

2023-2024 学年度第一学期初三期末质量调研

数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位长度, 则所得抛物线的解析式为 ()

- A. $y = 2(x-3)^2$ B. $y = 2(x+3)^2$ C. $y = 2x^2 + 3$ D. $y = 2x^2 - 3$

【答案】A

【解析】

【分析】原抛物线的顶点坐标 $(0,0)$, 再把点 $(0,0)$ 向右平移 3 个单位长度得点 $(3,0)$, 然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式即可.

【详解】解: 将抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位后, 得到的抛物线的解析式 $y = 2(x-3)^2$.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了抛物线的平移, 掌握抛物线的平移规律是解答本题的关键.

2. 如果把一个锐角三角形三边的长都扩大为原来的两倍, 那么锐角 A 的正切值 ()

- A. 扩大为原来的两倍 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$
C. 不变 D. 不能确定

【答案】C

【解析】

【分析】由于锐角三角形三边的长都扩大为原来的两倍, 所得的三角形与原三角形相似, 得到锐角 A 的大小没改变, 根据正切的定义得到锐角 A 的正切函数值也不变.

【详解】解: 因为锐角三角形三边的长都扩大为原来的两倍, 所得的三角形与原三角形相似, 所以锐角 A 的大小没改变,

所以锐角 A 的正切函数值也不变.

故选：C.

【点睛】本题考查了正切的定义，解题的关键是掌握在直角三角形中，一个锐角的正切等于它的对边与邻边的比值.

3. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么下列等式能成立的是（ ）

A. $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{BP}$

B. $\frac{AB}{BP} = \frac{BP}{AP}$

C. $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查黄金分割点，根据黄金分割点的定义得出线段比例关系，选出正确选项，解题的关键是掌握黄金分割点的性质.

【详解】解：如图，



$\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故选：A.

4. 如果两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反，且 $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$ ，那么下列说法错误的是（ ）

A. $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 是平行向量

B. $\vec{a} - \vec{b}$ 的方向与 $\vec{b}$ 的方向相同

C. 若 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

D. 若 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = -2\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】设 $\vec{a} = m + ni$ ， m, n 都是正数， $\vec{b} = c + di$ ， c, d 都是负数，根据向量运算法则计算判断即可.

【详解】设 $\vec{a} = m + ni$ ， m, n 都是正数， $\vec{b} = c + di$ ， c, d 都是负数，

$$\text{则 } \vec{a} - \vec{b} = (m - c) + (n - d)i, m - c > 0, n - d > 0,$$

故 A 正确，不符合题意；

$\vec{a} - \vec{b}$ 的方向与 $\vec{b}$ 的方向相反，

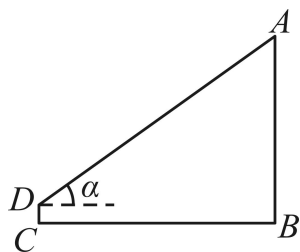
故 B 错误，符合题意；

若 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，则 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 正确，不符合题意；

若 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = -2\vec{b}$ 正确，不符合题意，

故选 B.

5. 如图，为了测量学校教学楼的高度，在操场的 C 处架起测角仪，测角仪的高 $CD = 1.4$ 米，从点 D 测得教学大楼顶端 A 的仰角为 α ，测角仪底部 C 到大楼底部 B 的距离是 25 米，那么教学大楼 AB 的高是 ()



A. $1.4 + 25\sin\alpha$

B. $1.4 + 25\cos\alpha$

C. $1.4 + 25\tan\alpha$

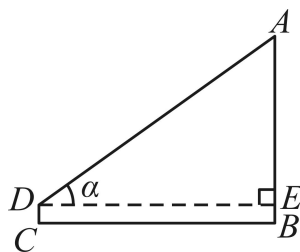
D. $1.4 + 25\cot\alpha$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了仰角问题，过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，则四边形 $CDEB$ 是矩形，根据性质和三角函数即可求解，解题的关键是添加辅助线构造直角三角形，熟练掌握三角函数的应用.

【详解】如图，过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，



则有四边形 $CDEB$ 是矩形，

$\therefore CD = BE = 1.4$ 米， $DE = BC = 25$ 米， $\angle BED = \angle AED = 90^\circ$ ，

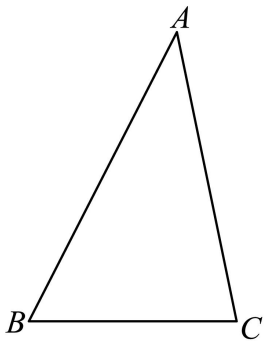
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $\tan\alpha = \frac{AE}{DE}$ ，

$\therefore AE = 25\tan\alpha$ ，

$\therefore AB = BE + AE = 1.4 + 25\tan\alpha$ ，

故选：C.

6. 如图，锐角 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC > BC$ ，现想在边 AB 上找一点 D ，在边 AC 上找一点 E ，使得 $\angle ADE$ 与 $\angle C$ 相等，以下是甲、乙两位同学的作法：（甲）分别过点 B 、 C 作 AC 、 AB 的垂线，垂足分别是 E 、 D ，则 D 、 E 即所求；（乙）取 AC 中点 F ，作 $DF \perp AC$ ，交 AB 于点 D ，取 AB 中点 H ，作 $EH \perp AB$ ，交 AC 于点 E ，则 D 、 E 即所求. 对于甲、乙两位同学的作法，下列判断正确的是 ()



- A. 甲正确乙错误 B. 甲错误乙正确 C. 甲、乙皆正确 D. 甲、乙皆错误

【答案】C

【解析】

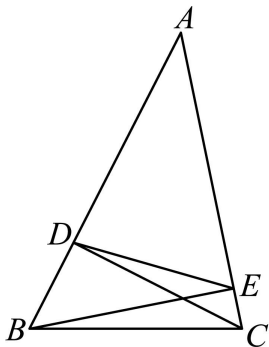
【分析】根据甲乙两人作图的作法即可证出结论.

