

2024 学年第一学期期末学业质量调研 九年级数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果斜坡的坡度 $i=1:\sqrt{3}$, 那么斜坡的坡角等于 ()

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【答案】 B

【解析】

【分析】此题考查了解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 掌握坡度坡角的定义及求解方法是解题的关键. 根据坡角的正切值为坡度求解即可.

【详解】解: 设坡角为 α , 则 $i = \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \alpha = 30^\circ$,

故选: B.

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 如果各边长都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 那么 $\angle A$ 的正弦值 ()

A. 扩大为原来的 2 倍 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$
C. 大小不变 D. 不能确定

【答案】 C

【解析】

【分析】本题考查了锐角三角函数的定义, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键. 根据锐角三角函数的定义, 即可得到答案.

【详解】解: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 每个边都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 那么每个角的大小都不变,

$\therefore \angle A$ 的正弦值不变,

故选: C.

3. 如果抛物线 $y = (m-1)x^2 + mx$ 的顶点是它的最高点, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > 0$

B. $m < 0$

C. $m > 1$

D. $m < 1$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了二次函数的图象和性质. 根据抛物线 $y = (m-1)x^2 + mx$ 的顶点是它的最高点得到抛物线开口向下, 则 $m-1 < 0$, 即可求出 m 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = (m-1)x^2 + mx$ 的顶点是它的最高点,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore m-1 < 0$,

$\therefore m < 1$,

故选: D

4. 已知直线 l 上三点 A 、 B 、 C , 且 $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 下列说法正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BC}$

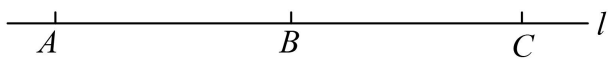
D. $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了平面向量. 画出图形, 由题意得到 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同, 且 $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, 即 B 是 AC 的中点, 根据图形进行判断即可.

【详解】解: 如图,



$\therefore \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

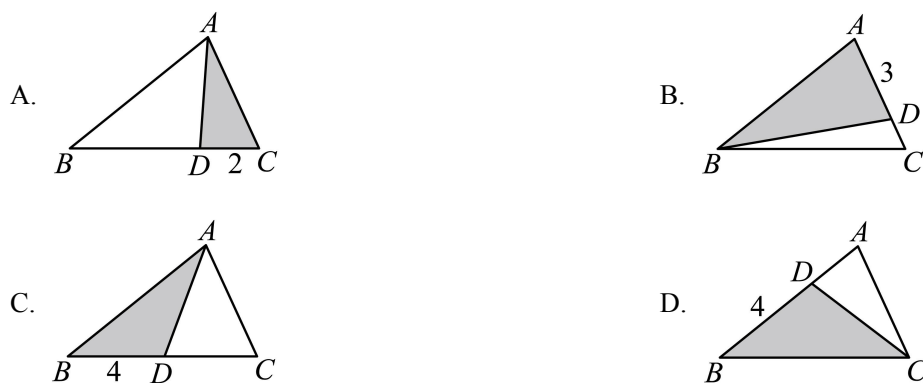
$\therefore \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 方向相同, 且 $|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$, 即 B 是 AC 的中点,

$\therefore AB = BC$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$,

综上所述, 只有 $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$ 正确,

故选: D.

5. 如图，在三角形纸片 ABC 中， $AB=6$ ， $AC=4$ ， $BC=8$ ，沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 ABC 相似的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】此题主要考查了相似三角形的判定，正确利用相似三角形两边比值相等且夹角相等的两三角形相似是解题关键.

根据相似三角形的判定分别进行判断即可得出答案即可.

【详解】解：在三角形纸片 ABC 中， $AB=6$ ， $AC=4$ ， $BC=8$.

A. 因为 $\frac{DC}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ，又由 $\angle C = \angle C$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 ABC 相似，故此选项符合题意；

B. 因为 $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ， $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项不合题意；

C. 因为 $\frac{BD}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ， $\frac{AB}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ，即： $\frac{1}{3} \neq \frac{3}{4}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项不合题意；

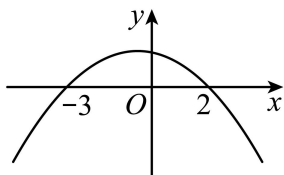
D. 因为 $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{BC}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$ ，故沿虚线剪下的涂色部分的三角形与 $\triangle ABC$ 不相似，故此选项不合题意；

故选：A.

6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，给出下列结论：① $c > 0$ ；② $-\frac{b}{2a} < 0$ ；③ $a + b + c < 0$ ；

④当 $-3 < x < 2$ 时， $y > 0$.

其中所有正确结论的序号是（ ）



A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与性质，图象与系数的关系，熟练掌握二次函数图象和性质是解题的关键. 根据图象与 y 轴交点 $(0, c)$ 在 y 轴正半轴，可得 $c > 0$ ，故①正确；根据图象可得二次函数的对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$ ，由于对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ ，即可判断②正确；当 $x = 1$ 时， $y = a + b + c > 0$ ，即可判断③，当 $-3 < x < 2$ 时，图象位于 x 轴上方，即当 $-3 < x < 2$ ，所对应的 $y > 0$ ，故④正确.

