

2024 学年度第一学期期末九年级自适应练习

数学学科

考生注意:

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列函数中, y 关于 x 的二次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x^2}$

B. $y = 2x$

C. $y = (x+2)^2$

D. $y = ax^2 + bx + c$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数的定义, 掌握二次函数的定义是解题的关键.

形如: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 则 y 是 x 的二次函数, 根据定义逐一判断各选项即可得到答案.

【详解】 解: $y = \frac{1}{x^2}$, y 不是 x 的二次函数, 故 A 错误;

$y = 2x$, y 不是 x 的二次函数, 故 B 错误;

$y = (x+2)^2$, 即 $y = x^2 + 4x + 4$, y 是 x 的二次函数, 故 C 正确;

$y = ax^2 + bx + c$, 当 $a = 0$ 时, y 不是 x 的二次函数, 故 D 错误;

故选: C.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 如果 $\sin B = \frac{3}{5}$, 那么 $\cos A$ 的值是 ()

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查互余两角三角函数的关系，根据互余两角三角函数的关系进行解答即可.

【详解】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore \cos A = \sin B = \frac{3}{5},$$

故选： B.

3. 下列二次函数的图像中，以直线 $x=1$ 为对称轴的是（ ）

- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = (x+1)^2$ D. $y = (x-1)^2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次函数顶点式的图像与性质，二次函数的顶点式解析式为 $y = a(x-k)^2 + h (a \neq 0)$ ，它的对称轴为 $x = k$. 本题根据二次函数的顶点式解析式分别求出各项的对称轴即可.

【详解】 解： A 、二次函数 $y = x^2 + 1$ 的对称轴是 y 轴，故 A 选项不符合题意；

B、二次函数 $y = x^2 - 1$ 的对称轴是 y 轴，故 B 选项不符合题意；

C、二次函数 $y = (x+1)^2$ 的对称轴是 $x = -1$ 轴，故 C 选项不符合题意；

D、二次函数 $y = (x-1)^2$ 的对称轴是 $x = 1$ 轴，故 D 选项符合题意

故选： D.

4. 设非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，如果 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ ，那么下列说法中错误的是（ ）

- A. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同 B. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ C. $\vec{a} = -3\vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型. 根据非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，有 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ ，即可推出 $\vec{a} = -3\vec{b}$ ，从而得出 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ ， $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，由此即可判断.

【详解】 解： $\because$ 非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，有 $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ ，

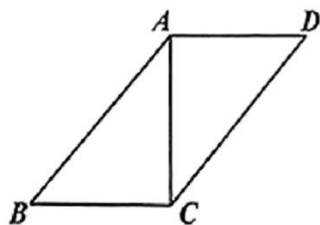
$$\therefore \vec{a} = -3\vec{b},$$

$$\therefore |\vec{a}| = 3|\vec{b}|, \vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 方向相反},$$

故 B、C、D 正确，不符合同意，A 错误，符合题意.

故选：A.

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AC 为对角线， $AB = DC$ ，如果要证得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 全等，那么可以添加的条件是 ()



A. $AD \parallel BC$

B. $\angle B = \angle D$

C. $\angle B = \angle ACD$

D. $\angle ACB = \angle CAD = 90^\circ$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定，根据全等三角形的判定方法逐一判断即可求解，掌握全等三角形的判定方法是解题的关键.

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中， $AB = CD$ ， $AC = CA$ ，

A、当添加条件 $AD \parallel BC$ ，得到 $\angle ACB = \angle CAD$ ，对应相等的条件为 ASS，不能证得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 全等，该选项不合题意；

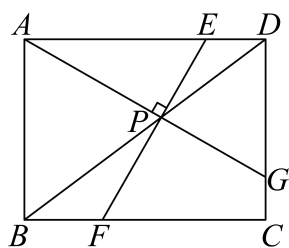
B、当添加条件 $\angle B = \angle D$ ，对应相等的条件为 ASS，不能证得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 全等，该选项不合题意；

C、当添加条件 $\angle B = \angle ACD$ ，对应相等的条件为 ASS，不能证得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 全等，该选项不合题意；

D、当添加条件 $\angle ACB = \angle CAD = 90^\circ$ ，对应相等的条件为 HL，能证得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 全等，该选项符合题意；

故选：D.

6. 如图，矩形 $ABCD$ 中，点 P 在对角线 BD 上，延长 AP 交 DC 于点 G ，过点 P 作 $EF \perp AG$ ，分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F ， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ．如果 $\angle AEP = \angle APB$ ，那么 AP 的长是 ()



A. 2

B. 3

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【解析】

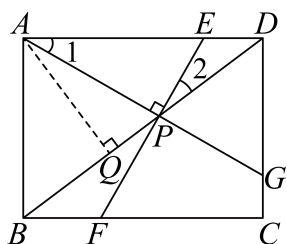
【分析】如图，过点A作 $AQ \perp BD$ 于点Q，根据矩形的性质得 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$ ，由

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AQ = \frac{1}{2}AB \cdot AD \text{ 得 } AQ = \frac{12}{5}, \text{ 由勾股定理得 } QD = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \frac{16}{5}, \text{ 证明}$$

 $\triangle AQP \sim \triangle APE \text{ 得 } \frac{QP}{PE} = \frac{AQ}{AP}, \text{ 即 } \frac{QP}{AQ} = \frac{PE}{AP}, \text{ 证明 } \triangle PDE \sim \triangle ADP \text{ 得 } \therefore \frac{PE}{AP} = \frac{PD}{AD} \text{ 继而得到}$

$$\frac{QP}{AQ} = \frac{PD}{AD}, \text{ 设 } QP = x, \text{ 则 } PD = \frac{16}{5} - x, \text{ 得 } \frac{x}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{16}{5} - x}{4}, \text{ 解得: } x = \frac{6}{5}, \text{ 再根据 } AP = \sqrt{AQ^2 + QP^2}$$

可得结论.

