 可得到

$$\frac{DM}{DB} = \frac{1}{2}, \frac{DN}{DC} = \frac{1}{2}, \text{ 由此即可求解.}$$

【详解】解: $\because EM \parallel AB$,

$$\therefore \triangle DEM \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{DM}{DB} = \frac{DE}{DA},$$

$\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore \frac{DE}{DA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DM}{DB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2}DB,$$

同理, $EN \parallel AC$, 得 $\triangle DEN \sim \triangle DAC$, $\frac{DE}{DA} = \frac{DN}{DC} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore DN = \frac{1}{2}DC,$$

$$\therefore MN = DM + DN = \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(DB + DC) = \frac{1}{2}BC = 3,$$

故答案为: 3.

15. 一位运动员推铅球, 铅球运行过程中离地面的高度 y (米) 关于水平距离 x (米) 的函数解析式为

$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + c$, 如果铅球落到地面时运行的水平距离为 10 米, 那么铅球刚出手时离地面的高度是 _____ 米.

【答案】 $\frac{5}{3}$ 或 $1\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的运用, 理解铅球落到地面时运行的水平距离为 10 米的意义, 代入求值是解题的关键.

根据题意把点 $(10, 0)$ 代入计算得二次函数解析式, 再根据二次函数与 y 轴交点的计算方法即可求解.

【详解】解: 铅球落到地面时运行的水平距离为 10 米时, 即 $(10, 0)$, 代入计算得,

$$-\frac{1}{12} \times 10^2 + \frac{2}{3} \times 10 + c = 0,$$

$$\text{解得, } c = \frac{5}{3},$$

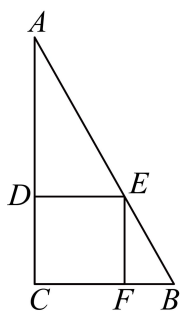
$$\therefore \text{函数解析式为 } y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{铅球刚出手时离地面的高度是 } \frac{5}{3} \text{ 米,}$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{3}.$$

16. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 正方形 $CDEF$ 的顶点 D 、 E 、 F 分别在边 AC 、 AB 、 BC 上, 如果 $AE = 2BE$, 且 $S_{\triangle ABC} = 36$. 那么正方形 $CDEF$ 的面积为_____.



【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理, 三角形的面积, 正方形的性质, 熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键.

设正方形 $CDEF$ 的边长为 x , 得到 $CD = CF = EF = DE = x$ 根据平行线分线段成比例定理得到

$\frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} = 2, \frac{BF}{CF} = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2}$, 求得 $AD = 2CD = 2x$, $BF = \frac{1}{2}x$, $AC = 3x$, $BC = \frac{3}{2}x$, 根据三角形的面积公式列方程得到 $CD = 4$, 于是得到正方形 $CDEF$ 的面积 $= 4 \times 4 = 16$.

【详解】 设正方形 $CDEF$ 的边长为 x ,

$$\therefore CD = CF = EF = DE = x,$$

$$\because DE \parallel BC, EF \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} = 2, \frac{BF}{CF} = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AD = 2CD = 2x, BF = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore AC = 3x, BC = \frac{3}{2}x,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 36,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3}{2}x = 36,$$

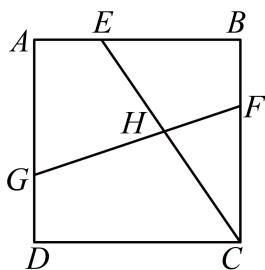
$$\therefore x = 4 \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore CD = 4,$$

正方形 $CDEF$ 的面积 $= 4 \times 4 = 16$.

故答案为: 16.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 AD 上, 且 $AE = BF = DG$, 连接 CE 、 FG , 交于点 H , 如果 $AE : BE = 1 : 2$, 那么 $\frac{GH}{HF}$ 的值为_____.

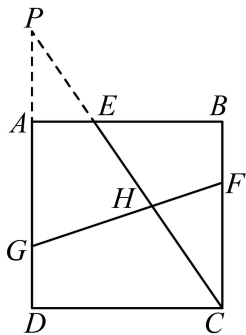


【答案】 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质, 相似三角形的判定与性质, 延长 DA 、 CE 交于点 P , 设 $AE = a$, 则 $AE = BF = DG = a$, $BE = 2AE = 2a$, 由正方形的性质可知 $AD = BC = AB = 3a$, $AD \parallel BC$, 故 $AG = CF = 2a$, $\triangle APE \sim \triangle BCE$, 根据相似三角形的性质求出 $AP = \frac{3}{2}a$, 则 $PG = 2a + \frac{3}{2}a = \frac{7}{2}a$, 最后证明 $\triangle PGH \sim \triangle CFH$, 根据相似三角形的性质 $\frac{GH}{HF} = \frac{PG}{CF}$ 即可求解, 掌握知识点的应用是解题的关键.

