

2023 学年度第二学期初三质量调研（一）数学学科

(测试时间：100 分钟，满分：150 分)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题；
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分，下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 下列根式中， $\sqrt{3}$ 的同类二次根式是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{30}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查同类二次根式，解题关键在于先化简. 化简各选项后根据同类二次根式的定义判断.

【详解】解：A. $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

B. $\sqrt{30}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式；

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同，故不是同类二次根式.

故选 C.

2. 已知 $a > b$ ，下列不等式成立的是 ()

- A. $-a > -b$ B. $2 - a < 2 - b$ C. $2a < 2b$ D. $a - b < 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了不等式的基本性质，易错在不等式的基本性质 3，不等式两边同时乘以或除以同一个负数，不等号的方向改变. 不等式性质：基本性质 1. 不等式两边同时加上或减去同一个整式，不等号的方向不变. 基本性质 2. 不等式两边同时乘以或除以同一个正数，不等号的方向不变. 基本性质 3. 不等式两边同时乘以或除以同一个负数，不等号的方向改变. 根据性质逐一分析即可.

【详解】解：A. $\because a > b$,

$\therefore -a < -b$, 故不符合题意;

B. $\because a > b$,

$\therefore -a < -b$,

$\therefore 2-a < 2-b$, 故符合题意;

C. $\because a > b$,

$\therefore 2a > 2b$, 故不符合题意;

D. $\because a > b$,

$\therefore a-b > 0$, 故不符合题意.

故选: B.

3. 当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 一次函数 $y=kx+b$ 的图像不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】先根据 k 判断是经过一三象限还是二四象限, 然后再根据 b 的值判断在 y 轴的哪半轴, 从而得出结论.

【详解】解: $\because k < 0$,

$\therefore$ 函数图像经过第二四象限,

$\because b < 0$,

$\therefore$ 图像与 y 轴负半轴相交,

$\therefore$ 图像经过第二、三、四象限, 不经过第一象限.

故选: A.

【点睛】本题考查了一次函数的图像, 解题的关键是根据一次函数的解析式判断其经过的象限.

4. 已知一组数据 a , 2, 4, 1, 6 的中位数是 4, 那么 a 可以是 ()

A. 0

B. 2

C. 3

D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是中位数的定义, 属于基本题型, 熟知中位数的概念是解题的关键. 根据中位数的定义先确定从小到大排列后 a 的位置, 再解答即可.

【详解】解: 根据题意, a 的位置按照从小到大的排列是: 1, 2, 4, a , 6 或 1, 2, 4, 6, a ;

$\therefore a > 4$.

∴D 符合题意

故选 D.

5. 下列命题中，真命题的是（ ）

A. 四条边相等的四边形是正方形

B. 四个内角相等的四边形是正方形

C. 对角线互相垂直的平行四边形是正方形

D. 对角线互相垂直的矩形是正方形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题。判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理。

根据矩形、菱形、正方形的判定定理判断即可。

【详解】解：A、四条边相等的四边形是菱形，不一定是正方形，故本选项不符合题意；

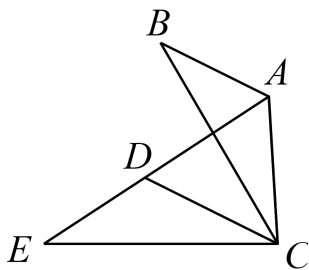
B、四个内角相等的四边形是矩形，不一定是正方形，故本选项不符合题意；

C、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，不一定是正方形，故本选项不符合题意；

D、对角线互相垂直的矩形是正方形，命题正确，符合题意；

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \neq AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转，点 A 、 B 分别落在点 D 、 E 处，如果点 A 、 D 、 E 在同一直线上，那么下列结论错误的是（ ）



A. $\angle ADC = 60^\circ$

B. $\angle ACD = 60^\circ$

C. $\angle BCD = \angle ECD$

D. $\angle BAD = \angle BCE$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了旋转的性质、等边三角形的判定与性质、全等三角形的性质等知识，解题关键是熟练运用旋转的性质。由旋转的性质可得 $\triangle BAC \cong \triangle EDC$ ， $\angle ACD = \angle BCE$ ，再结合已知条件逐一分析判断即可。

【详解】解：A. 由旋转的性质可知， $\angle EDC = \angle BAC = 120^\circ$ ，

∴当点 A 、 D 、 E 在同一条直线上时， $\angle ADC = 180^\circ - \angle EDC = 60^\circ$ ，

故选项 A 不符合题意；

B. 由旋转的性质可知, $\triangle BAC \cong \triangle EDC$,

$$\therefore \angle BCA = \angle ECD, CA = CD,$$

由 $\therefore \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

故选项 B 不符合题意;

C、 $\therefore \angle BCA = \angle ECD, \angle ACD = 60^\circ$,

$\therefore$ 由旋转的性质可得: $\angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$,

当 $\angle BCD = \angle ECD$ 时,

$\therefore \angle ACB = \angle BCD = \angle ECD = 30^\circ$, 与题干条件矛盾,

$\therefore$ 选项 C 符合题意

D. $\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BAC - \angle DAC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCE,$$

故选项 D 不符合题意;

故选: C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分, 请将结果直接填入答题纸的相应位置上)

7. 计算: $6a^3 \div 2a^2 =$ _____.

