

2025 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在比例尺为 $1:500$ 的图纸上，量得一座塔的高是 2.2 厘米，那么它实际的高度是（ ）

- A. 11 米 B. 110 米 C. 22 米 D. 220 米

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了比例，熟练掌握比例尺的定义“比例尺是图上距离与实际距离之比”是解题关键. 比例尺是图上距离与实际距离之比，依此列出算式计算即可得.

【详解】解：设塔的实际的高度是 x 厘米，

由题意得： $2.2 : x = 1 : 500$ ，

解得 $x = 1100$ ，

因为 1100 厘米 $= 11$ 米，

所以塔的实际的高度是 11 米，

故选：A.

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{1}{2}$ ，则 $\cos B$ 等于（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】由 $\sin A = \frac{1}{2}$ 知道 $\angle A = 30^\circ$ ，即可得到 $\angle B$ 的度数即可求得答案.

【详解】解： $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了特殊角的锐角三角函数值，直角三角形两锐角互余，解题的关键是正确识记 30° 角的正弦值和 60° 度角的余弦值.

3. 下列图形，相似的一组是 ()

- A. 两个直角三角形
- B. 两个等腰三角形
- C. 有一个内角为 80° 的两个菱形
- D. 边长分别是 2 厘米和 3 厘米的两个菱形

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似图形的判定，根据相似图形的定义进行判断即可.

【详解】 解： A、两个直角三角形不一定相似，不符合题意；

B、两个等腰三角形不一定相似，不符合题意；

C、有一个内角为 80° 的两个菱形对应边成比例，相似，符合题意；

D、边长分别为 2 厘米和 3 厘米的两个菱形对应角不一定相等，不符合题意.

故选： C.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，如果点 $\left(\frac{1}{3}, a\right), \left(\frac{3}{2}, b\right), (2, c)$ 都在抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2$ 上，那么 ()

- A. $a < b < c$
- B. $c < a < b$
- C. $b < c < a$
- D. $b < a < c$

【答案】 A

【解析】

【详解】 本题考查比较二次函数的函数值大小，根据二次函数的增减性进行判断即可.

【分析】 解： $\because$ 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2$ 的开口向上，对称轴为 y 轴，

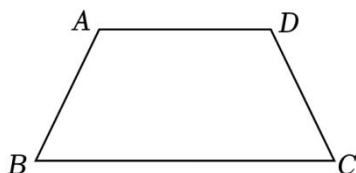
$\therefore x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\because$ 点 $\left(\frac{1}{3}, a\right), \left(\frac{3}{2}, b\right), (2, c)$ 都在抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2$ 上，且 $0 < \frac{1}{3} < \frac{3}{2} < 2$ ，

$\therefore a < b < c$

故选： A.

5. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = AD$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DC}$ ，结果正确的是 ()



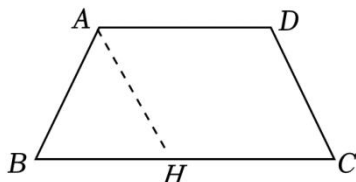
- A. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b}$ B. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$ C. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查平面向量的线性运算、等边三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质，注意向量的方向是解答的关键. 如图，过点 A 作 $AH \parallel CD$ 交 BC 于点 H . 证明 $BH = AB = AD - CH$ ，求出 $\overrightarrow{BC}$ ，再根据 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 求解.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AH \parallel CD$ 交 BC 于点 H .



在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore AH \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AHB = \angle C = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABH$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = BH = AH,$$

$$\therefore AD \parallel CH, AH \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCH$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = CH = BH = AB,$$

$$\therefore BC = CH + BH = 2AD$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{b},$$

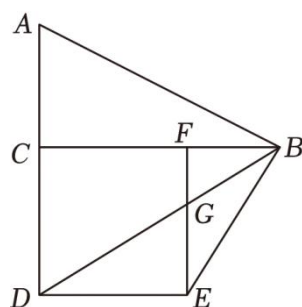
$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{b}.$$

故选：B.