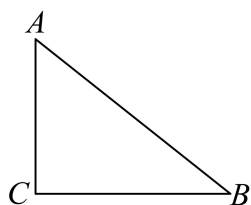
【详解】 解: 如图, 延长 DA 、 CE 交于点 P ,



设 $AE = a$,

$\therefore AE = BF = DG$, $AE : BE = 1 : 2$,
 $\therefore AE = BF = DG = a$, $BE = 2AE = 2a$,
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore AD = BC = AB = 3a$, $AD \parallel BC$,
 $\therefore AG = CF = 2a$, $\triangle APE \sim \triangle BCE$,
 $\therefore \frac{AP}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{AP}{3a} = \frac{1}{2}$,
 $\therefore AP = \frac{3}{2}a$, $\therefore PG = 2a + \frac{3}{2}a = \frac{7}{2}a$,
 $\therefore PG \parallel CF$,
 $\therefore \triangle PGH \sim \triangle CFH$,
 $\therefore \frac{GH}{HF} = \frac{PG}{CF} = \frac{\frac{7}{2}a}{2a} = \frac{7}{4}$,
 故答案为: $\frac{7}{4}$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\tan B = \frac{4}{5}$, E 是边 AB 上一点, 将 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折, 点 B 的对应点为 B' , 如果 $AB' \parallel BC$, 那么 $\frac{AE}{EB}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了锐角三角函数的计算与运用, 折叠的性质, 相似三角形判定和性质, 掌握相似三角形的判定方法及性质是解题的关键.

根据 $\tan B = \frac{4}{5}$, 设 $AC = 4x$, $BC = 5x$, 运用勾股定理可得 $AB = \sqrt{41}x$, 分类讨论: 如图所示, 将 $\triangle BCE$

沿直线 CE 翻折, 点 B 的对应点为 B' , $AB' \parallel BC$, 设 AB, CB' 交于点 F , 运用勾股定理可得 $AB' = 3x$,

由平行可证 $\triangle AB'F \sim \triangle BCF$, 可得解得 $B'F = \frac{15x}{8}$, $AF = \frac{3\sqrt{41}x}{8}$, 再证 $\triangle B'EF \sim \triangle AEB'$, 可得

$\frac{B'E}{AE} = \frac{\frac{15x}{8}}{3x}$ 即可求解; 将 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折, 点 B 的对应点为 B' , $AB' \parallel BC$, 延长 $B'A, CE$ 交于点 G ,

运用勾股定理可得 $AB' = 3x$ ，由折叠与平行的性质可得 $BC = B'C = B'G$ ，则 $AG = 2x$ ，再证

$\triangle AGE \sim \triangle BCE$ ，得到 $\frac{AE}{BE} = \frac{AG}{BC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$ 即可求解.

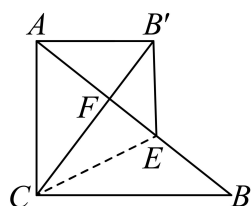
【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\tan B = \frac{4}{5}$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5},$$

设 $AC = 4x, BC = 5x$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(4x)^2 + (5x)^2} = \sqrt{41}x,$$

如图所示，将 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折，点 B 的对应点为 B' ， $AB' \parallel BC$ ，设 AB, CB' 交于点 F ，



$$\therefore BC = B'C = 5x, \angle B'AC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle AB'C \text{ 中, } AB' = \sqrt{(B'C)^2 - AC^2} = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = 3x,$$

$$\therefore AB' \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AB'F \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{AB'}{BC} = \frac{AF}{BF} = \frac{B'F}{CF} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CF + B'F = CB' = 5x,$$

$$\therefore CF = 5x - B'F,$$

$$\therefore \frac{B'F}{5x - B'F} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得, } B'F = \frac{15x}{8},$$

$$\text{同理, } AF + BF = AB = \sqrt{41}x,$$

$$\therefore BF = \sqrt{41}x - AF,$$

$$\therefore \frac{AF}{\sqrt{41}x - AF} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得, } AF = \frac{3\sqrt{41}x}{8},$$