【详解】如图，过点A作 $AQ \perp BD$ 于点Q，
 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 4$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AQ = \frac{1}{2}AB \cdot AD,$$

$$\therefore BD \cdot AQ = AB \cdot AD, \text{ 即 } 5AQ = 3 \times 4,$$

$$\therefore AQ = \frac{12}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AQD \text{ 中, } QD = \sqrt{AD^2 - AQ^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5},$$

$$\because AQ \perp BD, EF \perp AG,$$

$$\therefore \angle AQP = \angle APE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AEP = \angle APB,$$

$$\therefore \triangle AQP \sim \triangle APE,$$

$$\therefore \frac{QP}{PE} = \frac{AQ}{AP}, \text{ 即 } \frac{QP}{AQ} = \frac{PE}{AP},$$

$$\because \angle 1 + \angle AEP = 90^\circ, \angle 2 + \angle DPG = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AEP = \angle APB = \angle DPG,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\text{又} \because \angle PDE = \angle ADP,$$

$$\therefore \triangle PDE \sim \triangle ADP,$$

$$\therefore \frac{PE}{AP} = \frac{PD}{AD},$$

$$\therefore \frac{QP}{AQ} = \frac{PD}{AD},$$

$$\text{设 } QP = x, \text{ 则 } PD = \frac{16}{5} - x,$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{16}{5} - x}{4},$$

$$\text{解得: } x = \frac{6}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AQP \text{ 中, } AP = \sqrt{AQ^2 + QP^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AP \text{ 的长是 } \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

故选: C.

【点睛】 本题考查矩形的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质, 直角三角形两锐角互余, 等积变换等知识点. 掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 已知 $\frac{x+y}{y} = \frac{5}{3}$, 那么 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查比例的性质，由 $\frac{x+y}{y} = \frac{5}{3}$ 得出 $3x = 2y$ ，即可得出结论.

【详解】 解： $\because \frac{x+y}{y} = \frac{5}{3}$,

$$\therefore 3(x+y) = 5y,$$

整理得， $3x = 2y$,

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

8. 已知正比例函数 $y = (k-1)x$ 的图像经过第二、四象限，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的性质，熟知正比例函数的性质是解题的关键.

根据“ $y = kx (k \neq 0)$ ”，当 $k < 0$ 时，该函数的图象经过第二、四象限；当 $k > 0$ 时，该函数的图象经过第一、三象限”解题即可.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 $y = (k-1)x$ 的图像经过第二、四象限，

$$\therefore k-1 < 0,$$

$$\therefore k < 1.$$

故答案为： $k < 1$.

9. 已知二次函数 $y = (x-2)^2 + m$ 的图像经过原点，那么 $m =$ _____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了用待定系数法求二次函数的解析式、解一元一次方程. 因为二次函数 $y = (x-2)^2 + m$ 的图像经过原点，把 $(0,0)$ 代入二次函数的解析式 $y = (x-2)^2 + m$ ，可得关于 m 的一元一次方程，解一元一次方程求出 m 的值即可.

【详解】 解： $\because$ 二次函数 $y = (x-2)^2 + m$ 的图像经过原点，

$$\therefore 0 = (0-2)^2 + m,$$

解得: $m = -4$,

故答案为: -4 .

10. 已知抛物线 $y = x^2 - c$ 经过点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(4, y_2)$, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“<”、或 “=”)

【答案】<

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象性质, 熟练掌握二次函数的图象性质是解题的关键.

找出二次函数的开口方向 and 对称轴, 即可根据位置信息求解.

【详解】解: $\because y = x^2 - c$

$\therefore a = 1$ 开口向上, y 有最小值, 且对称轴为 y 轴,

$\therefore$ 越靠近 y 轴, 值越小,

$$\because |-1| < |4|$$

$$\therefore y_1 < y_2$$

故答案为: <.

11. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2x$ 的开口向上, 那么此抛物线的顶点在第_____象限.

【答案】四

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象性质, 熟练掌握二次函数顶点坐标的表达式是解题的关键.

根据二次函数的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 代数分析即可.

【详解】解: $\because y = ax^2 - 2x$ 的开口向上

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore \text{函数的顶点坐标为: } \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right),$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0, \quad \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4a \times 0 - (-2)^2}{4a} = \frac{-4}{4a} = -\frac{1}{a} < 0$$

$\therefore$ 顶点在第四象限;

故答案为：四.

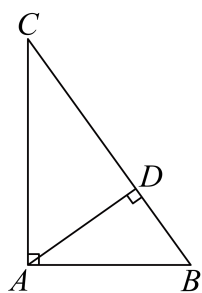
12. 已知 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是边 BC 上的高, $\cot \angle DAC = \frac{2}{3}$. 如果 $BD = 4$, 那么 $AD =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了余切的定义, 根据已知可得 $\angle B = 90^\circ - \angle DAB = \angle DAC$, 进而根据余切的定义, 得出 $\cot B = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{3}$, 即可求解.

【详解】 解: 如图所示,



ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是边 BC 上的高,

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle DAB = \angle DAC$$

$$\because \cot \angle DAC = \frac{2}{3}.$$

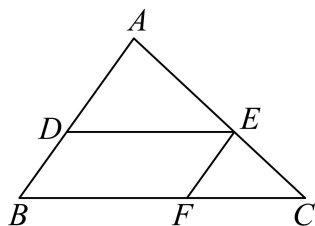
$$\therefore \cot B = \frac{BD}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$\because BD = 4,$$

$$\therefore AD = 6,$$

故答案为: 6.

13. 如图, 已知 ABC 中, 点 D, E, F 分别在边 AB, AC, BC 上, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$. 如果 $\frac{DE}{BC} = \frac{3}{5}$, $AB = 15$, 那么 $EF =$ _____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形判定与性质，根据 $DE \parallel BC$ 得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{5}$ ，根据比例的性质可得

$\frac{CE}{AC} = \frac{2}{5}$ ，再根据 $EF \parallel AB$ 证出 $\frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{2}{5}$ ，即可得到答案.

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB$$

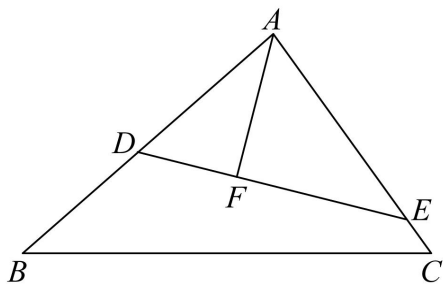
$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\because AB = 15,$$

$$\therefore EF = 6,$$

故答案为： 6 .