【详解】 解：① 当 $x = 0$ 时， $y = c$ ，根据图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴交点 $(0, c)$ 在 y 轴正半轴，即 $c > 0$ ，故①正确，符合题意；

② 根据图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的对称轴是直线 $x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$ ，即 $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} < 0$ ，故②正确，符合题意；

③ 由图象可知，当 $x = 1$ 时， $y = a + b + c > 0$ ，故③错误，不符合题意；

④ 根据图象可知，当 $-3 < x < 2$ 时，图象位于 x 轴上方，即当 $-3 < x < 2$ ，所对应的 $y > 0$ ，故④正确，符合题意；

综上所述，①②④结论正确，符合题意.

故选：B.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 如果 $\frac{x}{y} = 3$ ，那么 $\frac{x-y}{y}$ 的值为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】 此题考查了比例的性质. 由 $\frac{x}{y} = 3$ 得到 $x = 3y$ ，代入 $\frac{x-y}{y}$ 即可求出答案.

【详解】解： $\because \frac{x}{y} = 3$,

$$\therefore x = 3y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{3y-y}{y} = \frac{2y}{y} = 2,$$

故答案为：2.

8. 计算： $3(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____

【答案】 $\frac{5}{2}\vec{a} + 4\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量的加减法则，解题的关键是熟练掌握平面向量的加减法则，注意平面向量的加减适合加法交换律以及结合律，适合去括号法则．根据平面向量的加法法则计算即可．

【详解】解： $3(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= 3\vec{a} + 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
 $= \frac{5}{2}\vec{a} + 4\vec{b},$

故答案为： $\frac{5}{2}\vec{a} + 4\vec{b}$.

9. 如果将抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 向左平移 3 个单位，那么所得抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x+2)^2 + 2$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的法则是解答此题的关键．根据抛物线的平移规律：“左加右减”的法则即可得出结论．

【详解】解：将抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 向左平移 3 个单位，那么所得新抛物线的表达式是 $y = (x-1+3)^2 + 2$ ，
即 $y = (x+2)^2 + 2$ ，

故答案为： $y = (x+2)^2 + 2$.

10. 已知 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且长度为 5，那么 $\vec{a} =$ _____ . (用含向量 $\vec{e}$ 式子表示 $\vec{a}$)

【答案】 $-5\vec{e}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量，涉及相反向量，向量的模. 根据 $\vec{a}$ 长度为 5，得到 $|\vec{a}| = 5|\vec{e}| = 5$ ，再根据 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反即可求解.

【详解】解： $\because \vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反，且长度为 5，

$$\therefore |\vec{a}| = 5|\vec{e}| = 5,$$

$$\therefore \vec{a} = -5\vec{e},$$

故答案为： $-5\vec{e}$.

11. 如果线段 AB 的长为 2，点 P 是线段 AB 的黄金分割点，那么较短的线段 $AP = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】设较短的线段 $AP = x$ ，则 $BP = AB - AP$ ，根据黄金分割点的性质列方程并求解，即可得到答案.

【详解】设较短的线段 $AP = x$

$\because AB$ 的长为 2

$$\therefore BP = AB - AP = 2 - x$$

$$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{AP}{BP}$$

$$\therefore \frac{2-x}{2} = \frac{x}{2-x}$$

$$\therefore (2-x)^2 = 2x$$

$$\therefore x = 3 + \sqrt{5} \text{ 或 } 3 - \sqrt{5} \text{ (经检验均为方程的根)}$$

$3 + \sqrt{5} > 2$ ，故舍去

$$\therefore 2 - x = 2 - (3 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1 \neq 0$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{5}$$

$\therefore$ 较短的线段 $AP = 3 - \sqrt{5}$

故答案为： $3 - \sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了黄金分割点、分式方程、一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握黄

金分割点、分式方程、一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

12. 若两个相似三角形的相似比是 1: 2, 则它们的面积比是_____.

【答案】 1:4

【解析】

【分析】 根据相似三角形的面积比等于相似比即可求得.

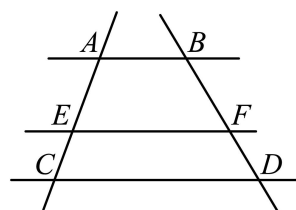
【详解】 $\because$ 两相似三角形的相似比为 1: 2,

$\therefore$ 它们的面积比是 1: 4,

故答案为: 1: 4.

【点睛】 本题考查了相似三角形的面积的比等于相似比的平方的性质, 熟记性质是解题的关键.

13. 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, $AE:CE=3:2$, $BF=6$, 那么 BD 的长等于_____.



【答案】 10

【解析】

【分析】 此题考查了平行线分线段成比例定理. 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{DF} = \frac{3}{2}$, 求出 $DF = \frac{2}{3}BF = 4$, 即可求出 BD 的长.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$, $AE:CE=3:2$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{DF} = \frac{3}{2},$$

$$\because BF = 6,$$

$$\therefore DF = \frac{2}{3}BF = 4$$

$$\therefore BD = BF + DF = 10,$$

故答案为: 10.