∵ 折叠,

$$\therefore \angle CBE = \angle CB'E, \quad BE = B'E$$

$$\therefore AB' \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle B'AB,$$

$$\therefore \angle EB'F = \angle EAB', \quad \text{且} \angle B'EF = \angle AEB',$$

$$\therefore \triangle B'EF \sim \triangle AEB',$$

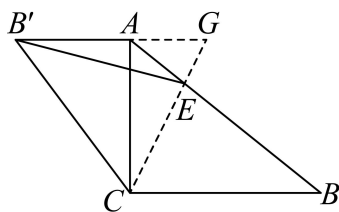
$$\therefore \frac{B'E}{AE} = \frac{B'F}{AB'} = \frac{EF}{EB'}, \quad \text{即} \frac{B'E}{AE} = \frac{15x}{8},$$

$$\text{整理得,} \quad \frac{B'E}{AE} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore B'E = BE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{8}{5};$$

如图所示, 将 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 翻折, 点 B 的对应点为 B' , $AB' \parallel BC$, 延长 $B'A, CE$ 交于点 G ,



$$\therefore B'G \parallel BC,$$

$$\therefore \angle G = \angle BCG, \quad \angle B'AC = \angle ACB = 90^\circ,$$

∵ 折叠,

$$\therefore \angle BCG = \angle B'CG, \quad BC = B'C = 5x,$$

$$\therefore \angle G = \angle B'CG,$$

$$\therefore B'C = B'G = 5x,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ACB' \text{ 中, } AB' = \sqrt{B'C^2 - AC^2} = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = 3x,$$

$$\therefore AG = B'G - AB' = 5x - 3x = 2x,$$

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AG}{BC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5};$$

综上所述, $\frac{AE}{EB}$ 的值为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$,

故答案为: $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{2}{5}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 已知: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} (a \neq b)$

(1) 如果 $a=1$, $b=2$, $c+d=6$, 求 c 、 d 的值;

(2) 求证: $\frac{b-a}{d-c} = \frac{b}{d}$.

【答案】 (1) $d=4$, $c=2$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查比例,

(1) 根据题意得出 $d=2c$, 再结合 $c+d=6$ 即可解决问题;

(2) 在等式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 两边都减去 1, 再进行变形即可解决问题;

解题的关键是掌握比例的基本性质: 比例的内项之积与外项之积相等. 也考查了恒等变形.

【小问 1 详解】

解: $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 且 $a=1$, $b=2$,

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{c}{d},$$

$$\therefore d = 2c,$$

$$\text{又} \because c + d = 6,$$

$$\therefore c = 2, d = 4;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

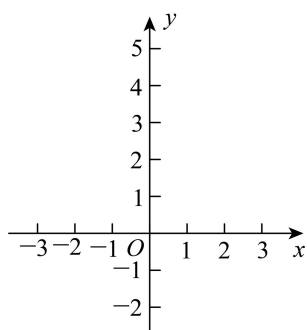
$$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

$$\therefore \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d},$$

$$\therefore \frac{b-a}{d-c} = \frac{b}{d}.$$

20. 已知一条抛物线的顶点为 $A(1,3)$, 且经过点 $B(0,2)$.



- (1) 求该抛物线的表达式;
- (2) 若点 $C(3, t)$ 在该抛物线上, 求 ABC 的面积.

【答案】(1) $y = -(x-1)^2 + 3$

(2) 3

【解析】

【分析】本题考查二次函数与几何的综合应用, 正确的求出函数解析式, 利用数形结合的思想进行求解是解题的关键:

- (1) 设出顶点式, 待定系数法求出函数解析式即可;
- (2) 求出 C 点坐标, 勾股定理逆定理得到 $\angle ABC = 90^\circ$, 再利用面积公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: 设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 + 3$,

$\because$ 抛物线过 $B(0, 2)$

$$\therefore 2 = a(0-1)^2 + 3,$$

得 $a = -1$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = -(x-1)^2 + 3$.

【小问 2 详解】

$\because$ 点 $C(3, t)$,

$$\therefore t = -(3-1)^2 + 3 = -1,$$

$\therefore C(3, -1)$,

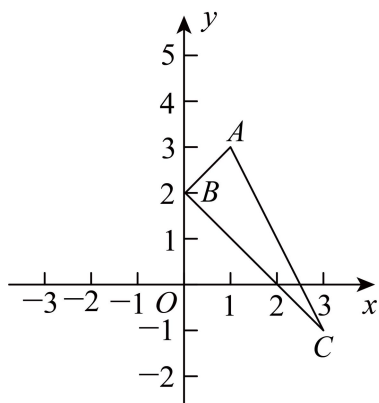
$\therefore A(1, 3), B(0, 2)$,

$$\because AB = \sqrt{1^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{3^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}, \quad AC = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

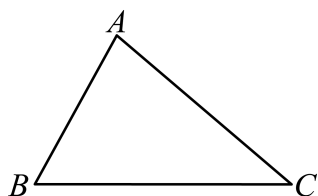
$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3.$$



21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 6$, $S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$.