【答案】 $3a$

【解析】

【分析】 本题考查了单项式的除法, 熟练掌握单项式除以单项式的运算法则是关键.

根据单项式除以单项式的运算法则计算即可.

【详解】 解: $6a^3 \div 2a^2 = 3a$,

故答案为: $3a$.

8. 在实数范围内因式分解 $x^2 - 3 =$ _____

【答案】 $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ 或 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 根据平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

故答案是: $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$.

【点睛】 本题考查了实数范围内分解因式, 掌握 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 是解题的关键.

9. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式和分式有意义的条件列不等式即可.

【详解】 解: 根据题意可得, $x - 1 > 0$,

解得, $x > 1$,

故答案为: $x > 1$.

【点睛】 本题考查了二次根式和分式有意义的条件, 解题关键是熟练运用相关性质列不等式, 确定自变量的取值范围.

10. 若关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq 9$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程根的判别式可进行求解.

【详解】 解: 由题意得: $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4k \geq 0$,

解得: $k \leq 9$;

故答案为 $k \leq 9$.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

11. 布袋中有大小、质地完全相同的 5 个小球, 每个小球上分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 如果从布袋中随机抽一个小球, 那么这个小球上的数字是合数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 此题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$. 求出事件全部结果数及摸出的小球所标数字是合数的全部结果

数，由概率计算公式即可求得答案.

【详解】解： $\because$ 共五个数，合数为4，共1个，

$\therefore$ 从中随机地摸取一个小球，则这个小球所标数字是合数的概率为 $\frac{1}{5}$ ，

故答案为： $\frac{1}{5}$.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象在每一个象限内， y 都随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > 1$

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质进行作答，当反比例函数系数 $k > 0$ 时，它图象所在的每个象限内 y 随 x 的增大而减小.

【详解】解： $\because$ 在每个象限内， y 随着 x 的增大而减小，

$\therefore k-1 > 0$ ，即 $k > 1$ ，

故答案为： $k > 1$.

【点睛】本题主要考查反比例函数 $y = kx$ 的性质，对于反比例函数（ $k \neq 0$ ），（1） $k > 0$ ，反比例函数图象在一、三象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小；（2） $k < 0$ ，反比例函数图象在第二、四象限内，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大.

13. 根据上海市统计局数据，上海市2021年的地区生产总值约是4.32万亿，2023年的地区生产总值约是4.72万亿，设这两年上海市地区生产总值的年平均增长率都为 x ，根据题意可列方程_____.

【答案】 $4.32(1+x)^2 = 4.72$

【解析】

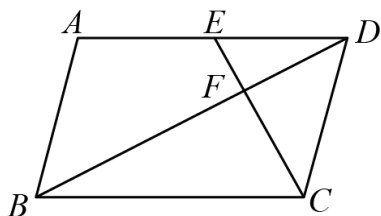
【分析】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

根据上海市2021年及2023年我国国民生产总值，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【详解】解：依题意得： $4.32(1+x)^2 = 4.72$.

故答案为： $4.32(1+x)^2 = 4.72$.

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是边 AD 的中点， CE 与对角线 BD 相交于点 F ，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，向量 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BF} =$ _____。（用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示）



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查平面向量的知识，结合平行四边形性质，相似三角形的性质解题是关键。利用平行四边形的性质可先证明 $BF = \frac{2}{3}BD$ ，然后用三角形法则表示出 $\overrightarrow{BD}$ ，即可得到 $\overrightarrow{BF}$ 。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$ ， $DC = AB$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ， $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ ，

$\because E$ 是边 AD 的中点，

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore BF = \frac{2}{3}BD$ ，

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$ ，

$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

15. 近年来越来越多的“社区食堂”出现在街头巷尾，它们是城市服务不断丰富的缩影。已知某社区食堂推出了 15 元、18 元、20 元三种价格的套餐，每人限购一份。据统计，3 月 16 日该食堂销售套餐共计 160 份，其中 15 元的占总份数的 40%，18 元的卖出 40 份，其余均为 20 元，那么食堂这一天卖出一份套餐的平均价格是_____元。

【答案】 17.5

【解析】

【分析】 本题考查的是加权平均数的含义，用各自的单价乘以各自的权重即可得到答案。

【详解】 解： $\because 40 \div 160 = 25\%$ ，

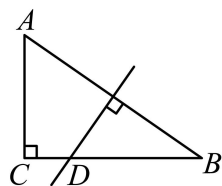
$\therefore 20$ 元的占比 $1 - 40\% - 25\% = 35\%$ ，

$\therefore$ 食堂这一天卖出一份套餐的平均价格是

$15 \times 40\% + 18 \times 25\% + 20 \times 35\% = 17.5$ （元），

故答案为：17.5

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AB 的垂直平分线交边 BC 于点 D ，如果 $BD = 4CD$ ，那么 $\tan B = \underline{\hspace{2cm}}$.