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，延长 AC 至点 D ，使 $AD = AB$ ，连接 BD 、 BE ， BD 交 EF 于点 G . 某同学得到以下两个结论：

①G 是线段 EF 的黄金分割点；② $\frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle DEG}}$.

关于结论①和②，下列说法正确的是（ ）



A. ①正确②错误

B. ①错误②正确

C. ①和②都错误

D. ①和②都正确

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质、黄金分割的定义等知识点，掌握黄金分割的定义是解题的关键.

①设 $AC = a$ ，则 $BC = 2a$ ，进而得 $AD = AB = \sqrt{5}a$ ， $CD = DE = EF = CF = (\sqrt{5} - 1)a$ ，证明 $\triangle BFG$

和 $\triangle DEG$ 相似得 $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{DE} = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{(\sqrt{5} - 1)a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ，然后根据黄金分割的定义可对结论①进行判断；②

根据 $\frac{FG}{EG} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ， $EF = (\sqrt{5} - 1)a$ 得 $FG = (2\sqrt{5} - 4)a$ ， $EG = (3 - \sqrt{5})a$ ，再分别求出

$S_{\triangle BGE} = (7 - 3\sqrt{5})a^2$ 、 $S_{\triangle BDE} = (3 - \sqrt{5})a^2$ 、 $S_{\triangle BGF} = (5\sqrt{5} - 11)a^2$ 、 $S_{\triangle DEG} = (2\sqrt{5} - 4)a^2$ ，由此得

$\frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ， $\frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle DEG}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ，据此可对结论②进行判断，综上所述即可解答.

【详解】解：① $\because$ 在 $\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 设 $AC = a$ ，则 $BC = 2a$ ，由勾股定理得： $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5}a$ ，

$\therefore AD = AB = \sqrt{5}a$ ，

$\therefore CD = AD - AC = (\sqrt{5} - 1)a$ ，

$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 正方形，

$\therefore CD = DE = EF = CF = (\sqrt{5} - 1)a$ ， $BC \parallel DE$ ，

$$\therefore BF = BC - CF = 2a - (\sqrt{5} - 1)a = (3 - \sqrt{5})a ,$$

$$\because BC \parallel DE ,$$

$$\therefore \triangle BFG \sim \triangle DEG ,$$

$$\therefore \frac{FG}{EG} = \frac{BF}{DE} ,$$

$$\therefore \frac{FG}{EG} = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{(\sqrt{5} - 1)a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ,$$

$\therefore G$ 是线段 EF 的黄金分割点, 故结论①正确;

$$\textcircled{2} \because \frac{FG}{EG} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ,$$

$$\therefore \text{设 } FG = (\sqrt{5} - 1)k , \quad EG = 2k ,$$

$$\therefore FG + EG = EF = (\sqrt{5} - 1)a ,$$

$$\therefore (\sqrt{5} - 1)k + 2k = (\sqrt{5} - 1)a , \quad \text{解得: } k = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2} ,$$

$$\therefore FG = (\sqrt{5} - 1)k = (\sqrt{5} - 1) \times \frac{(3 - \sqrt{5})a}{2} = (2\sqrt{5} - 4)a , \quad EG = (3 - \sqrt{5})a ,$$

$$\therefore S_{\triangle BGE} = \frac{1}{2} EG \cdot BF = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5})a \times (3 - \sqrt{5})a = (7 - 3\sqrt{5})a^2 ,$$

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} DE \cdot CD = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)a \times (\sqrt{5} - 1)a = (3 - \sqrt{5})a^2 ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{(7 - 3\sqrt{5})a^2}{(3 - \sqrt{5})a^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} ,$$

$$\text{又} \because S_{\triangle BGF} = \frac{1}{2} FG \cdot BF = \frac{1}{2} (2\sqrt{5} - 4)a \times (3 - \sqrt{5})a = (5\sqrt{5} - 11)a^2 ,$$

$$S_{\triangle DEG} = \frac{1}{2} DE \cdot EG = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)a \times (3 - \sqrt{5})a = (2\sqrt{5} - 4)a^2 ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle DEG}} = \frac{(5\sqrt{5} - 11)a^2}{(2\sqrt{5} - 4)a^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle DEG}} . \quad \text{故结论②正确,}$$

综上所述：结论①和②都正确.