(1) 求 AB 的长;

(2) 在 BC 边上取一点 D , 使 $CD = 2$, 连接 AD , 求 $\angle CAD$ 的正切值.

【答案】(1) 4

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{5}$$

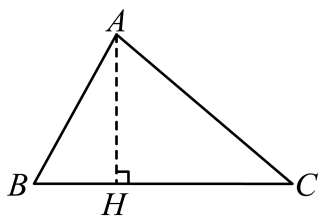
【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H , 由面积法求得 $AH = 2\sqrt{3}$, 进而解直角三角形即可得解;

(2) 过点 C 作 $CE \perp AD$, 垂足为 E , 由 (1) 得 $AB = 4$, 解直角三角形得 $BH = 2$, 证 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 得 $\angle ADB = \angle B = \angle CDE = 60^\circ$, $AD = AB = 4$, $\angle DCE = 30^\circ$, 从而求得 $DE = 1$, $CE = \sqrt{3}$, $AE = AD + DE = 5$, 利用正切定义即可得解.

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H ,



$$\because BC = 6, \quad S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 6 \cdot AH = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore AH = 2\sqrt{3}$$

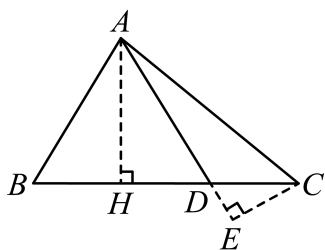
$$\because \angle B = 60^\circ$$

$$\therefore \sin B = \frac{AH}{AB}$$

$$\therefore AB = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4$$

【小问 2 详解】

解：过点 C 作 $CE \perp AD$ ，垂足为 E



由 (1) 得 $AB = 4$,

$$\therefore BH = AB \cos 60^\circ = 2, \quad CD = 2,$$

$$\therefore HD = BC - BH - CD = 6 - 2 - 2 = 2 = BH,$$

$$\therefore BD = 4 = AB,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ADB = \angle B = \angle CDE = 60^\circ, \quad AD = AB = 4$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = 1, \quad CE = \sqrt{3},$$

$$\therefore AE = AD + DE = 5,$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CE}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】本题考查了解直角三角形，勾股定理，30度直角三角形的性质，等边三角形的判定及性质，熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键.

22. 图1是一款高清视频设备. 图2是该设备放置在水平桌面上的示意图, BA 垂直于水平桌面 l , 垂足为点 A , 点 C 处有一个摄像头. 经测量, $AB = 42$ 厘米, $BC = 30$ 厘米, $\angle ABC = 127^\circ$.

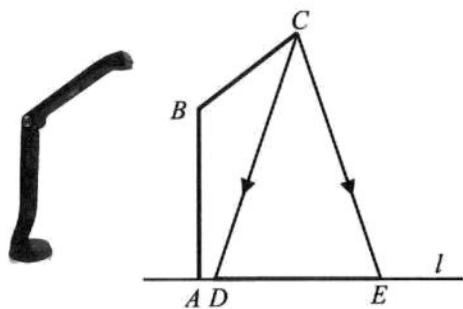


图 1

图 2

- (1) 求摄像头 C 到桌面 l 的距离;
 - (2) 如果摄像头可拍摄的视角 $\angle DCE = 37^\circ$, 且 $CD = CE$, 求桌面上可拍摄区域的宽度 (DE 的长).
- (参考数据: $\sin 37^\circ = 0.6$, $\cos 37^\circ = 0.8$, $\tan 37^\circ = 0.75$.)

【答案】(1) 摄像头 C 到桌面 l 的距离是 60cm

(2) 桌面上可拍摄区域的宽度为 40cm

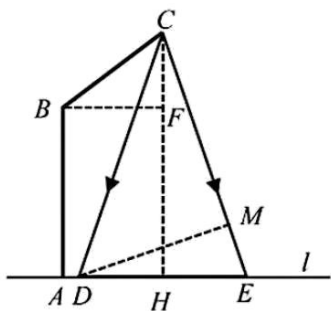
【解析】

【分析】本题主要考查解直角三角形，相似三角形的判定和性质，掌握以上知识，构造直角三角形，正确运用锐角三角函数的计算及相似三角形的判定的方法及性质是解题的关键.