14. 如图, D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点, $\angle AED = \angle B$, $AF \perp DE$, 垂足为点 F . 如果 $AF = 2$, $BC = 6$, $\triangle ABC$ 的面积为 9, 那么 $\triangle ADE$ 的面积为_____.



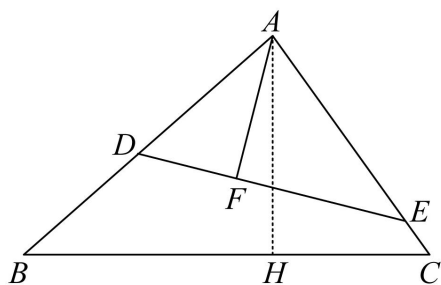
【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，三角形的面积，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 根据 $\triangle ABC$ 的面积及 BC 的长求出 AH 的长, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形面积之比等于相似比的平方即可求出 $\triangle ADE$ 的面积.

【详解】 解： 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 9,

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AH = 9,$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore \angle AED = \angle B, \angle DAE = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

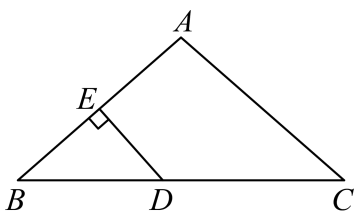
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}} = \left(\frac{AF}{AH} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{9} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 4,$$

故答案为: 4.

15. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 的中垂线 DE 分别与 AB 、 BC 交于点 E 、 D . 如果 $BD = 4$, $DC = 5$, 那么 $\angle B$ 的余弦值为_____.

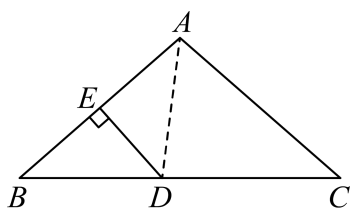


【答案】 $\frac{3}{4}$ ## 0.75

【解析】

【分析】连接 AD , 先利用等腰三角形的性质可得 $\angle B = \angle C$, 再利用线段垂直平分线的性质可得 $BE = \frac{1}{2} BA$, $DA = DB = 4$, 从而可得 $\angle B = \angle BAD$, 然后利用等量代换可得: $\angle BAD = \angle C$, 从而可证 $\triangle BAD \sim \triangle BCA$, 最后利用相似三角形的性质求出 BA 的长, 从而求出 BE 的长, 再在 $Rt\triangle BED$ 中, 利用锐角三角函数的定义进行计算即可解答.

【详解】解：连接 AD ，



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BA, DA = DB = 4,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BA},$$

$$\therefore BA^2 = BC \cdot BD = (4 + 5) \times 4 = 36,$$

$$\therefore BA = 6 \text{ 或 } BA = -6 \text{ (舍去)},$$

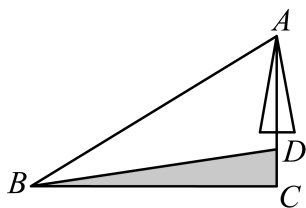
$$\therefore BE = \frac{1}{2}BA = 3,$$

在 $Rt\triangle BED$ 中, $\cos B = \frac{BE}{BD} = \frac{3}{4},$

故答案为: $\frac{3}{4}.$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，解直角三角形，等腰三角形的性质，线段垂直平分线的性质，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

16. 如图，斜坡 BD 的长为 7 米，在斜坡 BD 的顶部 D 处有一棵高为 3 米的小树 AD （点 A 、 D 、 C 在一直线上）， $AC \perp BC$ ，在坡底 B 处测得树的顶端 A 的仰角为 30° ，那么这个斜坡的坡度为_____.



【答案】 $1:4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，坡度坡角问题，设 $CD = x$ 米，则 $AC = (3+x)$ 米，根据垂直定义可得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用锐角三角函数的定义可得 $BC = \sqrt{3}(x+3)$ 米，再在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中，利用勾股定理进行计算即可解答.

【详解】 解： 设 $CD = x$ 米，

$$\because AD = 3 \text{ 米},$$

$$\therefore AC = AD + CD = (3+x) \text{ 米},$$

$$\because AC \perp BC,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$$\therefore BC = \frac{CD}{\tan 30^\circ} = \frac{x+3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}(x+3) \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中， $BC^2 = BD^2 - CD^2$ ，

$$\therefore [(x+3)]^2 = 7^2 - x^2,$$

$$\text{整理得： } 2x^2 + 9x - 11 = 0,$$

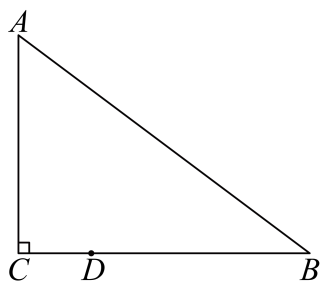
$$\text{解得： } x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{11}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore CD = 1 \text{ 米}, \quad BC = \sqrt{3}(3+x) = 4\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore \text{这个斜坡的坡度} = \frac{CD}{BC} = 1:4\sqrt{3},$$

故答案为： $1:4\sqrt{3}$.

17. ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， 点 D 在边 BC 上， $CD = 2$ ， 如图所示. 点 E 在边 AB 上， 将 BDE 沿着 DE 翻折得 $\triangle B'DE$ ， 其中点 B 与点 B' 对应， $B'E$ 交边 AC 于点 G ， $B'D$ 交 AC 的延长线于点 H . 如果 $\triangle B'HG$ 是等腰三角形， 那么 $BE =$ _____.