14. 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上, 如果 $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$, 那么 $\frac{AE}{CE} =$ _____时, $DE \parallel BC$.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质和判定, 掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

根据相似三角形的判定和性质、平行线的判定解答即可.

【详解】解: 当 $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{2},$$

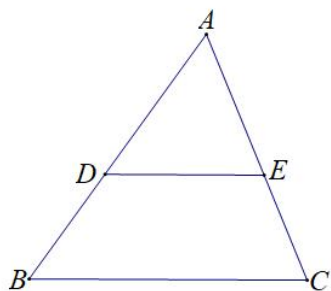
$$\text{若 } \frac{AE}{CE} = \frac{3}{2}, \text{ 可推导出 } \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$



故答案为: $\frac{3}{2}$.

15. 已知点 $A(-1, y_1)$ 、 $B(1, y_2)$ 都在抛物线 $y = ax^2 + 4ax$ ($a < 0$) 的图像上, 那么 y_1 与 y_2 的大小关系是

y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“<” 或 “=”)

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数图象上的点满足其解析式.

先根据二次函数图象上点的坐标特征, 分别计算出自变量为 -1 和 1 时的函数值, 再比较大小即可.

【详解】解: 当 $x = -1$ 时, $y_1 = a \times (-1)^2 + 4a \times (-1) = -3a$,

当 $x = 1$ 时, $y_2 = a \times 1^2 + 4a \times 1 = 5a$,

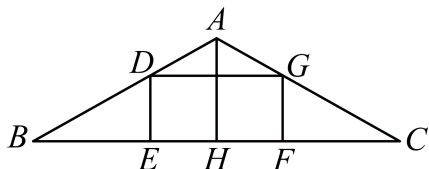
$$\because a < 0,$$

$$\therefore -3a > 5a,$$

$$\therefore y_1 > y_2,$$

故答案为：> .

16. 如图, 长方形 $DEFG$ 的边 EF 在 ABC 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在 AB 、 AC 上. 已知 ABC 的边 BC 长 120cm , 高 AH 为 40cm , 且长方形 $DEFG$ 的长 DG 是宽 DE 的 2 倍, 那么 DE 的长度是 _____ cm .



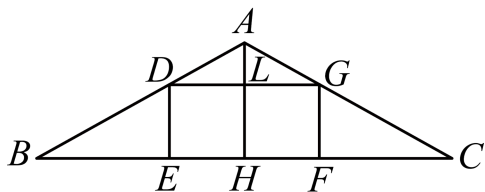
【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

设 AH 交 DG 于点 L , 由题意得, $DG \parallel EF$, $\angle DEC = 90^\circ$, $AH \perp BC$, 得出四边形 $DEHL$ 是矩形, 由 $DG \parallel EF$ 得到 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$, 继而得到 $\frac{AL}{AH} = \frac{DG}{BC}$, 即 $\frac{40-DE}{40} = \frac{2DE}{120}$, 计算即可求解.

【详解】 解: 设 AH 交 DG 于点 L , 如图,



$\because$ 长方形 $DEFG$ 的边 EF 在 ABC 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在 AB 、 AC 上,

$\therefore DG \parallel BC$, $\angle DEC = 90^\circ$,

$\because AH \perp BC$,

$\therefore AL \perp DG$,

$\therefore$ 四边形 $DEHL$ 是矩形,

$\therefore DE = LH$,

$\because DG \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AL}{AH} = \frac{DG}{BC}$,

$\because AH = 40\text{cm}$, $BC = 120\text{cm}$, $DG = 2DE$,

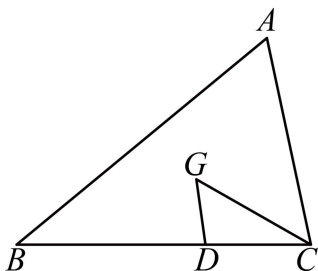
$\therefore AL = AH - LH = 40 - DE$,

$$\therefore \frac{40-DE}{40} = \frac{2DE}{120},$$

$$\therefore DE = 24\text{cm},$$

故答案为: 24 .

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 是重心, 过点 G 作 $GD \parallel AC$, 交 BC 于点 D , 连接 CG , 如果 $S_{\triangle GCD} = 2$, 那么 $S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 18

【解析】

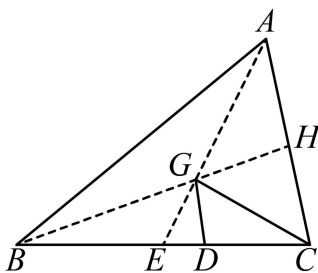
【分析】 本题主要考查了三角形的重心, 三角形的面积, 相似三角形的判定与性质, 解题的关键是熟练掌握基本知识. 连接 AG 并延长交 BC 于点 E , 连接 BG 并延长交 AC 于点 H , 由重心的性质得 $\frac{EG}{EA} = \frac{1}{3}$, 根

据中线的性质可得 $S_{\triangle BGE} = S_{\triangle CGE} = S_{\triangle CGH} = S_{\triangle AGH}$, 证明 $\triangle EDG \sim \triangle ECA$ 得 $\frac{S_{\triangle EDG}}{S_{\triangle ECA}} = \frac{1}{9}$, 设 $S_{\triangle EDG} = x$, 代

入可求出 $x = 1$, 进而可求出 $S_{\triangle ABC} = 18$.