- (1) 过点 C 作 $CH \perp l$, 过点 B 作 $BF \perp CH$, 垂足分别为点 H 、 F , 可得 $\angle CBF = 37^\circ$, 由 $\sin \angle CBF = \frac{CF}{BC}$ 可算出 $CF = 18\text{cm}$, 由 $CH = CF + HF = 60\text{cm}$ 即可求解;
- (2) 过点 D 作 $DM \perp CE$, 垂足为 M , 则有 $\tan \angle DCM = \frac{DM}{CM} = \frac{3}{4}$, 设 $DM = 3k$, $CM = 4k$, 则 $CD = CE = 5k$, $EM = k$, $DE = \sqrt{10}k$, 再证 $\triangle CHE \sim \triangle DME$, 由相似三角形的性质可得 $k = 4\sqrt{10}$, 由 $DE = \sqrt{10}k = \sqrt{10} \times 4\sqrt{10} = 40\text{cm}$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 过点 C 作 $CH \perp l$, 过点 B 作 $BF \perp CH$, 垂足分别为点 H 、 F ,



$$\because \angle ABC = 127^\circ, \quad \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 37^\circ,$$

$$\because \sin \angle CBF = \frac{CF}{BC}, \quad BC = 30\text{cm},$$

$$\therefore CF = BC \sin \angle CBF = 30 \times \sin 37^\circ = 30 \times 0.6 = 18\text{cm},$$

$$\because AB = HF = 42\text{cm},$$

$$\therefore CH = CF + HF = 60\text{cm}.$$

答：摄像头 C 到桌面 l 的距离是 60cm 。

【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DM \perp CE$ ，垂足为 M ，

$$\because \angle DCM = 37^\circ, \quad \tan \angle DCM = \frac{DM}{CM} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } DM = 3k, \quad CM = 4k, \quad \text{则 } CD = CE = 5k, \quad EM = k, \quad DE = \sqrt{10}k,$$

$$\because \angle CHE = \angle DME = 90^\circ, \quad \angle CEH = \angle DEM,$$

$$\therefore \triangle CHE \sim \triangle DME,$$

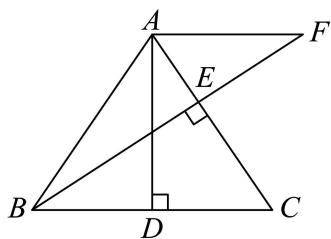
$$\therefore \frac{DM}{DE} = \frac{CH}{CE} \quad \frac{3k}{\sqrt{10}k} = \frac{60}{5k},$$

$$\text{解得：} k = 4\sqrt{10},$$

$$\therefore DE = \sqrt{10}k = \sqrt{10} \times 4\sqrt{10} = 40\text{cm},$$

答：桌面上可拍摄区域的宽度为 40cm 。

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ， $BE \perp AC$ ，垂足分别为点 D ，点 E 。 $AF \parallel BC$ ，交 BE 的延长线于点 F 。



(1) 求证: $\frac{AE}{AF} = \frac{CD}{AC}$;

(2) 求证: $2AB \cdot AD = BF \cdot BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

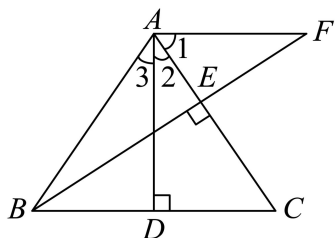
【分析】本题主要考查等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

(1) 根据题意证明 $\triangle AEF \sim \triangle CDA$ ，即可求解；

(2) 设 AD 与 BF 交于点 G ，可证 $\triangle ABF \sim \triangle GBA$ ，得到 $\frac{AB}{BF} = \frac{AG}{AF}$ ，再证 $\triangle AFG \sim \triangle DAB$ ，得到 $\frac{AG}{AF} = \frac{BD}{AD}$ ，则有 $AB \cdot AD = BF \cdot BD$ ，由 $BD = \frac{1}{2}BC$ ，代入计算即可求解.