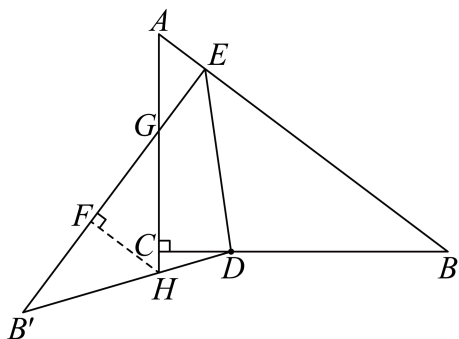


【答案】 $\frac{42}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、一元二次方程的应用、等腰三角形的性质等知识，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键. 先画出图形，过点 H 作 $HF \perp B'E$ 于点 F ，确定如果 $\triangle B'HG$ 是等腰三角形，则只能是 $B'H = GH$ ，设 $B'E = BE = x$ ($0 < x < 10$)，则 $AE = 10 - x$ ，再证出 $\triangle AEG \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质可得 $AG = \frac{50 - 5x}{3}$ ， $EG = \frac{40 - 4x}{3}$ ，然后证出 $\triangle HFG \sim \triangle AEG$ ，根据相似三角形的性质可得 $HG = \frac{35x - 200}{24}$ ，从而可得 CH, HD 的长，最后在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中，利用勾股定理求解即可得.

【详解】 解：由题意，画出图形如下：过点 H 作 $HF \perp B'E$ 于点 F ，



$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCH = 90^\circ,$$

$\because B'E$ 交边 AC 于点 G ， $B'D$ 交 AC 的延长线于点 H ，

$$\therefore \angle B'HG = \angle DCH + \angle CDH = 90^\circ + \angle CDH > 90^\circ,$$

$\therefore$ 如果 $\triangle B'HG$ 是等腰三角形，则只能是 $\angle B'HG$ 为顶角， $B'H = GH$ ，

$$\therefore \angle B' = \angle B'GH,$$

由对顶角相等得： $\angle AGE = \angle B'GH$ ，

$$\therefore \angle AGE = \angle B',$$

由折叠的性质得： $\angle B = \angle B'$ ，

$$\therefore \angle AGE = \angle B,$$

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = 6, \quad BC = 8, \quad CD = 2,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10, \quad BD = BC - CD = 6,$$

$$\therefore \angle A + \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ, \text{ 即 } B'E \perp AB,$$

$$\text{由折叠的性质得: } B'E = BE, \quad B'D = BD = 6,$$

$$\text{设 } B'E = BE = x \quad (0 < x < 10), \text{ 则 } AE = AB - BE = 10 - x,$$

$$\text{在 } \triangle AEG \text{ 和 } \triangle ACB \text{ 中,}$$

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle A = \angle A \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{EG}{BC} = \frac{AE}{AC}, \text{ 即 } \frac{AG}{10} = \frac{EG}{8} = \frac{10-x}{6},$$

$$\text{解得 } AG = \frac{50-5x}{3}, \quad EG = \frac{40-4x}{3},$$

$$\therefore CG = AC - AG = \frac{5x-32}{3}, \quad B'G = B'E - EG = \frac{7x-40}{3},$$

$$\because B'H = GH, \quad HF \perp B'E,$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2}B'G = \frac{7x-40}{6},$$

$$\text{又} \because B'E \perp AB, \quad HF \perp B'E,$$

$$\therefore AB \parallel HF,$$

$$\therefore \triangle HFG \sim \triangle AEG,$$

$$\therefore \frac{HG}{AG} = \frac{FG}{EG}, \text{ 即 } \frac{HG}{\frac{50-5x}{3}} = \frac{\frac{7x-40}{6}}{\frac{40-4x}{3}},$$

$$\text{解得 } HG = \frac{35x-200}{24},$$

$$\therefore HD = B'D - B'H = B'D - HG = \frac{344-35x}{24}, \quad CH = HG - CG = \frac{56-5x}{24},$$

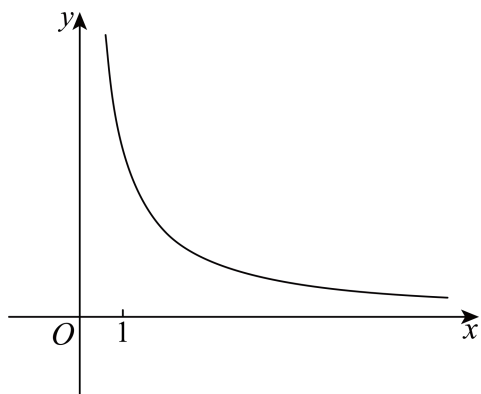
$$\text{在 Rt} \triangle CDH \text{ 中, } CH^2 + CD^2 = HD^2, \text{ 即 } \left(\frac{56-5x}{24}\right)^2 + 2^2 = \left(\frac{344-35x}{24}\right)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{42}{5} \text{ 或 } x = \frac{56}{5} > 10 \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

$$\text{即 } BE = \frac{42}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{42}{5}.$$

18. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 点 A 、 B 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 位于第一象限的图像上, 点 B 的横坐标大于点 A 的横坐标, $OA = OB$. 如果 $\triangle OAB$ 的重心恰好也在这个反比例函数的图像上, 那么点 A 的横坐标为_____.



【答案】 $3 - \sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5} + 3$

【解析】

【分析】由题意得点 A 、 B 关于直线 $y = x$ 对称, 由 $OA = OB$ 可得 $\triangle OAB$ 的重心在直线 OD : $y = x$ 上, 联立函数解析式求出点 C 坐标, 即得 $OC = 2\sqrt{2}$, 再根据三角形重心的性质可得 $OD = 3\sqrt{2}$, 得到 $D(3, 3)$,

设点 $A\left(a, \frac{4}{a}\right)$, 则 $B\left(\frac{4}{a}, a\right)$, 最后利用中点坐标公式解答即可求解.