【详解】甲：如图， $\because CD \perp AB$ ， $BE \perp AC$ ，

$$\therefore \angle BDC = \angle BEC = 90^\circ,$$

$\therefore B, D, E, C$ 四点共圆，

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB,$$



$\therefore$ 甲正确；

乙：如图， $\because$ 取 AC 中点 F ，作 $DF \perp AC$ ，交 AB 于点 D ，取 AB 中点 H ，作 $EH \perp AB$ ，交 AC 于点 E ，

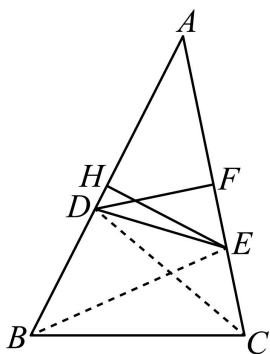
$$\therefore AD = DC, AE = EB,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD, \angle A = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD = \angle ABE,$$

$\therefore B, D, E, C$ 四点共圆，

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB,$$



∴ 乙正确；

故选：C

【点睛】本题考查了线段的垂直平分线的性质，基本作图，四点共圆，圆的内接四边形的性质，等腰三角形的性质，正确的理解题意是解题的关键．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知线段 $a = 3$ 厘米， $c = 12$ 厘米，如果线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项，那么 $b =$ _____ 厘米．

【答案】 6

【解析】

【分析】本题考查了比例线段，根据比例中项的定义得到 $a:b = b:c$ ，然后利用比例性质计算即可，解题的关键是理解四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等， $a:b = c:d$ ，我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段，当 $a:b = b:c$ 时，线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项．

【详解】∵ 线段 b 是线段 a 和 c 的比例中项，

$$\therefore a:b = b:c, \quad \text{即 } b^2 = ac = 3 \times 12,$$

$$\therefore b = 6(\text{cm}),$$

故答案为： 6 ．

8. 计算： $2\left(a + \frac{1}{2}b\right) - 3b =$ _____．

【答案】 $2(a - b)$

【解析】

【分析】本题考查了向量计算，正确掌握运算的法则是解题的关键．

$$\text{【详解】 } 2\left(a + \frac{1}{2}b\right) - 3b$$

$$= 2a + b - 3b = 2a - 2b = 2(a - b).$$

9. 二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像与 y 轴的交点坐标是_____

【答案】 (0, -4)

【解析】

【分析】 将 $x=0$ 代入二次函数解析式中, 求出 y 的值, 即可求出结论.

【详解】 解: 将 $x=0$ 代入 $y = x^2 - 3x - 4$ 中,

解得 $y=-4$

$\therefore$ 二次函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的图像与 y 轴的交点坐标是 (0, -4)

故答案为: (0, -4).

【点睛】 本题考查了求二次函数图象与 y 轴的交点坐标, 掌握 y 轴上点的坐标特征是解题关键.

10. 已知抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 2$

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线的性质; 根据抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上, 得到 $m-2 > 0$, 计算即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = (m-2)x^2 - 3x - 1$ 的开口向上,

$\therefore m-2 > 0$,

解得 $m > 2$,

故答案为: $m > 2$.

11. 如果点 $A(-5, y_1)$ 和点 $B(5, y_2)$ 是抛物线 $y = -x^2 + m$ (m 是常数) 上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“=”或“<”)

【答案】 =

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线的增减性, 根据抛物线开口向下, 得到距离对称轴的距离越大, 函数值越下, 计算判断即可.

【详解】 $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + m$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 且距离对称轴越远的点的函数值越小, 对称轴为直线 $x = 0$,

$$\therefore |-5-0|=5, |5-0|=5,$$

$$\therefore y_1 = y_2,$$

故答案为: =.

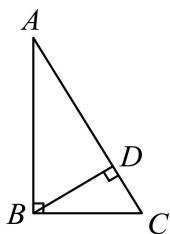
12. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD \perp AC$, 垂足为点 D , 如果 $AB = 5$, $BD = 2$, 那么 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】本题考查了根据余弦及同角的余角相等, 由 $BD \perp AC$, 得到 $\angle ADB = 90^\circ$, 则 $\angle A + \angle ABD = 90^\circ$, 通过同角的余角相等得出 $\angle ABD = \angle C$ 即可求解, 掌握三角函数的定义是解题的关键.

【详解】如图,



$$\therefore BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore AB = 5, BD = 2,$$

$$\therefore \cos C = \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{2}{5},$$

故答案为: $\frac{2}{5}$.

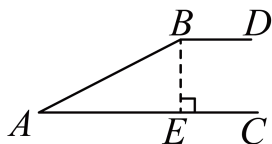
13. 小华沿着坡度 $i = 1:3$ 的斜坡向上行走 $5\sqrt{10}$ 米, 那么他距离地面的垂直高度上升了 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米.