【小问 1 详解】

证明： 如图所示，



$\because AD \perp BC, BE \perp AC,$

$$\therefore \angle AEF = \angle ADC = 90^\circ,$$

$\because AF \parallel BC,$

$$\therefore \angle 1 = \angle C,$$

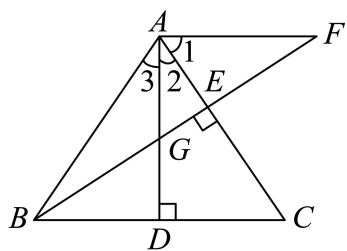
$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDA,$

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{CD}{AC};$$

【小问 2 详解】

证明： 设 AD 与 BF 交于点 G ，



$\because AF \parallel BC$,

$\therefore \angle FAD = \angle ADB = 90^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle F = 90^\circ$,

$\therefore \angle 2 = \angle F$,

$\because AB = AC$, $AD \perp BC$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$, $BC = 2BD$,

$\therefore \angle 3 = \angle F$,

又 $\angle ABF = \angle GBA$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle GBA$,

$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{AG}{AF}$,

$\because \angle 3 = \angle F$, $\angle FAD = \angle ADB$,

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle DAB$,

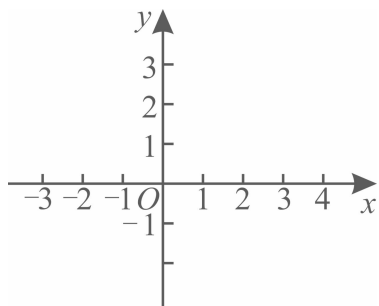
$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{BD}{AD}$,

$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{BD}{AD}$ 即 $AB \cdot AD = BF \cdot BD$,

$\because BD = \frac{1}{2}BC$,

$\therefore 2AB \cdot AD = BF \cdot BC$.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 的图像与 x 轴负半轴交于点 A , 与 y 轴交于点 B , 且 $OA = OB$.



(1) 当 $x = -\frac{1}{a}$ 时, 求该二次函数的函数值;

(2) 定义: 对于一个函数 $y = f(x)$, 满足 $f(x) = x$ 的实数 x 叫做这个函数的不动点. 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 存在唯一的一个不动点, 试求出这个不动点;

(3) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 逆时针旋转, 点 O 落在点 C 处, 点 A 落在点 D 处, 当四边形 $ABCD$ 是梯形时, 点 C 恰好落在该二次函数图像上, 求该二次函数的解析式.

【答案】 (1) 0 (2) 这个不动点是 $x = -1$

$$(3) y = (\sqrt{2} - 2)x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + 2 \text{ 或 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

【解析】

【分析】 (1) 令 $x = 0$, 得 $y = 2$, 得 $B(0, 2)$, 进而得 $A(-2, 0)$, 代入解析式得 $4a - 2b + 2 = 0$ 得 $b = 2a + 1$, 从而得 $y = ax^2 + (2a + 1)x + 2$, 再把 $x = -\frac{1}{a}$ 代入解析式 $y = ax^2 + (2a + 1)x + 2$ 即可得解;

(2) 由 $ax^2 + (2a + 1)x + 2 = x$ 得: $ax^2 + 2ax + 2 = 0$, 根据函数 $y = ax^2 + bx + 2$ 有唯一的不动点得或 $a = 2$. 把 $a = 2$ 代入 $ax^2 + 2ax + 2 = 0$, 得 $2x^2 + 4x + 2 = 0$, 求解即可;

(3) 分 $BC \parallel AD$ 和 $CD \parallel AB$ 利用解直角三角形, 旋转的性质及二次函数的图像及性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 令 $x = 0$, 得 $y = 2$,

$$\therefore B(0, 2)$$

$$\therefore OA = OB = 2.$$

$$\therefore A(-2, 0)$$

代入解析式 $y = ax^2 + bx + 2$ 得 $4a - 2b + 2 = 0$ 得

$$\therefore b = 2a + 1$$

$$\therefore y = ax^2 + (2a + 1)x + 2$$

$$\text{当 } x = -\frac{1}{a} \text{ 时 } y = a\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + (2a + 1)\left(-\frac{1}{a}\right) + 2 = \frac{1}{a} - 2 - \frac{1}{a} + 2 = 0$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{a} \text{ 时, } y = 0.$$

【小问 2 详解】

解：由 $ax^2 + (2a+1)x + 2 = x$ 得： $ax^2 + 2ax + 2 = 0$

∴ 有唯一的不动点

$$\therefore \Delta = (2a)^2 - 4a \times 2 = 0$$

解得： $a = 0$ (舍) 或 $a = 2$.

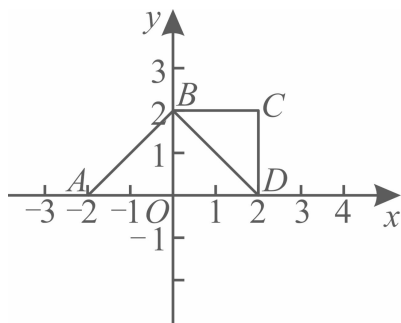
当 $a = 2$ 时， $2x^2 + 4x + 2 = 0$

$$\therefore x = -1,$$

∴ 这个不动点是 $x = -1$.