【详解】解: 由题意得, 点 A 、 B 关于直线 $y = x$ 对称,

$$\therefore OA = OB,$$

$\therefore \triangle OAB$ 的重心在直线 OD : $y = x$ 上, 即为点 C ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = x \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 C 在第一象限,

$$\therefore C(2, 2),$$

$$\therefore OC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because$ 点 C 为 $\triangle OAB$ 的重心,

$$\therefore OC:CD = 2:1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{2},$$

$$\therefore OD = 3\sqrt{2},$$

$$\text{设 } D(m, m) \ (m > 0), \text{ 则 } m^2 + m^2 = (3\sqrt{2})^2,$$

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore D(3, 3),$$

$$\text{设点 } A\left(a, \frac{4}{a}\right), \text{ 则 } B\left(\frac{4}{a}, a\right),$$

$\because$ 点 D 为 AB 的中点,

$$\therefore \frac{a + \frac{4}{a}}{2} = 3,$$

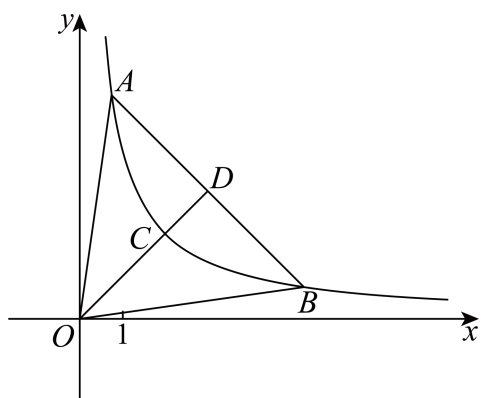
$$\therefore a^2 - 6a + 4 = 0,$$

$$\text{解得 } a = 3 + \sqrt{5} \text{ 或 } a = 3 - \sqrt{5},$$

$\because$ 点 B 的横坐标大于点 A 的横坐标,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的横坐标为 } 3 - \sqrt{5},$$

故答案为: $3 - \sqrt{5}$.



【点睛】本题考查了反比例函数的图象和性质，等腰三角形性质，

三角形的重心，勾股定理，中点坐标公式，掌握反比例函数的图象和性质是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } 2\cos 30^\circ + 4\sin^2 60^\circ - \frac{\cot 30^\circ}{3\tan 30^\circ - \tan 45^\circ}.$$

【答案】 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值，将特殊角的三角函数值代入求解.

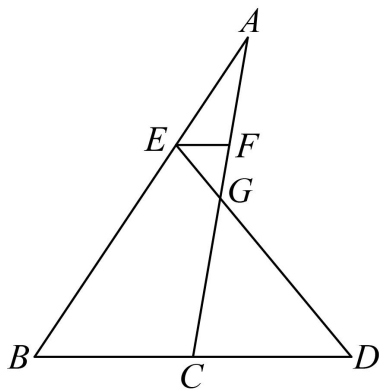
【详解】 解： $2\cos 30^\circ + 4\sin^2 60^\circ - \frac{\cot 30^\circ}{3\tan 30^\circ - \tan 45^\circ}$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1}$$

$$= \sqrt{3} + 3 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}.$$

20. 如图，已知点 E 、 F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上， $EF \parallel BC$ ， $BE = 2AE$ ，点 D 在 BC 的延长线上， $BC = CD$ ，连接 ED 与 AC 交于点 G .



(1) 求 $\frac{EG}{GD}$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AC} =$ _____， $\overrightarrow{EG} =$ _____。(用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ， $-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量、相似三角形的判定与性质，熟练掌握三角形法则、相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

(1) 由题意可得 $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, 则 $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{EF}{CD} = \frac{1}{3}$, 再证明 $\triangle EFG \sim \triangle DCG$, 即可求解;

(2) 由题意得 $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$, 则 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 由题意得 $EG = \frac{1}{4}ED$, $BE = \frac{2}{3}AB$, 则 $\overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}$, 进而求解.

【小问 1 详解】

$$\because BE = 2AE,$$

$$\therefore AB = 3AE.$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle B, \angle AFE = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \text{则 } \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\because BC = CD,$$

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{1}{3},$$

$$\because EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle GEF = \angle GDC, \angle EFG = \angle DCG,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle DCG,$$

$$\therefore \frac{EG}{GD} = \frac{EF}{CD} = \frac{1}{3}.$$

【小问 2 详解】

$$\because BC = CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = -\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \frac{EG}{GD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EG = \frac{1}{3}GD, \quad EG = \frac{1}{4}ED,$$

$$\because BE = 2AE,$$

$$\therefore BE = \frac{2}{3}AB,$$

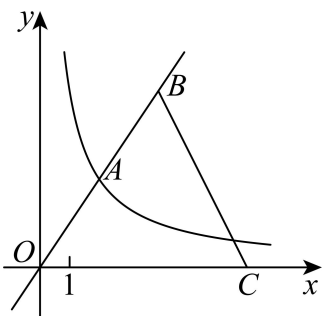
$$\therefore \text{则 } \overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EG} = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{EG} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

21. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 经过原点 O 的直线与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 交于点 $A(2, m)$, 点 B 在射线 OA 上, 点 C 的坐标为 $(7, 0)$.



(1) 求直线 OA 的表达式;

(2) 如果 $\tan \angle BCO = 2$, 求点 B 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{2}x$;

(2) $(4, 6)$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数与反比例函数的综合运用、锐角三角函数. 解决本题的关键是运用待定系数法求出正比例函数的解析式, 根据 $\angle BCO$ 的正确值和正比例函数的解析式求出点 B 的坐标.

(1) 根据点 $A(2, m)$ 在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上, 可以求出 $m = 3$, 把点 $A(2, 3)$ 的坐标代入正比例函数 $y = kx$ 中求出 k 的值即可得到直线 OA 的表达式;

(2) 因为直线 OA 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x$, 设点 B 的坐标为 $\left(b, \frac{3}{2}b\right)$, 根据 $\tan \angle BCO = \frac{BH}{CH} = 2$, 可得关于 b 的

分式方程, 解方程求出 b 即可得到点 B 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $A(2, m)$ 在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$\therefore$ 把 $x = 2$ 代入 $y = \frac{6}{x}$,

可得: $y = 3$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 3)$,

设直线 OA 的表达式为 $y = kx$ ($k \neq 0$),

把 $x = 2$, $y = 3$ 代入 $y = kx$,

可得: $k = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 直线 OA 的表达式为 $y = \frac{3}{2}x$;

【小问 2 详解】

解: 如下图所示, 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴, 垂足为点 H ,

设点 B 的坐标为 $\left(b, \frac{3}{2}b\right)$,

可得: $BH = \frac{3}{2}b$, $CH = 7 - b$,

在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, $\tan \angle BCO = \frac{BH}{CH} = 2$,