【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了坡度, 根据题意画图, 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E , 由坡度 $i = 1:3$ 得到 $\tan \angle A = \frac{1}{3}$, 再利用勾股定理即可求解, 熟练掌握坡度及勾股定理.

【详解】如图，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，则由题意得 $AB = 5\sqrt{10}$ 米，



$\therefore$ 坡度 $i = 1:3$,

$$\therefore \tan \angle A = \frac{1}{3}, \text{ 即 } \frac{BE}{AE} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 设 $BE = x$ ，则 $AE = 3x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理得： $AE^2 + BE^2 = AB^2$ ，

$$\text{即 } (3x)^2 + x^2 = (5\sqrt{10})^2, \text{ 解得： } x = 5,$$

$\therefore BE = 5$ 米，即他距离地面的垂直高度上升了 5 米，

故答案为：5.

14. 写出一个经过坐标原点，且在对称轴左侧部分是下降的抛物线的表达式，这个抛物线的表达式可以是 _____.

【答案】 $y = 2x^2 + x$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的性质，根据题意写出开口向上，且经过点 $(0,0)$ 抛物线的表达式即可，掌握二次函数的图象的性质是解题的关键.

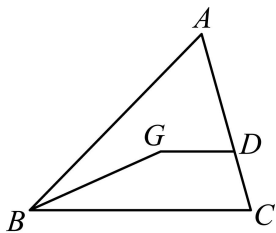
【详解】 依题意得，开口向下，经过点 $(0,0)$ ，

$\therefore$ 抛物线的表达式可以是 $y = 2x^2 + x$ ，

故答案为： $y = 2x^2 + x$. (答案不唯一)

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 是重心，过点 G 作 $GD \parallel BC$ ，交边 AC 于点 D ，连接 BG ，如果 $S_{\triangle ABC} = 36$ ，

那么 $S_{\text{四边形}BGDC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

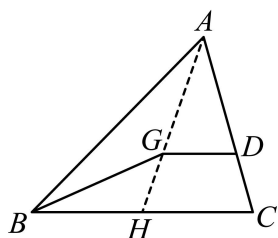


【答案】 16

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形的重心，三角形的面积，相似三角形的判定与性质，连接 AG ，延长 AG 交 BC 于点 H ，利用相似三角形的面积比等于相似比的平方即可求解，解题的关键是熟练掌握基本知识的应用。

【详解】连接 AG ，延长 AG 交 BC 于点 H ，



$\because$ 点 G 是重心，

$$\therefore AG = 2GH, \quad BH = CH,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 36,$$

$$\therefore S_{\triangle ABH} = S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 18,$$

$$\therefore S_{\triangle ABG} = 12, \quad S_{\triangle BGH} = 6,$$

$$\therefore GD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle AHC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AGD}}{S_{\triangle AHC}} = \left(\frac{AG}{AH} \right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle AGD} + S_{\text{四边形}GHCD} = S_{\triangle AHC} = 18,$$

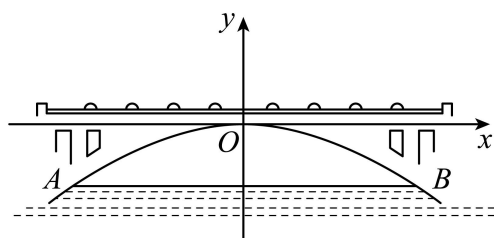
$$\therefore S_{\triangle AGD} = 8, \quad S_{\text{四边形}GHCD} = 10,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BGDC} = S_{\triangle BGH} + S_{\text{四边形}GHCD} = 6 + 10 = 16,$$

故答案为：16.

16. 有一座抛物线型拱桥，在正常水位时，水面 AB 宽 20 米，拱桥的最高点 O 到水面 AB 的距离是 4 米，

如图建立直角坐标平面 xOy ，如果水面上升了 1 米，那么此时水面的宽度是_____米。（结果保留根号）



【答案】 $10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的应用，设该抛物线的解析式是 $y = ax^2$ ，由题意结合图象可知，点 $(10, -4)$ 在函数图象上，求出解析式 $y = -\frac{1}{25}x^2$ ，然后把 $y = -3$ 代入即可求解，准确理解题意，并能够用待定系数法求二次函数解析式是解题的关键.

【详解】 设该抛物线的解析式是 $y = ax^2$ ，

由题意结合图象可知，点 $(10, -4)$ 在函数图象上，

代入得： $100a = -4$ ，解得： $a = -\frac{1}{25}$ ，

$\therefore$ 该抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{25}x^2$ ，

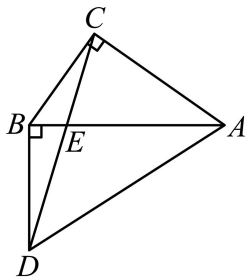
则水面上升了1米，此时 $y = -3$ ，

$\therefore -3 = -\frac{1}{25}x^2$ ，解得： $x = \pm 5\sqrt{3}$ ，

则此时水面的宽度是 $10\sqrt{3}$ 米，

故答案为： $10\sqrt{3}$.

17. 如图，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 相似， $\angle ACB = \angle ABD = 90^\circ$ ， $AC = \sqrt{6}$ ， $BC = \sqrt{3}$ ， $BD < AB$ ，连接 CD ，交边 AB 于点 E ，那么线段 AE 的长是_____.