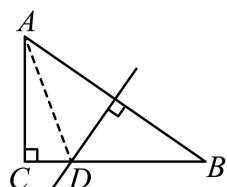


【答案】 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质，勾股定理的应用，求解锐角的正切，如图，连接 AD ，设 $CD = x$ ，可得 $AD = BD = 4x$ ，求解 $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{15}x$ ，再利用正切的定义可得答案.

【详解】 解：如图，连接 AD ，



$\because BD = 4CD$ ，设 $CD = x$ ，

$\therefore BD = 4x$ ，

$\because AB$ 的垂直平分线交边 BC 于点 D ，

$\therefore AD = BD = 4x$ ，

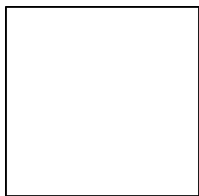
$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{15}x$ ，

$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{15}x}{x + 4x} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ ；

故答案为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

17. 如图，已知一张正方形纸片的边长为 6 厘米，将这个正方形纸片剪去四个角后成为一个正八边形，那么这个正八边形的边长是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 厘米.



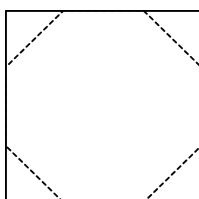
【答案】 $6\sqrt{2}-6$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，读懂题目信息，根据正方形的边长列出方程是解题的关键.

设正八边形的边长为 x ，表示出剪掉的等腰直角三角形的直角边，再根据正方形的边长列出方程求解即可.

【详解】 解：如图



设正八边形的边长为 x ，则剪掉的等腰直角三角形的直角边为 $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

$\because$ 正方形的边长为 6，

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}x + x + \frac{\sqrt{2}}{2}x = 6,$$

$$\text{解得 } x = \frac{6}{\sqrt{2}+1} = 6\sqrt{2}-6,$$

故答案为： $6\sqrt{2}-6$.

18. 已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ，以 AD 为半径的圆 A 和以 CD 为半径的圆 C 相交于点 D 、 E ，如果点 E 到直线 BC 的距离不超过 3，设 AD 的长度为 m ，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$

【解析】

【分析】 如图，当 E 在 AB 的左侧时，连接 AC ， AE ， CE ，过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R ，作 $ES \perp AB$ 于 S ，如图，当 E 在 AB 的右侧时，连接 AC ， AE ， CE ，过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ，交 AD 于 Q ，再分别求解 m 的值，从而可得答案.

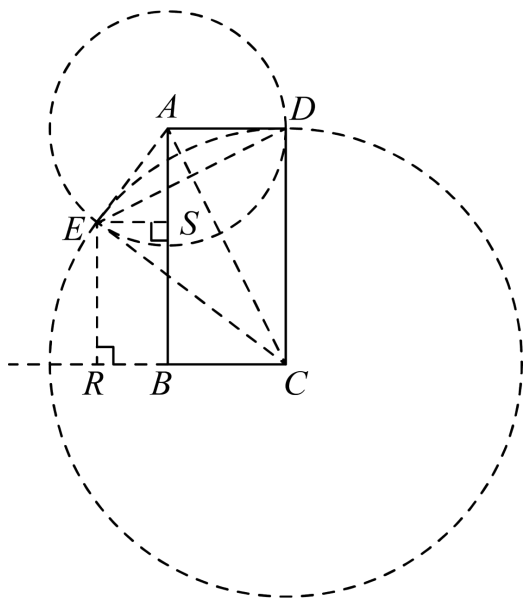
【详解】 解：如图，当 E 在 AB 的左侧时，连接 AC ， AE ， CE ，过 E 作 $ER \perp BC$ 于 R ，作 $ES \perp AB$ 于 S ，

$\because$ 矩形 $ABCD$, $AB = 5$, $AD = m$,

$\therefore$ 四边形 $ERBS$ 为矩形, $AD = CB = m$, $AB = CD = 5$,

$\therefore ES = BR$, $ER = BS = 3$,

$\therefore AS = 5 - 3 = 2$,



$\because A, C$ 为圆心,

$\therefore AC$ 是 DE 的垂直平分线,

$\therefore AD = AE = m$, $CD = CE = 5$,

$\because ER = 3$,

$\therefore CR = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore ES = BR = 4 - m$,

在 $\text{Rt}\triangle AES$ 中, $m^2 = (4 - m)^2 + 2^2$,

解得: $m = \frac{5}{2}$;