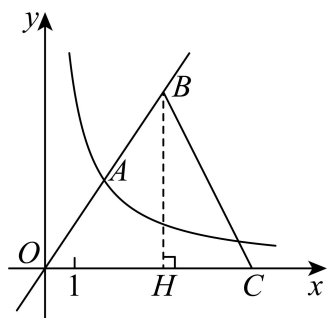
$$\therefore \frac{\frac{3}{2}b}{7-b} = 2,$$

解得: $b = 4$,

经检验, $b = 4$ 是分式方程的解,

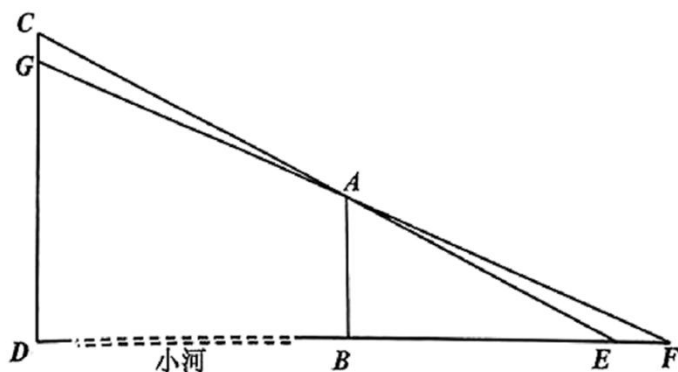
$$\therefore \frac{3}{2}b = \frac{3}{2} \times 4 = 6,$$

可得点 B 的坐标为 $(4, 6)$.



22. 如图, 已知小河两岸各有一栋大楼 AB 与 CD , 由于小河阻碍无法直接测得大楼 CD 的高度. 小普同学

设计了如下的测量方案: 将激光发射器分别置于地面点 E 和点 F 处, 发射的两束光线都经过大楼 AB 顶端 A , 并分别投射到大楼 CD 最高一层 CG 的顶端 C 和其底部 G 处, 并测得 $EF = 6\text{m}$, $\angle AEB = 26.6^\circ$, $\angle AFB = 22.6^\circ$. (点 D 、 B 、 E 、 F 在同一水平线上)



- (1) 小普同学发现, 根据现有数据就能测出大楼 AB 的高度, 试求出大楼 AB 的高度;
- (2) 为了能测得大楼 CD 的高度, 小普同学又获信息: 这两栋大楼每层的高度都相同, 大楼 AB 共有五层. 据此信息能否测得大楼 CD 的高度? 如果可以, 试求出大楼 CD 的高度; 如果不可以, 说明理由.

(参考数据: $\sin 22.6^\circ \approx \frac{5}{13}$, $\cos 22.6^\circ \approx \frac{12}{13}$, $\tan 22.6^\circ \approx \frac{5}{12}$, $\sin 26.6^\circ \approx \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos 26.6^\circ \approx \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan 26.6^\circ \approx \frac{1}{2}$)

【答案】 (1) 大楼 AB 的高度为 15m

(2) 能, 大楼 CD 的高度为 33m

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用, 熟练利用三角函数解直角三角形是解本题的关键.

(1) 设大楼 AB 的高度为 $x\text{m}$. 利用正切函数的定义用 x 表示出 BE 和 BF 的长, 再利用 $EF = BF - BE$, 列式计算即可求解;

(2) 根据题意先求得 $CG = 3\text{m}$, 设 DG 为 $y\text{m}$, 则 $CD = (y + 3)\text{m}$, 利用正切函数的定义用 x 表示出 DE 和 DF 的长, 再利用 $EF = DF - DE$, 列式计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: 设大楼 AB 的高度为 $x\text{m}$.

$$\because \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{AB}{\tan \angle AEB} \approx 2xm, \quad BF = \frac{AB}{\tan \angle AFB} \approx \frac{12}{5}xm.$$

$$\because EF = BF - BE,$$

$$\therefore \frac{12}{5}x - 2x = 6.$$

解得 $x = 15$.

答：大楼 AB 的高度为 15m；

【小问 2 详解】

解：由大楼 AB 的高度为 15m，共有五层，且这两栋大楼每层的高度都相同，

可得 $CG = 3\text{m}$ ，

设 DG 为 $y\text{m}$ ，则 $CD = (y + 3)\text{m}$ ，

$$\therefore \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{CD}{\tan \angle AEB} \approx 2(y + 3)\text{m}, \quad DF = \frac{DG}{\tan \angle AFB} \approx \frac{12}{5}y\text{m}.$$

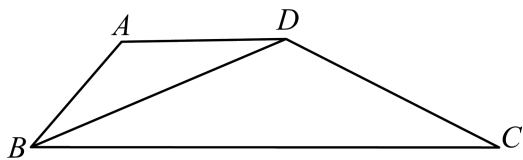
$$\therefore EF = DF - DE,$$

$$\therefore \frac{12}{5}y - 2(y + 3) = 6.$$

解得 $y = 30$.

答：大楼 CD 的高度为 33m.

23. 已知：如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， BD 为对角线， $BD^2 = AD \cdot BC$.



(1) 求证： $\angle ABD = \angle C$ ；

(2) E 为 BC 的中点，作 $\angle DEF = \angle C$ ， EF 交边 AD 于点 F ，求证： $2AB \cdot DE = BD \cdot EF$.

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定方法，证明三角形相似，是解题的关键：

(1) 证明 $\triangle ADB \sim \triangle DBC$ ，即可得证；

(2) 先证明 $\triangle FED \sim \triangle DCE$ ，可得 $\frac{DC}{EC} = \frac{EF}{DE}$ ，再由 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$ 可得 $\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{BC}$ ，结合 $BC = 2EC$ ，得到 $\frac{2AB}{BD} = \frac{EF}{DE}$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD^2 = AD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

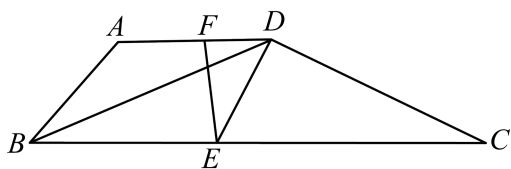
$$\therefore \angle ADB = \angle DBC.$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB.$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C.$$