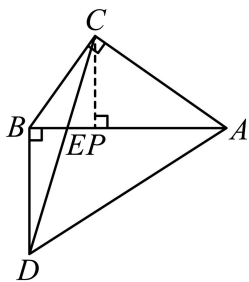


【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 此题考查了相似三角形的性质与判定，三角函数和勾股定理，过 C 作 $CP \perp AB$ 于点 P ，构造相似三角形，再通过性质即可求解，解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用.

【详解】 如图，过 C 作 $CP \perp AB$ 于点 P ，



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得： $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2} = 3$

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 相似， $\angle ACB = \angle ABD = 90^\circ$ ， $BD < AB$ ，

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}},$$

$$\therefore BD = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中， $\cos \angle CAP = \frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\sin \angle CAP = \frac{CP}{AC} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore AP = 2, \quad CP = \sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中，由勾股定理得： $BP = \sqrt{BC^2 - CP^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$ ，

$$\therefore CP \parallel BD,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle PCE,$$

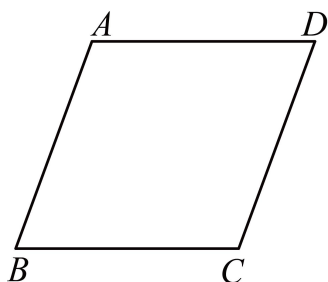
$$\therefore \frac{EP}{BE} = \frac{CP}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EP = \frac{2}{5}BP = \frac{2}{5},$$

$$\therefore AE = EP + AP = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}.$$

18. 如图，已知在菱形 $ABCD$ 中， $\cos B = \frac{1}{3}$ ，将菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转，点 B 、 C 、 D 分别旋转至点 E 、

F 、 G ，如果点 E 恰好落在边 BC 上，设 EF 交边 CD 于点 H ，那么 $\frac{CH}{DH}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 则 $\cos B = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3}$, 设 $BM = x$ 则 $AB = 3x$, 根据旋转的性质, 得 $AB = AE = 3x$, 则 $BM = ME = x$, $EC = x$ 证明三点共线, 再证明 $\triangle ADG \cong \triangle ABE$, 延长 AD, EF 二线交于点 R , 接着 $\triangle EDF \sim \triangle RAE$ 即可.

【详解】过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 菱形 $ABCD$,

$$\text{则 } \cos B = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{3},$$

设 $BM = x$ 则 $AB = 3x$, 连接 GD ,

根据旋转的性质, 菱形 $ABCD$, 得 $AB = BC = CD = DA = AE = EF = FG = GA = 3x$,

$BM = ME = x$, $EC = x$, $\angle BAE = \angle DAG$, $\angle ABE = \angle AEB$,

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAG, \\ AE = AG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle ABE$ (SAS),

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = \angle ADG = \angle AGD$, $DG = BE = 2x$,

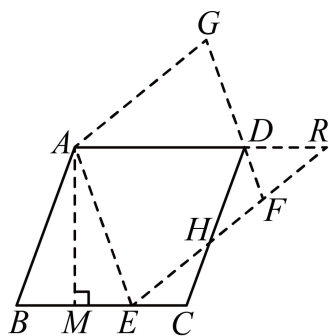
延长 GD 交 EF 于点 F' ,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAE = \angle ABE = \angle AEB = \angle AEF$,

$\therefore \angle GAD + \angle ADG + \angle AGD = 180^\circ$,



$\therefore \angle GAD + \angle EAD + \angle AGD = 180^\circ$,

$\therefore GF' \parallel AE$,

$\therefore GF \parallel AE$

$\therefore F', F$ 重合, G, D, F 三点共线,

延长 AD, EF 二线交于点 R ,

则 $\angle ADG = \angle AGD = \angle EDF = \angle EFD$, $DF = EG - DG = x$

$\therefore DF \parallel AE$

$\therefore \triangle EDF \sim \triangle RAE$,

$$\therefore \frac{DF}{AE} = \frac{DR}{AR} = \frac{1}{3},$$

解得 $DR = \frac{3}{2}x$,

$\therefore AR \parallel EC$

$\therefore \triangle EHC \sim \triangle RHD$,

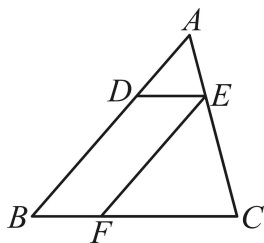
$$\therefore \frac{CH}{DH} = \frac{EC}{DR} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了菱形的性质，三角形全等的判定和性质，三角函数，勾股定理，旋转性质，等腰三角形的三线合一，三角形相似的判断和性质，熟练掌握菱形的性质，三角函数，三角形相似的判定是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在边 AB, AC, BC 上, $DE \parallel BC$, $AB = 15$, $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$.



(1) 求 AD 的长;

(2) 如果 $BF = 4$, $CF = 6$, 求四边形 $BDEF$ 的周长.

【答案】 (1) 6 (2) 26

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理，平行四边形的判定和性质，熟练掌握定理是解题的关键.

(1) 利用平行线分线段成比例定理，列式计算即可.

(2) 先证明 $EF \parallel AB$ ，再利用平行线分线段成比例定理，平行四边形的判定和性质，列式计算即可.

【小问 1 详解】

$\therefore DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}.$$

$$\because AB=15, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore \frac{AD}{15-AD} = \frac{2}{3}.$$

解得 $AD=6$.

【小问2 详解】

$$\because BF=4, \quad CF=6,$$

$$\therefore \frac{BF}{FC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BF}{FC} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{6}{4+6} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore AB=15.$$

解得 $EF=9$.

$$\because DE \parallel BC, \quad EF \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore DE=BF=4, EF=BD=9,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 的周长为 $2(4+9)=26$.