利用相似三角形的面积比等于相似比的平方即可求解.

【详解】 解: 如图, 连接 AG 并延长交 BC 于点 E , 连接 BG 并延长交 AC 于点 H ,



$\therefore$ 点 G 是重心,

$$\therefore AE, BH \text{ 是中线}, \quad \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BCH} = S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}, \quad S_{\triangle BGE} = S_{\triangle CGE}, S_{\triangle CGH} = S_{\triangle AGH}, \quad \frac{EG}{EA} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle BGE} = S_{\triangle AGH},$$

$$\therefore S_{\triangle BGE} = S_{\triangle CGE} = S_{\triangle CGH} = S_{\triangle AGH},$$

$$\therefore GD \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle EDG \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EDG}}{S_{\triangle ECA}} = \left(\frac{EG}{EA}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\text{设 } S_{\triangle EDG} = x,$$

$$\text{则 } \frac{x}{3(x+2)} = \frac{1}{9},$$

$$\therefore x = 1,$$

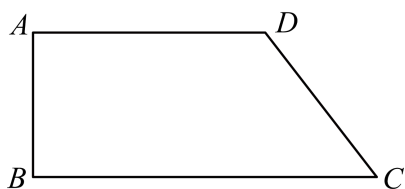
$$\therefore S_{\triangle BGE} = S_{\triangle CGE} = S_{\triangle CGH} = S_{\triangle AGH} = 1 + 2 = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle BCH} = S_{\triangle ACE} = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 18.$$

故答案为：18.

18. 四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ， $AD = 8$ ，将 AB 沿过点 A 的一条直线折叠，点 B 的对称点落在四边形 $ABCD$ 的对角线上，折痕交边 BC 于点 P （点 P 不与点 B 重合），那么 PC 长为_____.



【答案】 $\frac{26}{3}$ 或 $\frac{71}{8}$

【解析】

【分析】 本题考查的折叠的性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，分点 B 的对称点 B' 落在对角线 AC 上和落在对角线 BD 上两种情况，分别画出图形解答即可求解，运用分类讨论思想解答是解题的关键.

【详解】 解：如图，当点 B 的对称点 B' 落在对角线 AC 上时，

由折叠可得， $AB' = AB = 5$ ， $PB' = PB$ ， $\angle AB'P = \angle ABP = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CB'P = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, AB = 5, BC = 12,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore B'C = AC - AB' = 13 - 5 = 8,$$

设 $PB' = PB = x$, 则 $PC = 12 - x$,

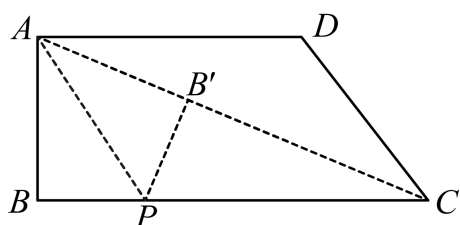
$$\therefore PB'^2 + B'C^2 = PC^2,$$

$$\therefore x^2 + 8^2 = (12 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{10}{3},$$

$$\therefore BP = \frac{10}{3},$$

$$\therefore PC = 12 - \frac{10}{3} = \frac{26}{3};$$



如图, 当点 B 的对称点 B' 落在对角线 BD 上时, 设 AP 与 BD 相交于点 G ,

由折叠可得, $AP \perp BD$,

$$\therefore \angle AGB = \angle BGP = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AG = \frac{1}{2} AB \cdot AD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{89} \times AG = \frac{1}{2} \times 5 \times 8,$$

$$\therefore AG = \frac{40\sqrt{89}}{89},$$

$$\therefore BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{40\sqrt{89}}{89}\right)^2} = \frac{25\sqrt{89}}{89},$$

$$\therefore \angle BAG + \angle ABG = 90^\circ, \angle PBG + \angle ABG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PBG = \angle BAG,$$

又 $\therefore \angle BGP = \angle AGB = 90^\circ$,

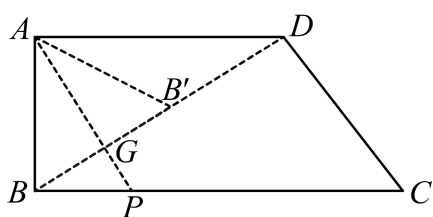
$$\therefore \triangle BGP \sim \triangle AGB,$$

$$\therefore \frac{BP}{AB} = \frac{BG}{AG},$$

$$\text{即 } \frac{BP}{5} = \frac{\frac{25\sqrt{89}}{89}}{\frac{40\sqrt{89}}{89}},$$

$$\therefore BP = \frac{25}{8},$$

$$\therefore CP = BC - BP = 12 - \frac{25}{8} = \frac{71}{8};$$



综上, PC 长为 $\frac{26}{3}$ 或 $\frac{71}{8}$,

故答案为: $\frac{26}{3}$ 或 $\frac{71}{8}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\tan^2 60^\circ + \frac{\cot 45^\circ - \cos 30^\circ}{2 \sin 30^\circ}$.