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ ，那么 $\frac{2a+b}{c}$ 的值是 _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查比例的知识，解题的关键是掌握比例的性质，根据题意，设 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ，依次求出 a ， b ， c 代入计算，即可.

【详解】 解： 设 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = k$ ，

$\therefore a = 3k$ ， $b = 4k$ ， $c = 5k$ ，

$\therefore \frac{2a+b}{c} = \frac{2 \times (3k) + 4k}{5k} = \frac{10k}{5k} = 2$.

故答案为： 2.

8. 计算： $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性计算，熟练掌握运算是解题关键.

根据向量的线性计算，即可求解.

【详解】 解： 原式 $= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

9. 计算： $\sin^2 45^\circ - \frac{2 \sin 60^\circ}{\cot 30^\circ} + \sin 30^\circ =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 利用特殊锐角三角函数值计算即可.

本题考查了特殊角的三角函数值，熟记三角函数值是解题的关键

【详解】解： $\sin^2 45^\circ - \frac{2 \sin 60^\circ}{\cot 30^\circ} + \sin 30^\circ$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 0,$$

故答案为：0.

10. 如果二次函数 $y = (m-1)x^2 + m$ 的图象开口向下，那么 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象和性质，根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，当 $a > 0$ ，函数图象开口向上；当 $a < 0$ 时，函数图象开口向下，进行解答，即可.

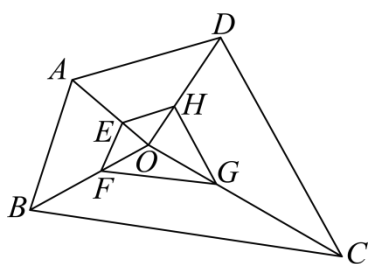
【详解】解： $\because$ 二次函数 $y = (m-1)x^2 + m$ 的图象开口向下，

$$\therefore m-1 < 0,$$

$$\therefore m < 1.$$

故答案为： $m < 1$.

11. 如图， O 是四边形 $ABCD$ 内一点，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在线段 AO 、 BO 、 CO 、 DO 上， $EF \parallel AB$ ， $FG \parallel BC$ ， $GH \parallel CD$ ， $EH \parallel AD$ ， $EF = 2$ ， $AB = 5$ ， $AD = 6$ ，那么 EH 的长是_____.



【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质，平行线分线段成比例，推导出 $\frac{OH}{OD} = \frac{OE}{OA}$ 进而证明 $\triangle OEH \sim \triangle OAD$ 是解题的关键.

由 $EF \parallel AB$ ，证明 $\triangle OEF \sim \triangle OAB$ ，得 $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{AB} = \frac{2}{5}$ ，由 $GH \parallel CD$ ， $FG \parallel BC$ ，证明

$$\frac{OH}{OD} = \frac{OG}{OC} = \frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{5}, \text{ 再证明 } \triangle OEH \sim \triangle OAD, \text{ 得, } \frac{EH}{AD} = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{5} \text{ 求得 } EH = \frac{2}{5} AD = \frac{12}{5},$$

于是得到问题的答案.

【详解】解: $\therefore EF \parallel AB, EF = 2, AB = 5,$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle OAB,$$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{AB} = \frac{2}{5},$$

$$\because GH \parallel CD, FG \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{OH}{OD} = \frac{OG}{OC} = \frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{5},$$

$$\because \angle EOH = \angle AOD,$$

$$\therefore \triangle OEH \sim \triangle OAD,$$

$$\therefore \frac{EH}{AD} = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore EH = \frac{2}{5} AD = \frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5},$$

故答案为: $\frac{12}{5}$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 关于 y 轴对称的抛物线的表达式为 _____.