20. 已知二次函数 $y=-x^2+4x-3$.

(1) 用配方法将函数 $y=-x^2+4x-3$ 的解析式化为 $y=a(x+m)^2+k$ 的形式, 并指出该函数图像的对称轴和顶点坐标;

(2) 设该函数的图像与 x 轴交于点 A 、 B , 点 A 在点 B 左侧, 与 y 轴交于点 C , 顶点记作 D , 求四边形 $ADBC$ 的面积.

【答案】(1) $y=-(x-2)^2+1$, 对称轴为直线 $x=2$, 顶点坐标 $(2,1)$;

(2) 4.

【解析】 更多资料添加微信号：DEM2008 淘宝搜索店铺：优尖升教育 网址：shop492842749.taobao.com

【分析】 (1) 利用配方法把二次函数的一般形式改写成顶点式，即可得到函数图象的对称轴和顶点坐标；

(2) 令 $x=0$ 求出与 y 轴交点坐标，令 $y=0$ 求出与 x 轴交点坐标，然后求面积即可；

本题考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握配方法和顶点式的相关性质是解题的关键.

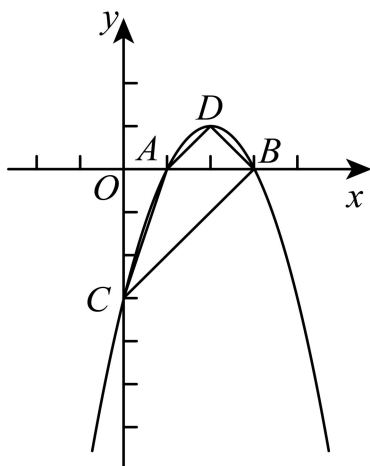
【小问 1 详解】

解：由题意得： $y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=2$ ，顶点坐标 $(2,1)$ ；

【小问 2 详解】

根据题意画图，



令 $x=0$ ，则 $y=-3$ ，

$\therefore$ 点 $C(0,-3)$ ，则 $OC=3$ ，

令 $y=0$ ，则 $-x^2 + 4x - 3 = 0$ ，解得 $x_1=1$ ， $x_2=3$ ，

$\therefore A(1,0)$ ， $B(3,0)$ ，

$\therefore AB=2$ ，

由 (1) 得： $D(2,1)$ ，

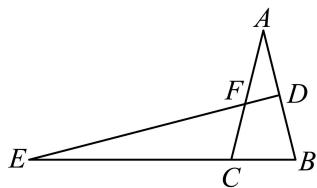
$\therefore S_{\text{四边形}ADBC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD}$ ，

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1,$$

$$= 4.$$

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=4$ ， $\cos B = \frac{1}{4}$ ， AB 的垂直平分线交边 AB 于点 D ，交边 AC 于点 F ，

交 BC 的延长线于点 E .



(1) 求 CE 的长;

(2) 求 $\angle EFC$ 的正弦值.

【答案】(1) 6;

(2) $\frac{7}{8}$.

【解析】

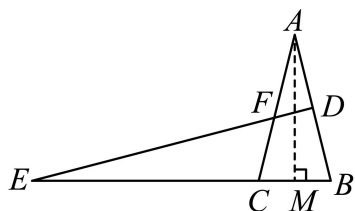
【分析】(1) 过 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 在 $\text{Rt}\triangle AMB$ 中通过 $\cos B = \frac{BM}{AB}$, 求出 $BC = 2$ 即可求解;

(2) 过 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 在 $\text{Rt}\triangle CHB$ 中通过 $\cos B = \frac{BH}{BC}$, 求出 $BH = \frac{1}{2}$ 即可;

此题考查了解直角三角形和等腰三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用.

【小问 1 详解】

如图, 过 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,



更多资料添加微信号: DEM2008 淘宝搜索店铺: 优尖升教育 网址: shop492842749.taobao.com

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore CM = BM,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AMB \text{ 中, } \cos B = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BM = CM = 1,$$

$$\therefore BC = 2,$$

$$\because ED \text{ 垂直平分 } AB, \quad AB = AC = 4,$$

$$\therefore BD = AD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

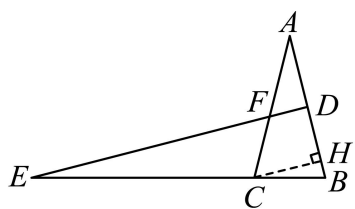
$$\because \cos B = \frac{1}{4} = \frac{BD}{BE},$$

$$\therefore BE = 8,$$

$$\therefore CE = BE - BC = 8 - 2 = 6;$$

【小问2详解】

如图，过 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ，



$$\therefore \angle CHB = 90^\circ,$$

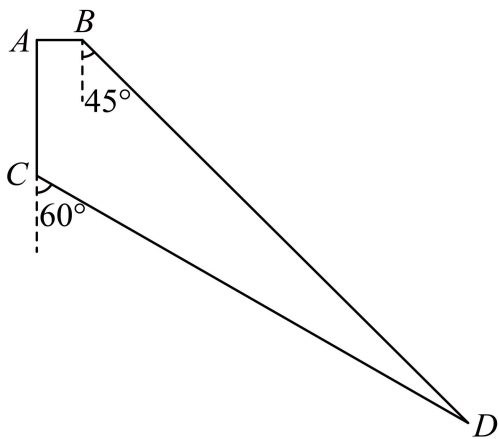
$$\text{在 Rt}\triangle CHB \text{ 中, } \cos B = \frac{BH}{BC} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{BH}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AH = AB - BH = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \sin \angle EFC = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{7}{8}.$$