【答案】 $4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了特殊角的三角函数值的混合运算. 代入特殊角的三角函数值, 再进行二次根式的混合运算即可.

【详解】 解: $\tan^2 60^\circ + \frac{\cot 45^\circ - \cos 30^\circ}{2 \sin 30^\circ}$

$$= (\sqrt{3})^2 + \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 4 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

20. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 的顶点为 P , 与 y 轴相交与点 Q .

- (1) 求点 P 、 Q 的坐标;
- (2) 将该二次函数图像向上平移, 使平移后所得图像经过坐标原点, 与 x 轴的另一个交点为 M , 求 $\sin \angle OMQ$ 的值.

【答案】(1) $P(1, -4)$, $Q(0, -3)$

(2) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

- (1) 先利用配方法求出顶点 P 的坐标, 再令 $x=0$ 求出 y 的值, 即可得到点 Q 的坐标;
- (2) 设平移后抛物线的解析式为 $y=x^2-2x+m$, 求出 m 的值, 即可得到点 M 的坐标, 得到

$$\sin \angle OMQ = \frac{OQ}{MQ}, \text{ 计算即可得到答案.}$$

【小问 1 详解】

$$\text{解: } y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

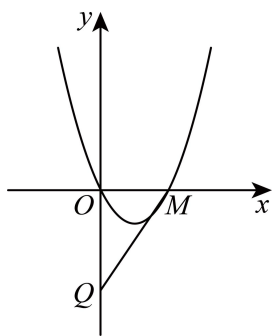
顶点 P 坐标为 $(1, -4)$

令 $x=0$, 则 $y=-3$,

$\therefore Q(0, -3)$;

【小问 2 详解】

解: 设平移后得解析式 $y=x^2-2x+m$



把 $(0,0)$ 代入得 $m=0$,

$$\therefore y = x^2 - 2x = x(x-2),$$

$$\therefore \text{当 } y=0 \text{ 时, } x_1=0, x_2=2,$$

$$\therefore \text{另一个交点 } M(2,0),$$

$$\therefore OM=2,$$

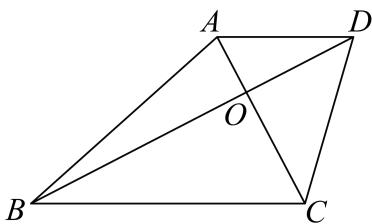
$$\therefore Q(0,-3),$$

$$\therefore OQ=3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OMQ \text{ 中, } QM = \sqrt{OQ^2 + OM^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \sin \angle OMQ = \frac{OQ}{QM} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

21. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 与 BD 相交于点 O , $BO=16$, $DO=8$, $AO=5$.



(1) 求 CO 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{CO}$.

【答案】 (1) $CO=10$

$$(2) \overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质和向量的知识, 掌握了以上知识是解题的关键;

(1) 利用已知条件 $AD \parallel BC$ 证出 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 再得出 $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$, 然后代入计算即可求解.

(2) 先求得 $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$, 再根据 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$, 然后即可求解;

【小问 1 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$,

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO},$$

$$\because AO=5, DO=8, BO=16,$$

$$\therefore \frac{5}{CO} = \frac{8}{16},$$

解得: $CO=10$;

【小问2详解】

解: $\because CO=2AO$,

$$\therefore CO = \frac{2}{3}CA,$$

又 $\because \overrightarrow{CO}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 同向,

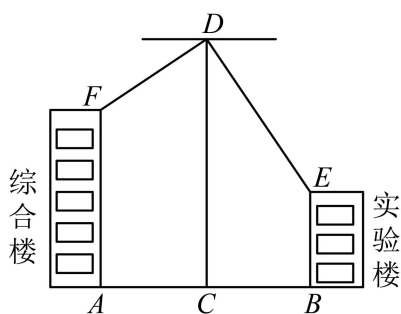
$$\therefore \overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA},$$

$$\because \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b};$$

22. 九年级数学活动小组用航拍无人机进行测高实践. 如图, 无人机从地面 AB 的中点 C 处竖直上升 20 米到达 D 处, 测得实验楼顶部 E 的俯角为 55° , 综合楼顶部 F 的俯角为 37° , 已知实验楼 BE 高度为 8 米, 且图中点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 在同一平面内, 求综合楼 AF 的高度.

(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$; $\sin 55^\circ \approx 0.82$, $\cos 55^\circ \approx 0.57$, $\cot 55^\circ \approx 0.70$, 精确到 0.1 米.)