【小问 2 详解】

如图,



$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle DEC,$$

$$\text{又} \because \angle DEF = \angle C,$$

$$\therefore \triangle FED \sim \triangle DCE.$$

$$\therefore \frac{DE}{EC} = \frac{EF}{DC},$$

$$\therefore \frac{DC}{EC} = \frac{EF}{DE}.$$

$$\because \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{DC}{BC}.$$

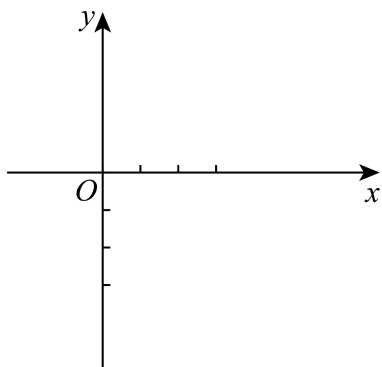
$$\because BC = 2EC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{DC}{2EC}. \quad \text{即: } \frac{2AB}{BD} = \frac{DC}{EC},$$

$$\therefore \frac{2AB}{BD} = \frac{EF}{DE}$$

$$\therefore 2AB \cdot DE = BD \cdot EF$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 的顶点 A 的坐标为 $(1, -2)$, 与 y 轴交于点 B . 将抛物线沿射线 BA 方向平移, 平移后抛物线的顶点记作 M , 其横坐标为 m . 平移后的抛物线与原抛物线交于点 N , 且设点 N 位于原抛物线对称轴的右侧, 其横坐标为 n .



- (1) 求原抛物线的表达式;
- (2) 求 m 关于 n 的函数解析式;
- (3) 在抛物线平移过程中, 如果 $\angle NBM$ 是锐角, 求平移距离的取值范围.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x - 3$

(2) $m = 2n$

(3) $\sqrt{2} < AM < 5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据顶点的坐标为 $(1, -2)$, 列出方程 $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b - 3 = -2 \end{cases}$, 求解即可;

(2) 先求出直线 AB 的表达式为 $y = x - 3$, 根据题意求出点 M 的坐标为 $(m, m - 3)$, 点 N 的坐标为 $(n, -n^2 + 2n - 3)$, 计算即可;

(3) 分类讨论求出临界情况, 即可得出取值范围.

【小问 1 详解】

解: 由原抛物线 $y = ax^2 + bx - 3 (a \neq 0)$ 顶点的坐标为 $(1, -2)$.

$$\text{可得} \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b - 3 = -2 \end{cases},$$

解得 $a = -1$, $b = 2$.

所以, 原抛物线的表达式是 $y = -x^2 + 2x - 3$.

【小问 2 详解】

解: 由点 A 的坐标为 $(1, -2)$, 点 B 的坐标为 $(0, -3)$

设直线 AB 的表达式为 $y = kx - 3$,

将点 A 的坐标 $(1, -2)$ 代入可得 $-2 = k - 3$, 解得: $k = 1$,

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = x - 3$.

由抛物线沿射线 BA 方向平移, 可得顶点 M 始终落在射线 BA 上,

得点 M 的坐标为 $(m, m - 3)$.

得平移后抛物线的表达式为 $y = -(x - m)^2 + m - 3$.

$\therefore$ 平移后的抛物线与原抛物线交于点 N , 其横坐标为 n , 点 N 的坐标为 $(n, -n^2 + 2n - 3)$,

$\therefore -n^2 + 2n - 3 = -(n - m)^2 + m - 3$.

化简得 $m^2 - 2mn - m + 2n = 0$, 得 $(m - 2n)(m - 1) = 0$.

$\therefore m - 1 \neq 0$,

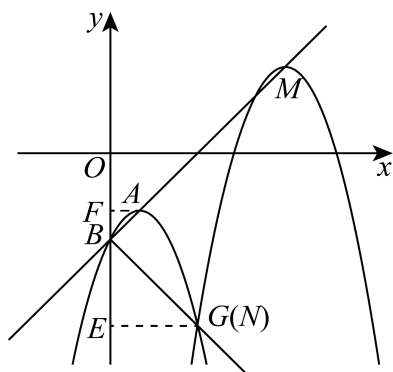
$\therefore m - 2n = 0$,

解得: $m = 2n$,

所以 m 关于 n 的函数解析式为 $m = 2n$.

【小问3 详解】

解: 过点 B 作 $BG \perp MB$, 交原抛物线于点 G , 那么 $\angle GBM = 90^\circ$.



当点 N 在 AG 之间的抛物线上运动时, $\angle NBM$ 是锐角.

当点 N 与点 A 重合时, $N(1, -2)$, $M(2, -1)$,

平移距离 $= \sqrt{(1 - 2)^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{2}$,

当点 N 与点 G 重合时,

过点 N 作 $NE \perp y$ 轴, 垂足为点 E , 过点 A 作 $AF \perp y$ 轴, 垂足为点 F .

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(n, -n^2 + 2n - 3)$, 点 B 的坐标为 $(0, -3)$, 点 A 的坐标为 $(1, -2)$.

$\therefore AF = BF = 1, EN = n, BE = n^2 - 2n$.

$\therefore \angle ABF = \angle BNE = 90^\circ - \angle NBE, \angle BFA = \angle BEN = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle BNE$,

$$\therefore \frac{BF}{NE} = \frac{AF}{BE},$$

$\therefore n^2 - 2n = n$, 可得 $n^2 - 3n = 0$.

$\therefore n \neq 0$,

$\therefore$ 解得: $n = 3$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(6, 3)$,

$\therefore AM = 5\sqrt{2}$.

$\therefore$ 点 N 位于原抛物线对称轴的右侧,

$\therefore$ 当 $\angle NBM$ 是锐角时, 平移距离的取值范围是 $\sqrt{2} < AM < 5\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次函数的图象和性质, 平移的性质, 相似三角形的性质和判定, 解一元二次方程, 一次函数的性质等, 掌握二次函数的性质是解题的关键.

25. 在八年级的时候, 我们曾经一起研究过一种三角形: 如果三角形的一个角的平分线与一条边上的中线互相垂直, 那么这个三角形叫做“线垂”三角形, 这个角叫做“分角”. 它的一个重要性质为: “分角”的两边成倍半关系. 这个性质的逆命题也成立.