22. 周末，小李计划从家步行到图书馆看书. 如图，小李家在点 A 处，现有两条路线：第一条是从家向正东方向前进 200 米到路口 B ，再沿 B 的南偏东 45° 方向到图书馆 D ；第二条是从家向正南方向前进 600 米到路口 C ，再沿 C 的南偏东 60° 方向到图书馆 D . 假设小李步行的速度大小保持不变，那么选择哪条路线更快到达图书馆？请通过计算说明. (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.73$, $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{6} \approx 2.45$)

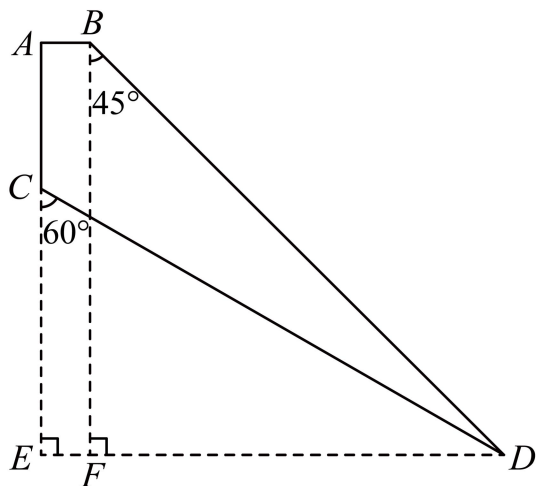


【答案】选择第一条是 $A-B-D$ 路线更快.

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形——方向角的应用，过 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 延长线于点 E ，过 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，构造直角三角形，再利用三角函数即可，熟练掌握相关知识是解题的关键.

【详解】如图，过 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 延长线于点 E ，过 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，



$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是矩形,

$\therefore AE = BF$,

设 $CE = x$, 则 $BF = AE = 600 + x$,

由题意得: $AB = 200$ 米, $AC = 600$ 米, $\angle DBF = 45^\circ$, $\angle DCE = 60^\circ$,

在 $\text{Rt} \triangle DCE$ 中, $CD = \frac{CE}{\cos 60^\circ} = 2x$, $DE = CE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$,

$\therefore DF = DE - EF = \sqrt{3}x - 100$,

在 $\text{Rt} \triangle DBF$ 中, $DF = \frac{BF}{\tan 45^\circ} = BF = 600 + x$, $BD = \frac{BF}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}(600 + x)$,

$\therefore \sqrt{3}x - 100 = 600 + x$, 解得: $x = 400\sqrt{3} + 400$,

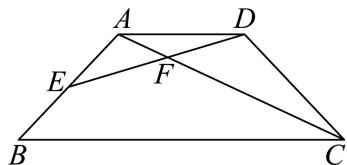
$\therefore$ 第一条是 $A-B-D$ $AB + BD = 200 + \sqrt{2}(600 + 400 + 400\sqrt{3}) \approx 2585$ (米),

第二条是 $A-C-D$: $AC + CD = 600 + 2(400\sqrt{3} + 400) \approx 2784$ (米),

$\therefore 2585 < 2784$,

$\therefore$ 应选择第一条是 $A-B-D$ 路线更快.

23. 已知: 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, 点 E 在边 AB 上, AC 与 DE 交于点 F , $\angle ADE = \angle DCA$.



(1) 求证: $AF \cdot AC = AE \cdot CD$;

(2) 如果点 E 是边 AB 的中点, 求证: $AB^2 = 2DF \cdot DE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了等腰梯形的性质，三角形相似的判定和性质，熟练掌握相似的判定和性质是解题的关键.

(1)先证明 $\triangle ADF \sim \triangle ACD$ ，得到 $AD^2 = AF \cdot AC$ ；再证明 $\triangle ADE \sim \triangle DCA$ ，得到 $AD^2 = AE \cdot CD$ ，等量代换即可.

(2)先 $\triangle ADE \sim \triangle DCA$ ，得到 $AD^2 = AE \cdot CD$ ；再证明 $\triangle ADF \sim \triangle EDA$ ，得到 $AD^2 = DE \cdot DF$ ，等量代换即可.

【小问 1 详解】

$$\because \angle ADE = \angle DCA, \quad \angle CAD = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore AD^2 = AF \cdot AC;$$

$$\because \text{等腰梯形 } ABCD \text{ 中, } AD \parallel BC, \quad AB = CD,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle DAE$$

$$\because \angle ADE = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot CD;$$

$$\therefore AF \cdot AC = AE \cdot CD.$$

【小问 2 详解】

$$\because \text{等腰梯形 } ABCD \text{ 中, } AD \parallel BC, \quad AB = CD,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle DAE$$

$$\because \angle ADE = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot CD, \quad \angle AED = \angle DAF,$$

$$\because \text{点 } E \text{ 是边 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB.$$

$$\therefore AD^2 = \frac{1}{2} AB \cdot AB;$$

$$\therefore AB^2 = 2AD^2;$$

$$\because \angle AED = \angle DAF, \angle EDA = \angle ADF,$$

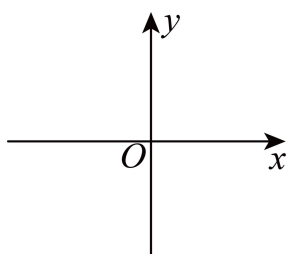
$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{DF}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = DE \cdot DF,$$

$$\therefore AB^2 = 2DF \cdot DE.$$

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 、点 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 抛物线的顶点为 D , 且 $AB = 4$.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 是线段 BC 上一点, 如果 $\angle PAC = 45^\circ$, 求点 P 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 将该抛物线向左平移, 点 D 平移至点 E 处, 过点 E 作 $EF \perp$ 直线 AP , 垂足为点 F , 如果 $\tan \angle PEF = \frac{1}{2}$, 求平移后抛物线的表达式.