【答案】约为 13.7 米

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 作 $DM \perp AF$, $DN \perp BE$, 垂足为 M 、 N , 由题意可得 $\angle MDF = 37^\circ$, $\angle NDE = 55^\circ$, $AM = CD = BN = 20$ 米, $DM = DN$,

$BE = 8$ 米, 即得 $EN = 12$, 分别解 $\text{Rt}\triangle DEN$ 和 $\text{Rt}\triangle DMF$, 求出 EN 、 MF 即可求解, 正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解: 作 $DM \perp AF$, $DN \perp BE$, 垂足为 M 、 N , 则 $\angle M = \angle N = 90^\circ$,

由题意可知: $\angle MDF = 37^\circ$, $\angle NDE = 55^\circ$, $AM = CD = BN = 20$ 米, $DM = DN$,

$BE = 8$ 米,

$\therefore EN = 12$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle DEN$ 中, $\cot\angle NDE = \frac{DN}{EN}$,

$\therefore DN = 12 \cdot \cot 55^\circ \approx 8.4$ 米,

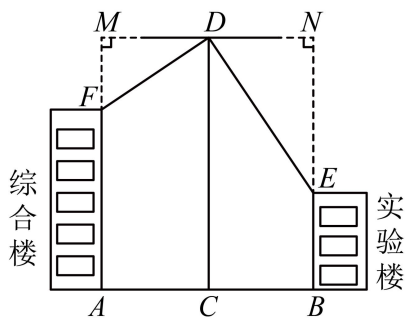
$\therefore DM = DN = 8.4$,

在 $\text{Rt}\triangle DMF$ 中, $\tan\angle MDF = \frac{MF}{DM}$,

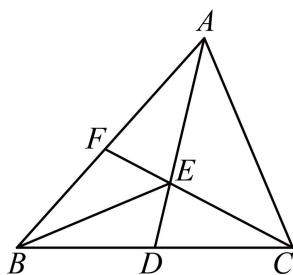
$\therefore MF = 8.4 \cdot \tan 37^\circ \approx 6.3$ 米,

$\therefore AF = AM - MF = 20 - 6.3 = 13.7$ 米,

答: 综合楼 AF 的高度约为 13.7 米.



23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线, 点 E 在 AD 上 (不与 A 、 D 重合), 连接 BE 、 CE , 并延长 CE 交 AB 于点 F , $\angle DCE = \angle DAC$.



(1) 求证: $\triangle DBE \sim \triangle DAB$;

(2) 当 $\angle BED = \angle ACF$ 时, 求证: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AE}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 等角对等边:

(1) 先证明 $\triangle DCE \sim \triangle DAC$ 得到 $\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{CD}$, 再由三角形中线的定义得到 $CD = BD$, 据此可证明结论;

(2) 先由相似三角形的性质得到 $\angle BED = \angle ABD$ ，再证明 $\triangle ACF \sim \triangle ABC$ ，得到 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF}$ ，导角证明 $\angle AFE = \angle AEF$ ，得到 $AE = AF$ ，则可证明 $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AE}$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle DCE = \angle DAC, \angle CDE = \angle ADC$ ，

$\therefore \triangle DCE \sim \triangle DAC$ ，

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{CD},$$

又 $\because AD$ 是边 BC 上中线，

$\therefore CD = BD$ ，

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{AD}{BD},$$

又 $\because \angle BDE = \angle ADB$ ，

$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DAB$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle DBE \sim \triangle DAB$ ，

$\therefore \angle BED = \angle ABD$ ，

$\because \angle BED = \angle ACF$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ACF$

又 $\because \angle CAF = \angle BAC$ ，

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AF},$$

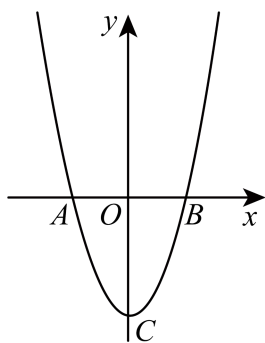
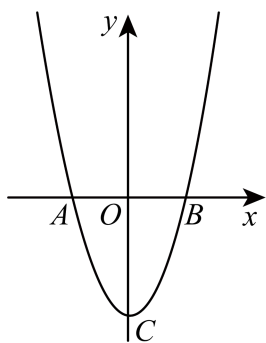
又 $\because \angle AFE = \angle ABD + \angle DCE, \angle AEF = \angle ACF + \angle DAC$ ， $\angle DCE = \angle DAC$ ，

$\therefore \angle AFE = \angle AEF$ ，

$\therefore AE = AF$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AE}.$$

24. 已知在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, -4)$ 三点。



备用图

(1) 求该抛物线的表达式:

(2) 点 P 是抛物线上在第一象限内的动点, 点 P 的横坐标为 m

①如果 $\triangle PAC$ 是以 PC 为斜边的直角三角形, 求 m 的值;

②在 y 轴正半轴上存在点 H , 当线段 PH 绕点 H 逆时针方向旋转 90° 时, 恰好与抛物线上的点 Q 重合, 此时点 Q 的横坐标为 $n(n > 0)$, 求 $n - m$ 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 4$

(2) ① $m = 2\frac{1}{2}$; ② $n - m = 1$

【解析】

【分析】(1) 由抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -4)$, 再建立方程组解题即可;

(2) ①作 $PN \perp x$ 轴, 垂足为 N . 由题意可得 $AN = m + 2$, $PN = m^2 - 4$, $OA = 2$, $OC = 4$, 证明 $\tan \angle PAN = \tan \angle ACO$, 再建立方程求解即可; ②作 $PE \perp y$ 轴于 E , $QF \perp y$ 轴于 F , 证明 $\triangle QFH \cong \triangle HEP$, 可得 $PE = FH$, $HE = QF$, 设 $Q(n, n^2 - 4)$, 再进一步解答即可.