【小问3详解】

解： ①当 $BC \parallel AD$ 时，如图



由旋转可得 $BC = OB = 2, OA = CD = 2$, $\angle C = \angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore C(2, 2)$$

$$\therefore 4a + 2(2a+1) + 2 = 2,$$

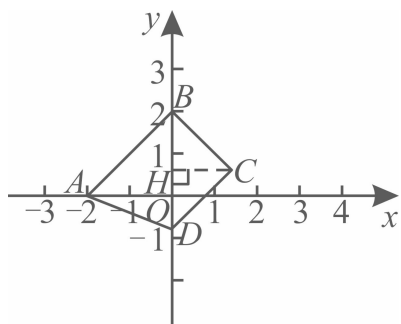
$$\therefore a = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2,$$

②当 $CD \parallel AB$ 时，如图，过 C 作 $CH \perp BD$ 于点 H ,

由旋转得 $BC = BO = OA = CD = 2$, $\angle BCD = \angle AOB = 90^\circ$

$$\therefore \angle ABO = \angle CBO = 45^\circ,$$



$$\therefore BH = \cos 45^\circ \cdot BC = \sqrt{2}, \quad CH = \sin 45^\circ \cdot BC = \sqrt{2},$$

$$\therefore OH = OB - BH = 2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore C(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

$$\therefore 2a + (2a + 1)\sqrt{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

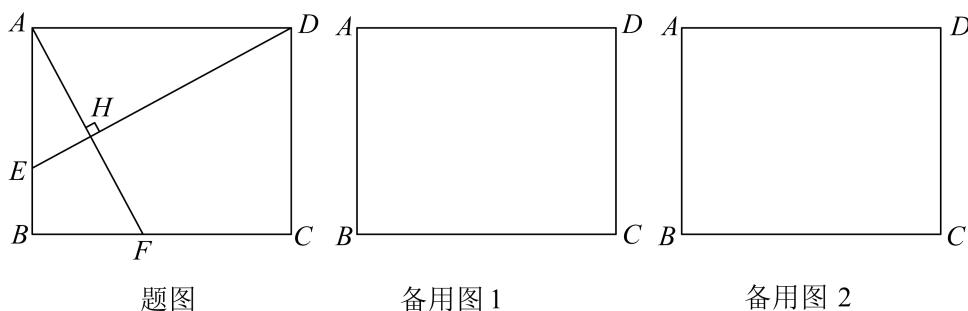
$$\text{解得 } a = \sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore y = (\sqrt{2} - 2)x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + 2.$$

$$\text{故二次函数解析式为 } y = (\sqrt{2} - 2)x^2 + (2\sqrt{2} - 3)x + 2 \text{ 或 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2,$$

【点睛】本题主要考查了二次函数的图形及性质，一元二次方程根的判别式，解直角三角形及旋转的性质，熟练掌握二次函数的图形及性质是解题的关键。

25. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $AD = 10$ ．点 E 、 F 分别在边 AB 、 BC 上， $AF \perp DE$ ，垂足为点 H ．



(1) 求 $AF:DE$ 的值；

(2) 当 $HF = 2EH$ 时，求 AE 的长；

(3) 连接 CH ，如果 $\triangle CDH$ 是等腰三角形，求 $\angle EDC$ 的正切值．

【答案】(1) $\frac{4}{5}$

(2) 5 (3) $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{8}{5}$ 或 2

【解析】

【分析】(1) 先由矩形的性质证明 $\triangle ABF \sim \triangle DAE$ ，即可得 $\frac{AF}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5}$ ；

(2) 延长 DE 、 CB 交于 M ，设 $AE = x$ ，由 $\triangle ABF \sim \triangle DAE$ 得 $\frac{BF}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5}$ ，则 $BF = \frac{4}{5}x$ ，证明 $\triangle AEH \sim \triangle MFH$ 得 $\frac{EH}{HF} = \frac{AE}{MF} = 2$ ，进而得 $MF = 2x$ ， $BM = \frac{6}{5}x$ ，再由 $AD \parallel BM$ 得 $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BM}$ ，进而可得关于 x 的一元二次方程，解方程即可；