【答案】 $y = (x+1)^2 + 2$

【解析】

【分析】根据关于 y 轴对称的图象的特点即可得到结论.

本题考查了轴对称, 关于 y 轴对称, 纵坐标不变, 横坐标变成相反数, 熟练掌握对称的特点是解题的关键.

【详解】解: 设抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 上一个点坐标为 (x_0, y_0) , 其关于 y 轴的对称点为 (p, q) ,

$$\text{则 } x_0 = -p, y_0 = q, y_0 = (x_0 - 1)^2 + 2,$$

$$\therefore q = (-p - 1)^2 + 2,$$

$$\therefore q = (p + 1)^2 + 2,$$

$$\text{即 } y = (x + 1)^2 + 2.$$

故答案为: $y = (x + 1)^2 + 2$.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将抛物线 $y = a(x-m)^2 + k$ 先向左平移 3 个单位, 再向上平移 4 个单位, 所得到的新抛物线的对称轴方程是 $x = -1$, 那么原抛物线的顶点的横坐标是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数的性质，根据“上加下减，左加右减”的原则求得新抛物线的解析式为 $y = a(x - m + 3)^2 + k + 4$ ，即可得出 $m - 3 = -1$ ，解得 $m = 2$ ，从而求顶点的横坐标为 2.

【详解】 解：根据“上加下减，左加右减”的原则将抛物线 $y = a(x - m)^2 + k$ 先向左平移 3 个单位，再向上平移 4 个单位，得到的新抛物线的解析式为 $y = a(x - m + 3)^2 + k + 4$ ，

$\therefore$ 所得到的新抛物线的对称轴是直线 $x = -1$ ，

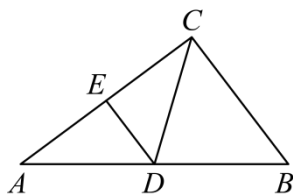
$\therefore m - 3 = -1$ ，

$\therefore m = 2$ ，

$\therefore$ 抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ 的顶点的横坐标为 2.

故答案为：2.

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，如果 D 、 E 分别是边 AB ， AC 的中点， $BC = 4$ ， $\triangle ADE$ 的面积是 5，那么 $\angle ACD$ 的正切值是_____.



【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】 本题考查了三角形中位线的性质与判定，求正切；根据三角形中位线定理得出 DE 的长，再结合 $\triangle ADE$ 的面积得出 AE 的长，进而得出 AC 的长，最后将 $\angle ACD$ 转化为 $\angle A$ 即可解决问题.

【详解】 解： $\because D$ 、 E 分别是边 AB ， AC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$.

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore \angle AED = 90^\circ$ ， $DE = 2$ ，

$\therefore DE$ 垂直平分 AC ，

$\therefore DA = DC$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle A.$$

$\because \triangle ADE$ 的面积是 5,

$$\therefore \frac{1}{2} AE \cdot 2 = 5,$$

则 $AE = 5$,

$$\therefore AC = 2AE = 10.$$

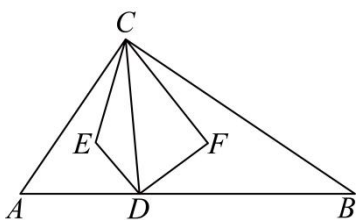
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \tan A = \frac{2}{5}.$$

故答案为: $\frac{2}{5}$.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\tan B = \frac{3}{4}$, $AC = 6$, D 是斜边 AB 上任意一点, 点 E 、 F 分别是 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCD$ 的重心, 那么四边形 $CEDF$ 的面积是 ____.



【答案】8

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形, 三角形的重心, 先求出 BC 的长, 进而得出 $\triangle ABC$ 的面积, 再分别连接 AE, BF 并延长, 根据重心的性质得出它们与 CD 的交点为同一点, 最后得出 $\triangle CDE$ 及 $\triangle CDF$ 的面积分别为 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 面积的 $\frac{1}{3}$ 即可解决问题.