【小问 1 详解】

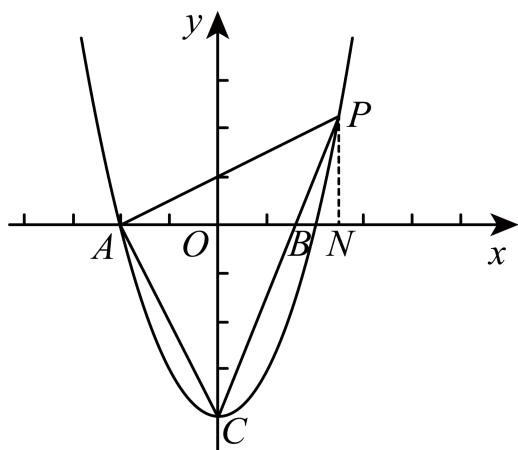
解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -4)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -4 \end{cases}, \text{ 解方程组得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = x^2 - 4$

【小问 2 详解】

解：①作 $PN \perp x$ 轴，垂足为 N .



$\because$ 点 P 在抛物线 $y = x^2 - 4$ 的图象上，横坐标为 $m(m > 0)$,

$$\therefore P(m, m^2 - 4),$$

$$\because A(-2, 0), C(0, -4),$$

$$\therefore AN = m + 2, PN = m^2 - 4, OA = 2, OC = 4,$$

$$\because \angle PAN + \angle OAC = \angle ACO + \angle OAC,$$

$$\therefore \angle PAN = \angle ACO,$$

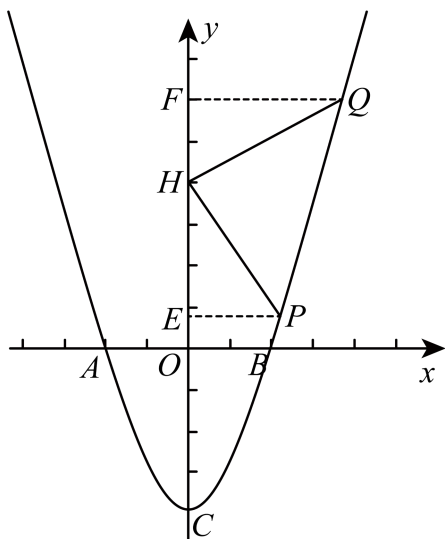
$$\therefore \tan \angle PAN = \tan \angle ACO,$$

$$\therefore \frac{PN}{AN} = \frac{AO}{CO},$$

$$\text{即 } \frac{m^2 - 4}{m + 2} = \frac{2}{4},$$

解得 $m = 2\frac{1}{2}$, 经检验符合题意;

②作 $PE \perp y$ 轴于 E , $QF \perp y$ 轴于 F ,



$$\therefore \angle PEH = \angle QFH = \angle QHP = 90^\circ ,$$

$$\because \angle FHQ + \angle QHP = \angle PEH + \angle HPE ,$$

$$\therefore \angle FHQ = \angle HPE ,$$

$$\text{又} \because HQ = HP ,$$

$$\therefore \triangle QFH \cong \triangle HEP ,$$

$$\therefore PE = FH, HE = QF ,$$

$$\text{设 } Q(n, n^2 - 4) ,$$

$$\text{由 } PE = m, OE = m^2 - 4, QF = n, OF = n^2 - 4 ,$$

$$\therefore FH = m, HE = n ,$$

$$\because OF - OE = FH + HE ,$$

$$\therefore n^2 - 4 - (m^2 - 4) = m + n ,$$

$$\text{整理得: } n^2 - m^2 = m + n ,$$

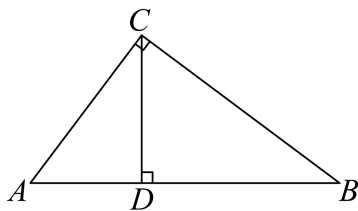
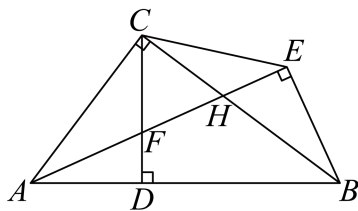
$$\because m > 0, n > 0 ,$$

$$\therefore n - m = 1 .$$

【点睛】 本题考查的是全等三角形的判定与性质， 利用待定系数法求解二次函数的解析式， 旋转的性质， 锐角三角函数的应用， 作出符合题意的图形是解本题的关键.

25. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $CD \perp AB$ ， 垂足为 D ， 点 F 是线段 CD 上一点

(不与 C 、 D 重合), 过点 B 作 $BE \perp AF$ 交 AF 的延长线于点 E , AE 与 BC 交于点 H , 连接 CE .