利用以上我们研究得到的结论, 解决以下问题:

已知 ABC 是“线垂”三角形, $AB < BC$, $\angle ABC$ 是 ABC 的“分角”.

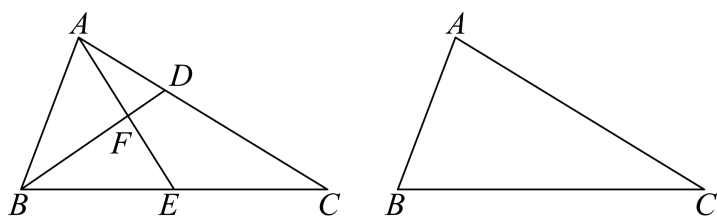


图1

图2

(1) 如图 1, BD 是 ABC 的角平分线, AE 是 ABC 的中线, AE 与 BD 相交于点 F . 求 $BF:FD$ 的值;

(2) 在图 2 中画 ABC 的一条分割线, 使所分成的两个三角形都成为“线垂”三角形, 并指出各自的“分

角”，说明理由；

(3) 在 (2) 的条件下，记分割得到的两个三角形“分角”的平分线交于点 O ，点 O 与点 A 、 B 、 C 的距离分别为 a 、 b 、 c ，求 a 、 b 、 c 满足的等量关系.

【答案】(1) $BF:FD$ 的值等于 3；

(2) 图见解析， $\triangle ABM$ 是“线垂三角形”， $\angle B$ 是“分角”， $\triangle ACM$ 是“线垂三角形”， $\angle MAC$ 是“分角”，理由见解析

(3) $4a^2 + b^2 = c^2$

【解析】

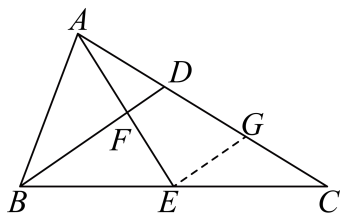
【分析】(1) 过点 E 作 $EG \parallel BD$ ，交 AC 于点 G . 由“线垂”三角形的定义求得 $BC = 2AB$ ，由等腰三角形的性质求得 $AF = EF$ ，证明 $\triangle AFD \sim \triangle AEG$ ， $\triangle CEG \sim \triangle CBD$ ，推出 $\frac{DF}{EG} = \frac{AF}{AE} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{EG}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，据此求解即可；

(2) 在边 BC 上取点 M ，使 $BM = \frac{1}{2}AB$ ，联结 AM ，那么 $\triangle ABM$ 是“线垂三角形”， $\angle B$ 是“分角”，证明 $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ ，得到 $\frac{AM}{CA} = \frac{1}{2}$ ，则 $\triangle ACM$ 也是“线垂三角形”， $\angle MAC$ 是“分角”；

(3) 作 $\angle B$ 和 $\angle CAM$ 的平分线，交点为 O ，联结 OC ，延长 AO ，交边 BC 于点 N ，延长 AN 至点 G ，使 $NG = ON$ ，联结 CG ，证明 $\triangle BON \cong \triangle CGN$ ，在 $\text{Rt}\triangle OGC$ 中，利用勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解：过点 E 作 $EG \parallel BD$ ，交 AC 于点 G .



由 $\angle ABC$ 是“线垂”三角形 ABC 的“分角”， $AB < BC$ ，

可知 $BC = 2AB$ ，

$\therefore AE$ 是 ABC 的中线，

$\therefore BC = 2BE$ ，

$\therefore AB = BE$ ，

$\therefore BD$ 是 ABC 的角平分线，

$\therefore AF = EF$ ，

$$\therefore EG \parallel BD,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle AEG, \triangle CEG \sim \triangle CBD,$$

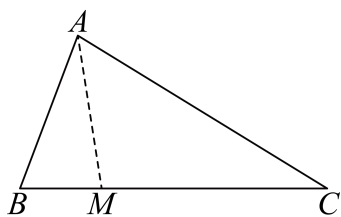
$$\therefore \frac{DF}{EG} = \frac{AF}{AE} = \frac{1}{2}, \quad \frac{EG}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BD:FD = 4:1 \text{ 的值等于 } 3$$

$$\therefore BF:FD \text{ 的值等于 } 3;$$

【小问 2 详解】

解：在边 BC 上取点 M ，使 $BM = \frac{1}{2}AB$ ，联结 AM ，



那么 $\triangle ABM$ 是“线垂三角形”， $\angle B$ 是“分角”，

$$\text{可得 } \frac{BM}{BA} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \angle B$ 为公共角，

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AM}{CA} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle ACM$ 也是“线垂三角形”， $\angle MAC$ 是“分角”；

【小问 3 详解】

解：作 $\angle B$ 和 $\angle CAM$ 的平分线，交点为 O ，联结 OC ，延长 AO ，交边 BC 于点 N ，

由 (2) 得 $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ ，

$$\therefore \angle BAM = \angle ACB,$$

可得 $\angle ANB = \angle ACB + \angle NAC$ ，

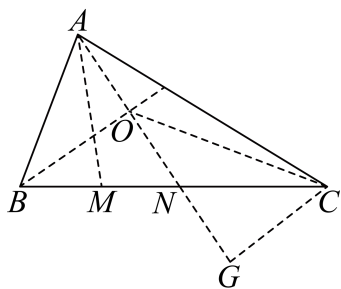
又 $\therefore \angle BAN = \angle BAM + \angle MAN$ ，

$$\therefore \angle ANB = \angle BAN.$$

$$\therefore BA = BN = \frac{1}{2}BC = CN.$$

$$\therefore BO \perp AN, \quad ON = OA = a.$$

延长 AN 至点 G ，使 $NG = ON$ ，联结 CG ，



$$\because BN = CN, \angle BNO = \angle CNG, NG = ON,$$

$$\therefore \triangle BON \cong \triangle CGN,$$

$$\therefore CG = b, \angle CGN = \angle BON = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle OGC$ 中，由勾股定理得 $OG^2 + CG^2 = OC^2$ ，即 $(2a)^2 + b^2 = c^2$ ，

$$\therefore 4a^2 + b^2 = c^2.$$

【点睛】 本题考查了“线垂三角形”的定义，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理．正确引出辅助线解决问题是解题的关键．