如图, 当 E 在 AB 的右侧时, 连接 AC , AE , CE , 过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H , 交 AD 于 Q ,

$\because$ 矩形 $ABCD$, $AB = 5$, $AD = m$,

$\therefore AD = CB = m$, $AB = CD = 5$, 四边形 $CDQH$ 为矩形,

$\therefore QH = CD = 5$,

同理可得:

$AD = AE = m$, $CD = CE = 5$,

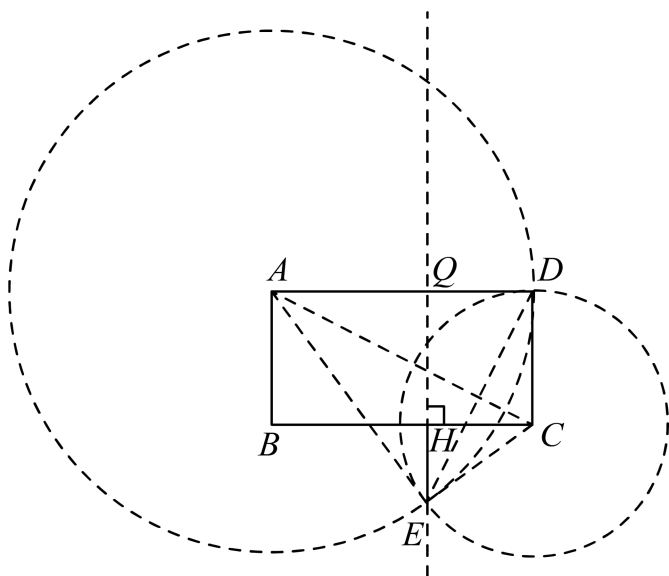
$\therefore EH = 3$,

$$\therefore QD = CH = \sqrt{CE^2 - EH^2} = 4,$$

$$\therefore AQ = m - 4,$$

$$\therefore EQ = 5 + 3 = 8$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEQ \text{ 中, } m^2 = (m - 4)^2 + 8^2,$$



$$\therefore m = 10,$$

综上：点 E 到直线 BC 的距离不超过 3，则 $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$ ；

故答案为： $\frac{5}{2} \leq m \leq 10$

【点睛】 本题考查的是矩形的判定与性质，勾股定理的应用，两圆的位置关系，线段的垂直平分线的性质，确定临界点是解本题的关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $(\sqrt{3} - 1)^{-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^0 - 27^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{3}|$.

【答案】 $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是分数指数幂的运算，二次根式的混合运算，整数指数幂的运算，掌握运算法则是解本题的关键，先计算负整数指数幂，零次幂，分数指数幂，化简绝对值，再合并即可.

【详解】 解： $(\sqrt{3} - 1)^{-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^0 - 27^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{3}|$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} + 1 - \sqrt{27} + \sqrt{3} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

20. 解方程组: $\begin{cases} x+2y=12 \\ x^2-4xy+4y^2-4=0 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二元二次方程的解法，掌握解法步骤是解本题的关键，先把方程组化为

$$\begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y-2=0 \end{cases}, \text{ 再解二元一次方程组即可.}$$

【详解】 解: $\begin{cases} x+2y=12 \text{ ①} \\ x^2-4xy+4y^2-4=0 \text{ ②} \end{cases}$,

由②得: $(x-2y)^2-4=0$,

$$\therefore (x-2y+2)(x-2y-2)=0,$$

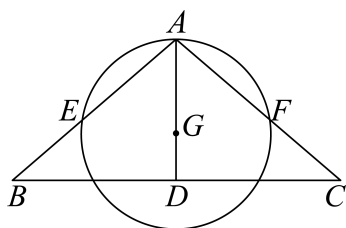
$$\therefore x-2y+2=0 \text{ 或 } x-2y-2=0,$$

$$\therefore \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y-2=0 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x=5 \\ y=\frac{7}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=7 \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$.

21. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=9$ ， $\cos B=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，延长 AG 交边 BC 于

点 D ，以 G 为圆心， GA 为半径的圆分别交边 AB 、 AC 于点 E 、 F 。



(1) 求 AG 的长;

(2) 求 BE 的长.

【答案】(1) 4

(2) $\frac{11}{3}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $BD = CD$, $AD \perp BC$, $AG = \frac{2}{3}AD$, 结合 $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 可得 $CD = BD = 3\sqrt{5}$,

再利用勾股定理可得答案;

(2) 过 G 作 $GH \perp AB$ 于 H , 可得 $EH = AH$, 证明 $\angle B = \angle AGH$, 求解 $GH = \frac{4\sqrt{5}}{3}$, 可得

$AH = \sqrt{AG^2 - GH^2} = \frac{8}{3}$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because AB = AC = 9$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore BD = CD$, $AD \perp BC$, $AG = \frac{2}{3}AD$,

$\because \cos B = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore CD = BD = 3\sqrt{5}$,