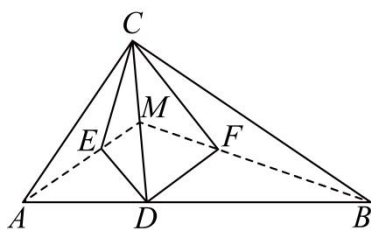
【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$, $AC = 6$.

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = 24.$$

连接 AE, BF 并延长, 分别交 CD 于点 M, N ,



$\because E, F$ 分别为 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 的重心,

$\therefore$ 点 M 为 CD 中点, 点 N 为 CD 中点,

$\therefore M, N$ 重合.

$\because$ 点 E 为 $\triangle ACD$ 的重心,

$\therefore AE = 2EM$,

$\therefore S_{\triangle ADE} = 2S_{\triangle DEM}, S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle CEM},$

$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ACD}.$

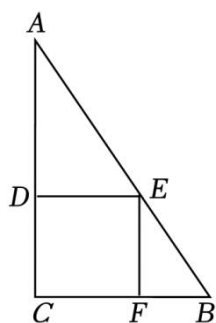
同理可得, $S_{\triangle CDF} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD},$

$\therefore S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CDF} = \frac{1}{3}(S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}) = \frac{1}{3} \times 24 = 8,$

即四边形 $CEDF$ 的面积为 8.

故答案为: 8.

16. 在数学活动课上, 需要用三角形纸片裁剪出一张正方形纸片. 如图, 现有三角形纸片 (ABC), $AC = 40\text{cm}$, $BC = 30\text{cm}$. 裁剪出的正方形 $CDEF$ 的一个顶点是直角顶点 C , 那么正方形的边长是 _____ cm .



【答案】 $\frac{120}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质: 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用; 也考查了正方形的性质.

设正方形 $CDEF$ 的边长为 $x\text{cm}$, 则 $CD = DE = x\text{cm}$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 则利用相似三角形的性质得

到 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，即 $\frac{40-x}{40} = \frac{x}{30}$ ，然后解方程即可得到答案．灵活运用相似三角形的性质计算相应线段的长或表示线段之间的关系是解决问题的关键．

【详解】解：设正方形 $CDEF$ 的边长为 $x\text{cm}$ ，则 $CD = DE = x\text{cm}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore DE \parallel CF$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle C$ ，

$\because \angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ，即 $\frac{40-x}{40} = \frac{x}{30}$ ，

解得 $x = \frac{120}{7}$ ，

即正方形的边长为 $\frac{120}{7}\text{cm}$ ．

故答案为： $\frac{120}{7}$ ．

17. 一个二次函数的图象经过点 $(t, 0)$ ，则称 t 的值是这个函数的“零点”．例如：二次函数

$y = a(x-3)(x+2)$ ($a \neq 0$)，无论 a 取何值 $(3, 0)$ 和点 $(-2, 0)$ ，所以 3 和 -2 是这个函数的“零点”．如果一个二次函数有且只有一个“零点” -1 ，那么这个二次函数的解析式可以是_____．（写出一个符合要求的函数解析式即可）

【答案】 $y = (x+1)^2$ ，答案不唯一

【解析】

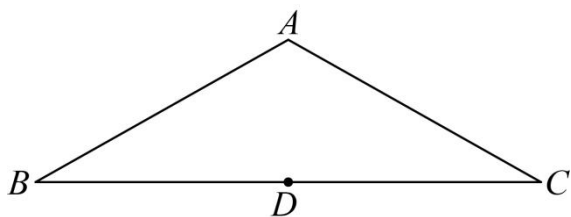
【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征．根据“零点”的定义可知二次函数的图象经过一个点 $(-1, 0)$ ，据此写出一个函数的解析式即可．

【详解】解： $\because$ 一个二次函数有且只有一个“零点” -1 ，

$\therefore$ 这个二次函数的解析式可以是 $y = (x+1)^2$ ，答案不唯一．

故答案为： $y = (x+1)^2$ ，答案不唯一．

18. 如图，已知 ABC ， $AB = AC = 4$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， D 是边 BC 的中点，线段 AB 绕点 D 顺时针旋转得到对应线段 $A'B'$ ，线段 $A'B'$ 与 AC, BC 分别交于点 E, F ，如果 $\triangle EFC$ 是直角三角形，那么 AE 的长是_____．