备用图

- (1) 求证: $\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{EH}$;
- (2) 当 $CE \parallel AB$ 时, 求 CE 的长;
- (3) 当 $\triangle CFH$ 是等腰三角形时, 求 CH 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $CE = \frac{14}{5}$

(3) $\frac{9}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意 $\angle AEB = \angle ACB$, $\angle AHC = \angle BHE$, 证明 $\triangle ACH \sim \triangle BEH$ 即可求证;

(2) 根据题意可得 $\triangle CHE \sim \triangle AHB$, 则有 $\angle CEH = \angle ABH$, 由 $CE \parallel AB$, 得到 $AH = BH$, 如图所示, 作 $HG \perp AB$, 垂足是 G , 由勾股定理、三角函数的计算得到 $AB = 10, \cos \angle ABC = \frac{4}{5}$, 在 $\text{Rt} \triangle BHG$ 中, $\cos \angle ABC = \frac{BG}{BH}$, 则有 $\frac{5}{BH} = \frac{4}{5}$, 得到 $BH = \frac{25}{4}$, 再根据 $\frac{CE}{AB} = \frac{CH}{BH}$, 即可求解;

(3) 根据等腰三角形的判定和性质分类讨论: 第一种情况: 当 $\angle CFH = \angle CHF$ 时, 可证 AH 平分 $\angle CAB$, 根据角平分线的性质, 锐角三角函数即的计算可解得 HG ; 第二种情况: 当 $\angle CHF = \angle HCF$ 时, 可得 $\tan \angle CHF = \tan \angle CAB$, 则 $\frac{AC}{CH} = \frac{BC}{AC}$, 即 $\frac{6}{CH} = \frac{8}{6}$, 即可求解; 第三种情况: 当 $\angle HCF = \angle HFC$ 时, 结合 (2) 的计算即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because BE \perp AF$,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEB = \angle ACB$,

$\because \angle AHC = \angle BHE$,

$\therefore \triangle ACH \sim \triangle BEH$,

$$\therefore \frac{AH}{BH} = \frac{CH}{EH} \text{ 即 } \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{EH};$$

【小问2 详解】

$$\text{解: } \because \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{EH}, \angle CHE = \angle AHB,$$

$$\therefore \triangle CHE \sim \triangle AHB,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle ABH,$$

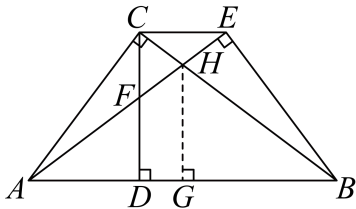
$$\therefore CE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle HAB,$$

$$\therefore \angle ABH = \angle HAB,$$

$$\therefore AH = BH,$$

如图所示, 作 $HG \perp AB$, 垂足是 G ,



$$\therefore HG \perp AB,$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2} AB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 6, BC = 8$,

$$\therefore AB = 10, \cos \angle ABC = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BG = 5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BHG \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{BG}{BH},$$

$$\therefore \frac{5}{BH} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BH = \frac{25}{4},$$

$$\therefore CH = BC - BH = \frac{7}{4},$$

$$\therefore CE \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{CH}{BH}, \text{ 即 } \frac{CE}{10} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{25}{4}},$$

$$\therefore CE = \frac{14}{5};$$

【小问3详解】

解：若 $\triangle CFH$ 是等腰三角形，那么 $\angle CFH = \angle CHF$ 或 $\angle FHC = \angle FCH$ 或 $\angle HCF = \angle HFC$ ，

第一种情况：当 $\angle CFH = \angle CHF$ 时，

$$\because \angle CFH = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle CHF = \angle AFD,$$

$$\text{又} \because \angle CHF + \angle CAH = \angle AFD + \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAH = \angle FAD,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ 即 } AC \perp BC \quad HG \perp AB,$$

$$\therefore CH = HG,$$

$$\therefore AH = AH, CH = GH,$$

$$\therefore \triangle ACH \cong \triangle AGH \text{ (HL)},$$

$$\therefore AG = AC = 6,$$

$$\therefore BG = AB - AG = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BHG \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{HG}{BG},$$

$$\therefore HG = 4 \times \frac{3}{4} = 3, \text{ 即 } CH = 3$$

第二种情况：当 $\angle FHC = \angle FCH$ 时

$$\because \angle HCF = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CHF = \angle CAB,$$

$$\therefore \tan \angle CHF = \tan \angle CAB,$$

$$\therefore \frac{AC}{CH} = \frac{BC}{AC}, \text{ 即 } \frac{6}{CH} = \frac{8}{6},$$

$$\therefore CH = \frac{9}{2};$$

第三种情况：当 $\angle HCF = \angle HFC$ 时，

$$\because \angle CFH = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle HCF = \angle AFD,$$

$$\text{又 } \angle HCF + \angle ABC = \angle AFD + \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle FAD$$

$$\because \angle ABC = \angle CEA,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle CEA,$$

$$\therefore CE \parallel AB,$$

$$\text{由 (2) 可知, 在 Rt}\triangle BHG \text{ 中, } \cos \angle ABC = \frac{BG}{BH},$$

$$\therefore \frac{5}{BH} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BH = \frac{25}{4},$$

$$\therefore CH = BC - BH = \frac{7}{4}, \text{ 即 } CH = \frac{7}{4};$$

$$\text{综上所述, } CH = 3 \text{ 或 } \frac{9}{2} \text{ 或 } \frac{7}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定和性质，平行线的性质，等腰三角形的判定和性质，全等三角形的性质，锐角三角函数的计算，掌握相似三角形的判定和性质，锐角三角函数的计算方法是解题的关键。