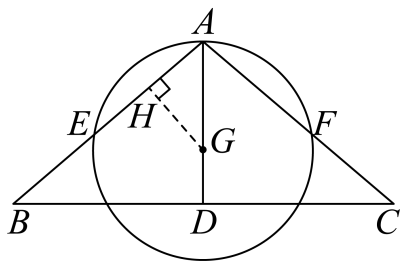
$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 6$,

$\therefore AG = \frac{2}{3}AD = 4$;

【小问 2 详解】

如图, 过 G 作 $GH \perp AB$ 于 H ,

$\therefore EH = AH$,



$$\because \angle ADB = 90^\circ = \angle AHG,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = 90^\circ = \angle BAD + \angle AGH,$$

$$\therefore \angle B = \angle AGH,$$

$$\therefore \cos B = \cos \angle AGH = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{GH}{AG},$$

$$\therefore GH = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

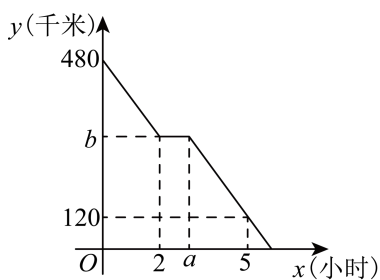
$$\therefore AH = \sqrt{AG^2 - GH^2} = \frac{8}{3},$$

$$\therefore AE = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3},$$

$$\therefore BE = 9 - \frac{16}{3} = \frac{11}{3}.$$

【点睛】 本题考查的是垂径定理的应用，锐角三角函数的应用，勾股定理的应用，重心性质，等腰三角形的性质，作出合适的辅助线是解本题的关键.

22. 寒假期间，小华一家驾车去某地旅游，早上 6:00 点出发，以 80 千米/小时的速度匀速行驶一段时间后，途经一个服务区休息了 1 小时，再次出发时提高了车速. 如图，这是她们离目的地的路程 y (千米) 与所用时间 x (小时) 的函数图像.



根据图像提供的信息回答下列问题:

- (1) 图中的 $a =$ _____, $b =$ _____;
- (2) 求提速后 y 关于 x 的函数解析式 (不用写出定义域);
- (3) 她们能否在中午 12:30 之前到达目的地? 请说明理由.

【答案】 (1) 3; 320;

(2) 提速后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -100x + 620$.

(3) 能. 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据图象求出 a 的值, 根据“离目的地的路程=家与目的地之间的距离-行驶的路程”可计算 b 的数值;

(2) 利用待定系数法求解即可;

(3) 当 $y = 0$ 时求出对应 x 的值, 计算出到达目的地的时间, 从而作出判断即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $a = 2 + 1 = 3$,

$$b = 480 - 80 \times 2 = 320.$$

【小问 2 详解】

设提速后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数, 且 $k \neq 0$).

将坐标 $(3, 320)$ 和 $(5, 120)$ 代入 $y = kx + b$,

$$\text{得} \begin{cases} 3k + b = 320 \\ 5k + b = 120 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -100 \\ b = 620 \end{cases},$$

$\therefore$ 提速后 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -100x + 620$.

【小问 3 详解】

能. 理由如下:

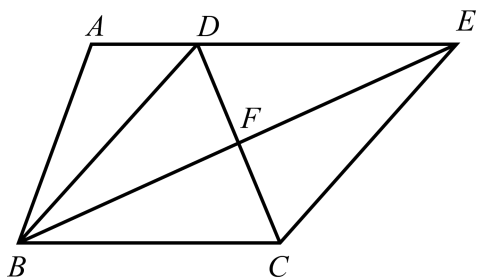
当她们到达目的地时, $y = 0$, 得 $-100x + 620 = 0$,

解得 $x = 6.2$,

6.2 小时=6 时 12 分,

$\therefore$ 她们于 12: 12 分到达目的地.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $BD = BC$, $\angle DBC$ 的平分线交 AD 延长线于点 E , 交 CD 于点 F .



(1) 求证：四边形 $BCED$ 是菱形；

(2) 连接 AC 交 BF 于点 G ，如果 $AC \perp CE$ ，求证： $AB^2 = AG \cdot AC$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $DB = DE$ ，可得 $DE = BC$ ，结合 $DE \parallel BC$ ，可得四边形 $DBCE$ 是平行四边形，从而可得结论，

(2) 如图，连接 AC 交 BF 于点 G ，交 BD 于 K ，证明梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，证明 $\angle ABG = \angle ACB = 45^\circ$ ，结合 $\angle BAG = \angle CAB$ ，可得 $\triangle ABG \sim \triangle ACB$ ，再利用相似三角形的性质可得结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle CBE$ ，

$\because \angle DBC$ 的平分线交 AD 延长线于点 E ，交 CD 于点 F 。

$\therefore \angle DBE = \angle CBE$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle DBE$ ，