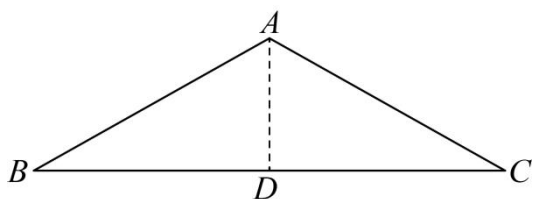


【答案】 $\sqrt{3}+1$ 或 2

【解析】

【分析】由三线合一可得 $AD \perp BC$ ，进而求出各边长，然后根据 $\triangle EFC$ 是直角三角形分类讨论，当 $\angle FEC = 90^\circ$ 时或 $\angle EFC = 90^\circ$ 时，画出图形，利用特殊角求解即可。

【详解】解：连接 AD ，



$\because AB = AC = 4$ ， D 是 BC 中点，

$\therefore AD \perp BC$ ，即 $\angle ADB = 90^\circ$ ，

$\because \angle B = \angle C = 30^\circ$ ，

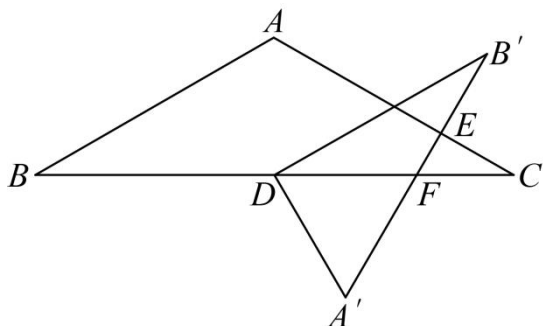
$\therefore \angle BAD = 60^\circ$ ， $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ ， $BD = CD = AB \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ ，

$\because$ 线段 AB 绕点 D 顺时针旋转得到对应线段 $A'B'$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle A' = 60^\circ$ ， $\angle B = \angle B' = 30^\circ$ ， $BD = B'D = 2\sqrt{3}$ ，

①当 $\angle FEC = 90^\circ$ 时，



$\because \angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle EFC = 60^\circ = \angle DFA'$ ，

$\therefore \triangle A'DF$ 是等边三角形,

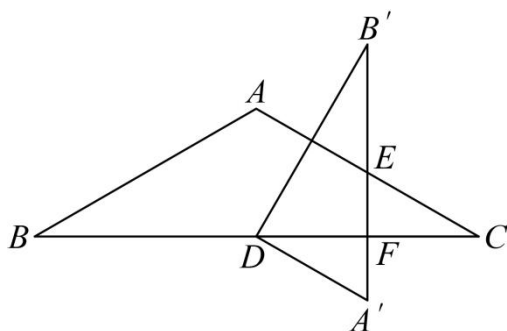
$$\therefore DF = A'D = 2,$$

$$\therefore CF = CD - DF = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore CE = CF \cdot \cos 30^\circ = (2\sqrt{3} - 2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore AE = AC - CE = 4 - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1;$$

②当 $\angle EFC = 90^\circ$ 时,



此时 $\angle A'FD = 90^\circ$, $\angle A' = 60^\circ$, $\angle A'DF = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle A'FD$ 中, $A'D = 2$,

$$\therefore DF = A'D \cdot \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore CF = CD - FD = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中, $\angle C = 30^\circ$,

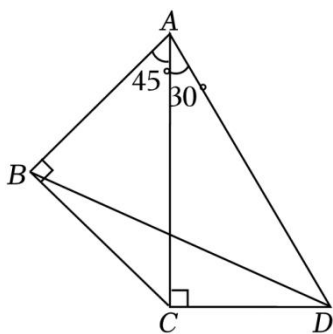
$$\therefore CE = \frac{CF}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

$$\therefore AE = AB - CE = 2.$$

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 旋转的性质, 解直角三角形的计算, 掌握等腰三角形的性质, 解直角三角形的计算, 数形结合分析, 分类讨论思想是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 一副三角尺由两块直角三角尺组成, 其中一块是含 30° 角的直角三角形, 另一块是含 45° 角的直角三角形. 用这两块三角尺可以拼成一个四边形 $ABCD$ (如图), 设 $AB = a$.