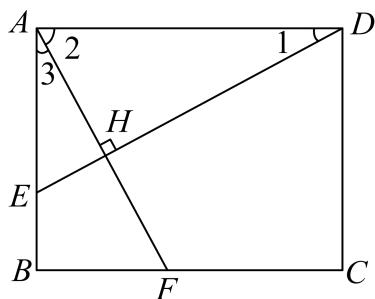
(3) 分三种情况：①当 $CD = DH = 8$ 时；②当 $CD = CH$ 时；③当 $DH = CH$ 时；根据三种情况分别画图求解即可。

【小问 1 详解】

解：在矩形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\because AF \perp DE$ ，

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$



$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

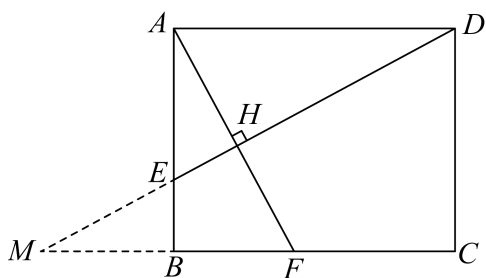
$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DAE,$$

又 $\because AB = 8$ ， $AD = 10$ ，

$$\therefore \frac{AF}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5};$$

【小问 2 详解】

解：延长 DE 、 CB 交于 M ，



设 $AE = x$ ，

$$\because \triangle ABF \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{BF}{AE} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } BF = \frac{4}{5}x,$$

$$\because \angle MEB = \angle AEH, \quad \angle MBE = \angle AHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle MFH,$$

$$\therefore \frac{EH}{HF} = \frac{AE}{MF} = 2,$$

$$\therefore MF = 2x, \quad BM = \frac{6}{5}x,$$

$$\because AD \parallel BM,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BM}, \quad \text{即} \frac{x}{8-x} = \frac{10}{\frac{6x}{5}},$$

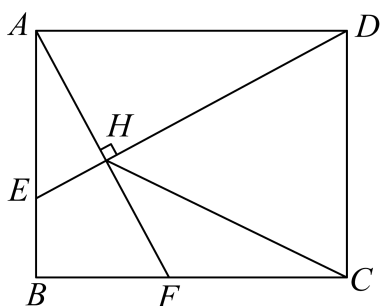
$$\therefore 3x^2 + 25x - 200 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 5, \quad x = -\frac{40}{3} \quad (\text{舍}),$$

$$\therefore AE = 5;$$

【小问3详解】

解：①当 $CD = DH = 8$ 时，如图，



$$\because AD = 10,$$

$$\therefore AH = 6,$$

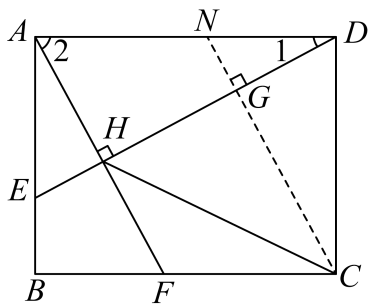
$$\because \angle EDC + \angle 1 = \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle 2,$$

$$\therefore \tan \angle EDC = \tan \angle 2 = \frac{DH}{AH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

②当 $CD = CH$ 时，

过点 C 作 $CN \perp DH$ ，垂足为点 G ，交 AD 于 N （如图），则 $HG = DG$ ，



$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore AF \parallel NC,$$

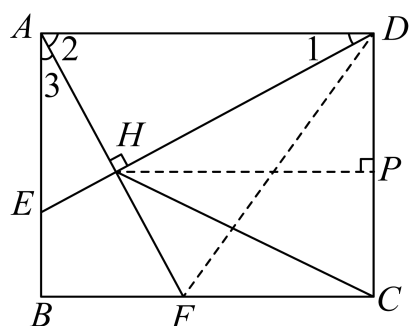
$$\therefore AN = ND = 5 \quad AN = FC = BF = 5,$$

$$\text{则 } AE = \frac{25}{4},$$

$$\therefore \tan \angle EDC = \tan \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{10}{\frac{25}{4}} = \frac{8}{5};$$

③当 $DH = CH$ 时,

过点 H 作 $HP \perp CD$ (如图), 则 $CP = DP$,



$$\because AD \parallel HP \parallel FC,$$

$$\therefore AH = HF,$$

$$DF, \text{ 则 } AD = DF = 10, \quad CD = 8,$$

$$\therefore CF = 6, \quad BF = 4, \quad AE = 5,$$

$$\tan \angle EDC = \tan \angle AED = \frac{AD}{AE} = \frac{10}{5} = 2.$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质，相似三角形的判定和性质，一元二次方程的应用，锐角三角函数与解直角三角形、数形结合与分类讨论数学思想的运用等知识与方法.