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$

$$(2) P\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$(3) y = \left(x + \frac{17}{9}\right)^2 - 4$$

【解析】

【分析】 (1) 设点 A 的横坐标为 x_A , 点 B 的横坐标为 x_B , 根据对称轴, $AB = 4$, 列式

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 1, x_B - x_A = 4, \text{ 利用根与系数关系计算确定 } a \text{ 值即可.}$$

(2) 过点 C 作 $AC \perp MN$ 于点 C , 交 AC 右侧的 AP 的延长线于点 M , 交 AC 左侧的 AP 的延长线于点 N , 利用三角形全等, 确定坐标, 后根据解析式交点确定所求坐标即可.

(3) 设抛物线向左平移了 t 个单位, 则点 $E(1-t, -4)$, 过点 F 作 x 轴的平行线交过点 P 和 y 轴的平行线于点 H , 交过点 E 和 y 轴的平行线于点 G , 证明 $\text{Rt}\triangle FGE \sim \text{Rt}\triangle PHF$, 根据相似三角形的性质得出 $\frac{GE}{HF} = \frac{GF}{HP} = \frac{EF}{FP} = \frac{1}{\tan \angle PEF} = 2$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A 、点 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 抛物线的顶点为 D , 且 $AB = 4$,

$$\therefore \frac{x_A + x_B}{2} = 1, x_B - x_A = 4,$$

$$\text{解得 } x_B = 3, x_A = -1,$$

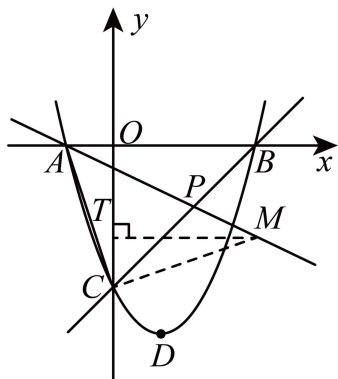
$$\therefore \frac{-3}{a} = 3 \times (-1),$$

$$\text{解得 } a = 1,$$

故抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

【小问 2 详解】

过点 C 作 $AC \perp MN$ 于点 C , 交 AC 右侧的 AP 的延长线于点 M ,



$$\because \angle PAC = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = CM,$$

过点 M 作 $MT \perp y$ 轴于点 T ,

$$\therefore \angle ACO = 90^\circ - \angle ECM = \angle CMT$$

$$\therefore \begin{cases} \angle ACO = \angle CMT \\ \angle AOC = \angle CTM, \\ AC = CM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle CTM (\text{AAS}),$$

$$\therefore AO = CT, OC = EM,$$

$$\because \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x - 3, \quad x_B = 3, x_A = -1,$$

$$\therefore AO = CT = 1, OC = TM = 3, \quad A(-1, 0), C(0, -3), B(3, 0),$$

$$\therefore OE = 2, TM = 3$$

$$\therefore M(3, -2),$$

$$\text{设 } AM \text{ 的解析式为 } y = kx + b, \quad BC \text{ 的解析式为 } y = px + q$$

$$\therefore \begin{cases} -k + b = 0 \\ 3k + b = -2 \end{cases}, \begin{cases} 3p + q = 0 \\ q = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} p = 1 \\ q = -3 \end{cases}$$

$$\therefore AM \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad BC \text{ 的解析式为 } y = x - 3,$$

$$\therefore \begin{cases} y = x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases},$$

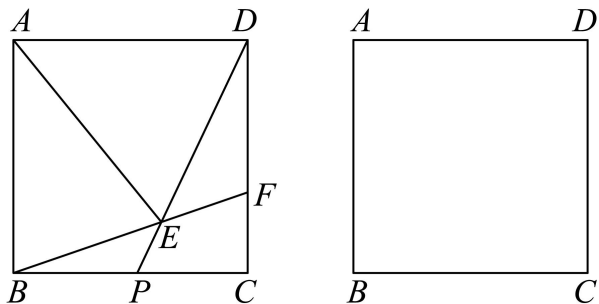
$$\text{故 } P\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right);$$

【小问 3 详解】

$$\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4, \quad \text{点 } D(1, -4),$$

$$\text{设抛物线向左平移了 } t \text{ 个单位, 则点 } E(1 - t, -4),$$

$$\text{过点 } F \text{ 作 } x \text{ 轴的平行线交过点 } P \text{ 和 } y \text{ 轴的平行线于点 } H, \text{ 交过点 } E \text{ 和 } y \text{ 轴的平行线于点 } G,$$



备用图

(1) 求证: $\angle BED = 135^\circ$;

(2) 连接 CE .

①当 $CE \perp BF$ 时, 求 $\frac{BP}{PC}$ 的值;

②如果 $\triangle CEF$ 是以 CE 为腰的等腰三角形, 求 $\angle FBC$ 的正切值.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) ① 2; ② $2 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{2} - 1$.