$\therefore DB = DE$ ，

$\because BD = BC$ ，

$\therefore DE = BC$ ，而 $DE \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是平行四边形，

$\because DB = DE$ ，

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是菱形；

【小问 2 详解】

如图，连接 AC 交 BF 于点 G ，交 BD 于 K ，

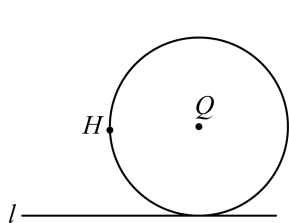


图1

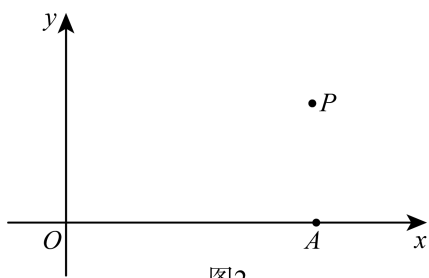


图2

- (1) 如果圆心 M 在线段 OP 上, 那么圆 M 的半径长是_____ (直接写出答案).
- (2) 如图 2, 以 O 为坐标原点、 OA 为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系 xOy , 点 P 在第一象限, 设圆心 M 的坐标是 (x, y) .
- ①求 y 关于 x 的函数解析式;
- ②点 B 是①中所求函数图象上的一点, 连接 BP 并延长交此函数图象于另一点 C . 如果 $CP:BP=1:4$, 求点 B 的坐标.

【答案】 (1) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

(2) ① $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$; ② $(8, 5)$ 或 $(0, 5)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与相似三角形的综合题, 以新定义的形式出现, 理解题意是解决本题的关键.

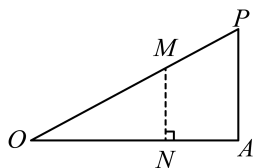
(1) 过点 M 作 $MN \perp OA$, 设圆 M 的半径为 R , 根据点切圆的定义, 先通过勾股定理求 OP , 再利用同角三角函数值相等得: $\sin O = \frac{R}{2\sqrt{5}-R} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 求解即可;

(2) ①过点 M 作 $MN \perp OA, MC \perp AP$, 则 $MC = AN = |4-x|$, $MN = CA = y$, 则 $PC = |2-y|$, 对 $Rt\triangle PCM$ 运用勾股定理即可建立 y 关于 x 的函数关系式;

②设点 $C(x, y)$, 过点 C, B 作 AP 的垂线交于点 D, E , 构造相似三角形, 用 x, y 的代数式表示出 B 点坐标, 再代入抛物线解析式, 联立即可求解.

【小问 1 详解】

解: 过点 M 作 $MN \perp OA$, 设圆 M 的半径为 R ,



$$\because PA \perp OA, OA=4, AP=2$$

$$\therefore OP = \sqrt{OA^2 + AP^2} = 2\sqrt{5},$$

$\because$ 圆 M 是点 P 与直线 OA 的点切圆,

$$\therefore MN = R,$$

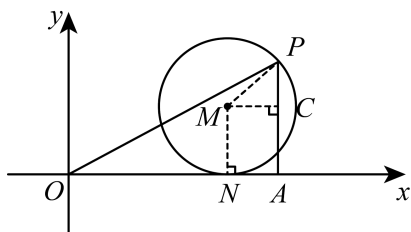
$$\therefore \sin O = \frac{R}{2\sqrt{5}-R} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{解得: } R = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

【小问 2 详解】

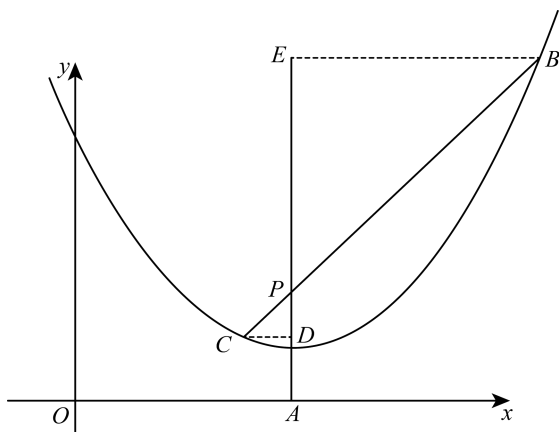
解: ①过点 M 作 $MN \perp OA, MC \perp AP$,



由 (1) 得 $MN = PM = y$, 则 $MC = AN = |4-x|$, $MN = CA = y$, 则 $PC = |2-y|$,

在 $\text{Rt}\triangle PCM$ 中, $PM^2 = PC^2 + CM^2$ 得: $y^2 = |2-y|^2 + |4-x|^2$, 化简得: $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$.