【解析】

【分析】(1) 设 $\angle BAE = x$, 则 $\angle DAE = 90^\circ - x$, 根据等腰三角形的性质和角度和差即可求解;

(2) ①过 A 作 $AH \perp BF$ 于点 H, 根据正方形的性质证明 $\triangle ABH \cong \triangle BCE$ (AAS), 得出

$CE = BH = \frac{1}{2}BE$, 从而可证明 EP 是 $\angle BEC$ 的平分线, 通过角平分线的性质和等面积法即可求解;

②分当 $CE = CF$ 时和当 $EC = EF$ 时两种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle BAD = 90^\circ$,

又 $\because AE = AB$,

$\therefore AE = AB = AD$,

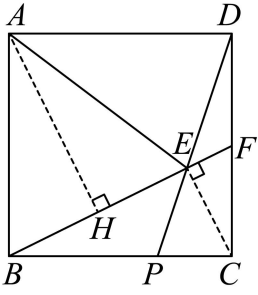
设 $\angle BAE = x$, 则 $\angle DAE = 90^\circ - x$,

$$\therefore \angle BEA = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}x, \quad \angle AED = \frac{180^\circ - (90^\circ - x)}{2} = 45^\circ + \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle BED = \angle BEA + \angle AED = 90^\circ - \frac{1}{2}x + 45^\circ + \frac{1}{2}x = 135^\circ;$$

【小问 2 详解】

①如图, 过 A 作 $AH \perp BF$ 于点 H, 则 $\angle AHB = 90^\circ$,



$$\because AB = AE,$$

$$\therefore BH = EH,$$

$$\because CE \perp BF,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH + \angle ABH = 90^\circ, \quad \angle EBC + \angle BCE = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle BCE,$$

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AHB = \angle BEC \\ \angle ABH = \angle BCE, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABH \cong \triangle BCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CE = BH = \frac{1}{2}BE,$$

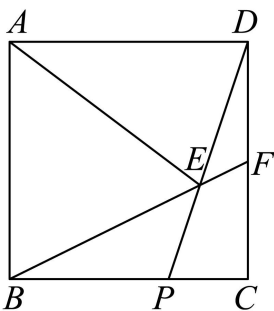
$$\because \angle BED = 135^\circ,$$

$\therefore \angle BEP = \angle CEP = 45^\circ$, 即 EP 是 $\angle BEC$ 的平分线,

$$\therefore \frac{S_{\triangle BEP}}{S_{\triangle CEP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{BE}{CE} = 2,$$

$$\therefore \frac{BP}{PC} = 2,$$

② 当 $CE = CF$ 时, 如图,



$$\therefore \angle CEF = \angle CFE,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle ABE,$$

$$\because AB = AE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB = \angle CEF = \angle CFE,$$

由 (1) 得 $\angle BED = 135^\circ$, 则 $\angle DEF = 45^\circ$,

设 $\angle BAE = x$, 则 $\angle DAE = 90^\circ - x$,

$$\therefore \angle AED = \angle ADE = 45^\circ + \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 45^\circ - x,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF = \angle DEF + \angle EDF = 45^\circ + 45^\circ - x = 90^\circ - x,$$

$$\therefore \angle AED + \angle DEF + \angle CEF = 45^\circ + x + 45^\circ + 90^\circ - x = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 A 、 E 、 C 三点共线,

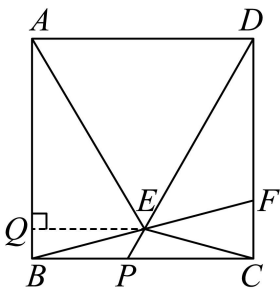
$$\therefore \angle BAE = \angle ECF = 45^\circ,$$

设 $AB = AE = a$, 则 $AC = \sqrt{2}a$, $BC = a$,

$$\therefore CE = AC - AE = (\sqrt{2} - 1)a,$$

$$\therefore \tan \angle FBC = \frac{CF}{BC} = \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{a} = \sqrt{2} - 1,$$

当 $EC = EF$ 时, 如图, 过 E 作 $EQ \perp AB$ 于点 Q ,



$$\therefore \angle AQE = 90^\circ, \angle ECF = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle ECB + \angle ECF = 90^\circ, \angle EFC + \angle CBF = 90^\circ, \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ECB,$$

$$\therefore EB = EC,$$

$$\because \angle ABE = \angle DCE, \quad AB = CD,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = DE = AD,$$

$\therefore \triangle AED$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EAD = 60^\circ,$$

$$\because \angle EAD + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CEF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = 15^\circ,$$

设 $AE = AB = 2m$, 则 $AQ = \sqrt{3}m$, $QE = m$

$$\therefore BQ = AB - AQ = (2 - \sqrt{3})m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEQ \text{ 中, } \tan \angle BEQ = \frac{BQ}{QE} = \frac{(2 - \sqrt{3})m}{m} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BEQ = \angle FBC,$$

更多资料添加微信号: DEM2008 淘宝搜索店铺: 优尖升教育 网址: shop492842749.taobao.com

$$\therefore \tan \angle FBC = 2 - \sqrt{3},$$

综上所述: $\angle FBC$ 的正切值为 $\sqrt{2} - 1$ 或 $2 - \sqrt{3}$.

【点睛】 此题考查了正方形的性质, 全等三角形的性质与判定, 勾股定理的应用, 三角函数和等腰三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用.

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