②设点 $C(x, y)$, 过点 C, B 作 AP 的垂线交于点 D, E ,



$$\because BE \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BEP \sim \triangle CDP,$$

$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{EP}{DP} = \frac{BP}{CP} = 4, \text{ 则 } CD = 4 - x, BE = 16 - 4x, DP = 2 - y, PE = 8 - 4y,$$

$$\therefore \text{点 } B(20-4x, 10-4y) \text{ 代入 } y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 \text{ 得: } \begin{cases} 10-4y = \frac{1}{4}(20-4x)^2 - 2(20-4x) + 5 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 \end{cases}$$

解得: $x = 3$ 或 $x = 5$,

$\therefore$ 点 $B(8, 5)$ 或 $B(0, 5)$.

25. 已知以 AB 为直径的半圆 O 上有一点 C , $CD \perp OA$, 垂足为点 D , 点 E 是半径 OC 上一点 (不与点 O 、 C 重合), 作 $EF \perp OC$ 交弧 BC 于点 F , 连接 OF .

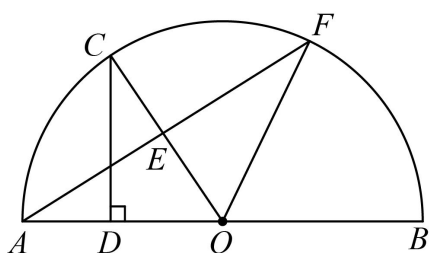


图 1

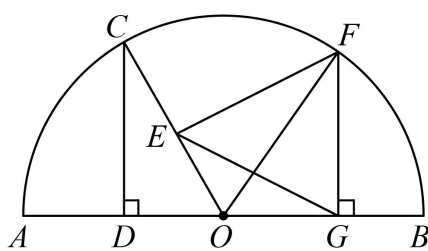


图 2

(1) 如图 1, 当 FE 的延长线经过点 A 时, 求 $\frac{CD}{AF}$ 的值;

(2) 如图 2, 作 $FG \perp AB$, 垂足为点 G , 连接 EG .

① 试判断 EG 与 CD 的大小关系, 并证明你的结论;

② 当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形, 且 $\sin \angle COD = \frac{4}{5}$, 求 $\frac{OE}{OD}$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{CD}{AF} = \frac{1}{2}$;

(2) ① $EG = CD$, 理由见解析; ② $\frac{OE}{OD}$ 的值为 1 或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 或 $\frac{7}{15}$.

【解析】

【分析】 (1) 利用垂径定理, 直角三角形的性质, 全等三角形的判定与性质解答即可;

(2) ① 延长 FE 交 $\odot O$ 于点 M , 延长 FG 交 $\odot O$ 于点 N , 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 H , 连接 MN , OH ,

ON , OM , 利用垂径定理, 三角形的中位线定理得到 $EG = \frac{1}{2}MN$, 利用垂径定理得到 $CD = DH = \frac{1}{2}CH$,

再利用四边形的内角和定理和邻补角的性质得到 $\angle AOC = \angle EFG$, 再利用相等的圆心角所对的弧相等的性质, 等弧对等弦的性质得到 $CH = MN$ 则结论可得;

② 利用分类讨论的方法分三种情况解答: I. 当 $EF = EG$ 时, 利用全等三角形的判定与性质和勾股定理解答即可; II. 当 $FG = EF$ 时, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 利用直角三角形的边角关系定理和勾股定理解答即可; III. 当 $FG = EG$ 时, 则 $FG = 4k$, 连接 FC , 利用矩形的判定与性质和勾股定理解答即可.

【小问 1 详解】

当 FE 的延长线经过点 A 时,

$$\therefore EF \perp OC,$$

$$\therefore AE = FE = \frac{1}{2} AF, \quad \angle A + \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp OA,$$

$$\therefore \angle C + \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COD (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = CD,$$

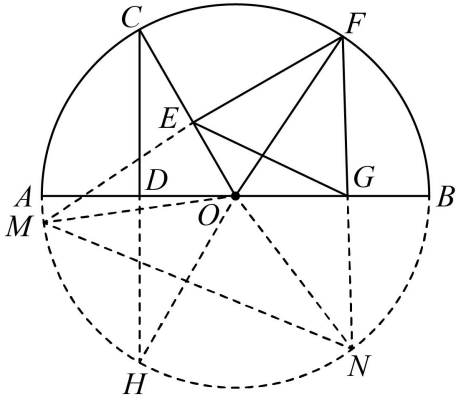
$$\therefore CD = \frac{1}{2} AF,$$

$$\therefore \frac{CD}{AF} = \frac{1}{2};$$

【小问 2 详解】

① EG 与 CD 的大小关系为: $EG = CD$,

理由: 延长 FE 交 $\odot O$ 于点 M , 延长 FG 交 $\odot O$ 于点 N , 延长 CD 交 $\odot O$ 于点 H , 连接 MN , OH , ON , OM , 如图,



$$\because OE \perp FM$$

$$\therefore EF = EM ,$$

$$\because AB \text{ 为直径, } FG \perp AB ,$$

$$\therefore FG = GN ,$$

$$\therefore EG \text{ 为 } \triangle FMN \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore EG = \frac{1}{2} MN ,$$

$$\because AB \text{ 为直径, } CD \perp OA ,$$

$$\therefore CD = DH = \frac{1}{2} CH ,$$

$$\because OC = OH , \quad OA \perp CH ,$$

$$\therefore \angle COH = 2\angle COD ,$$

$$\because \angle FEO = \angle FGO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EFG + \angle EOG = 180^\circ ,$$

$$\because \angle AOC + \angle EOG = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle EFG ,$$

$$\therefore \angle COH = 2\angle EFG ,$$

$$\because \angle MON = 2\angle EFG$$

$$\therefore \angle MON = \angle COH ,$$

$$\therefore \widehat{CH} = \widehat{MN} ,$$

$$\therefore CH = MN ,$$

$$\therefore EG = CD ;$$

$$\textcircled{2} \because \sin \angle COD = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle COD = \frac{CD}{OC},$$

$$\therefore \frac{CD}{OC} = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 设 $CD = 4k$, 则 $OC = 5k$,

$$\therefore OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{(5k)^2 - (4k)^2} = 3k,$$

I. 当 $EF = EG$ 时,

由 (2) ① 知: $EG = CD = 4k$,

$\therefore EF = 4k$, $OF = OC = 5k$,

$\therefore EF \perp OC$,

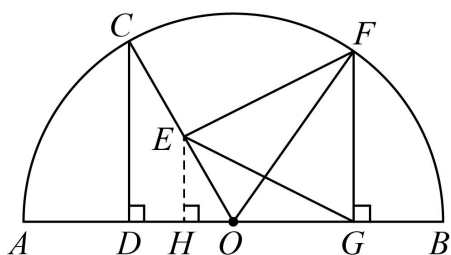
$$\therefore OE = \sqrt{OF^2 - EF^2} = 3k,$$

$\therefore OE = OD$,

$$\therefore \frac{OE}{OD} = 1;$$

II. 当 $FG = EF$ 时,

过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 如图,



在 $\text{Rt}\triangle FEO$ 和 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中,

$$\begin{cases} FO = FO \\ FE = FG \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle FEO \cong \text{Rt}\triangle FGO (\text{HL}),$

$\therefore OE = OG$,

设 $OE = OG = m$,

$$\therefore \sin \angle COD = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{EH}{OE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore EH = \frac{4}{5}m,$$

$$\therefore OH = \frac{3}{5}m,$$

$$\therefore HG = \frac{8}{5}m,$$

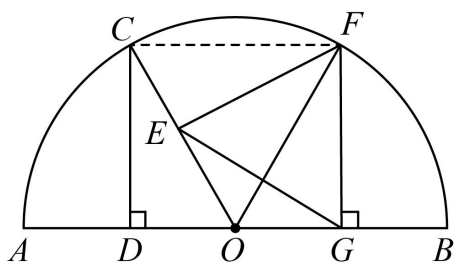
$$\because EH^2 + GH^2 = EG^2,$$

$$\therefore \left(\frac{4}{5}m\right)^2 + \left(\frac{8}{5}m\right)^2 = (4k)^2,$$

$$\therefore m = \sqrt{5}k, \quad OE = \sqrt{5}k,$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

Ⅲ. 当 $FG = EG$ 时, 则 $FG = 4k$, 连接 FC , 如图,



$$\because CD = FG = 4k, \quad CD \perp AB, \quad FG \perp AB,$$

$\therefore$ 四边形 $CDGF$ 为矩形,

$$\therefore CF = DG,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDO$ 和 $\text{Rt}\triangle FGO$ 中,

$$\begin{cases} CD = FG \\ OC = OF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CDO \cong \text{Rt}\triangle FGO (\text{HL}),$$

$$\therefore OD = OG = 3k,$$

$$\therefore FC = DG = 6k,$$

设 $OE = x$, 则 $CE = OC - OE = 5k - x$,

$$\therefore EF^2 = CF^2 - CE^2, \quad EF^2 = OF^2 - OE^2,$$

$$\therefore (6k)^2 - (5k - x)^2 = (5k)^2 - x^2,$$

$$\therefore x = \frac{7}{5}k,$$

$$\therefore OE = \frac{7}{5}k,$$

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{\frac{7}{5}k}{3k} = \frac{7}{15}$$

综上，当 $\triangle EFG$ 是等腰三角形，且 $\sin \angle COD = \frac{4}{5}$ ， $\frac{OE}{OD}$ 的值为 1 或 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 或 $\frac{7}{15}$ 。

【点睛】 本题主要考查了圆的有关性质，圆周角定理，垂径定理，直角三角形的性质，直角三角形的边角关系定理，勾股定理，全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，矩形的判定与性质，三角形的中位线定理，添加适当的辅助线和利用分类讨论的思想方法解答是解题的关键。