(1) 用含 a 的代数式直接表示: $AD =$ _____.

(2) 求 $\angle BDC$ 的正切值.

【答案】 (1) $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$

(2) $2\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形、等腰直角三角形的判定与性质，熟知三角函数的定义及等腰直角三角形的性质是解题的关键.

(1) 先用 a 表示出 AC 的长，再进一步表示出 AD 长即可；

(2) 过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 M ，用 a 分别表示出 BM 及 CM 的长，再结合 CD 的长及正切的定义即可解决问题.

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = a$ ， 则 $\cos\angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore AC = \sqrt{2}a$ ，

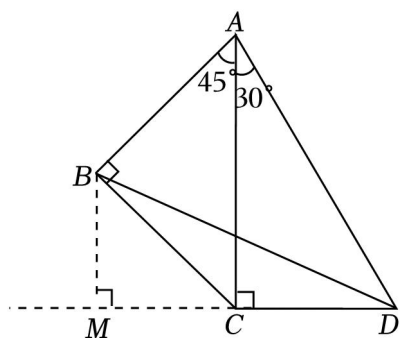
在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC = \sqrt{2}a$ ， 则 $\cos\angle CAD = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ ；

【小问 2 详解】

解： 过点 B 作 CD 的垂线，垂足为 M ， 如图所示：



$\because AB = a$, 且 ABC 是等腰直角三角形,

$$\therefore BC = AB = a .$$

$$\because \angle BCA = 45^\circ, \angle ACD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCM = 45^\circ ,$$

$\therefore \triangle BCM$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore BM = CM = \frac{\sqrt{2}}{2} a .$$

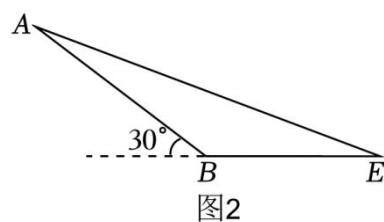
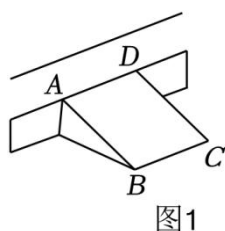
$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} ,$$

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = \frac{\sqrt{6}}{3} a ,$$

$$\therefore DM = CM + CD = \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{6}}{3} a .$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDM \text{ 中, } \tan \angle BDC = \frac{BM}{DM} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{6}}{3} a} = 2\sqrt{3} - 3 .$$

20. 为了方便居民出入小区, 小区业委会决定对大门口的一段斜坡进行改造. 原坡面是矩形 $ABCD$ (如图 1), $AB = 4$ 米, 斜坡 AB 的坡角为 30° . 计划将斜坡 AB 改造成坡比为 1:2.5 的斜坡 AE (如图 2 所示), 坡面的宽度 AD 不变.



(1) 求改造后斜面底部延伸出来的部分 (BE) 的长度;

(2) 改建这条斜坡需要多少立方米的混凝土材料?

【答案】(1) 改造后斜面底部延伸出来的部分 (BE) 的长度为 $(5-2\sqrt{3})$ 米

(2) 改建这条斜坡需要 $(10-4\sqrt{3})$ 立方米的混凝土材料

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，数形结合，正确地作出辅助线利用三角函数定义求解是解题的关键.

(1) 过 A 作 $AH \perp EB$ 交 EB 的延长线于 H ，根据直角三角形的性质得到 $AH = \frac{1}{2}AB = 2$ (米)，

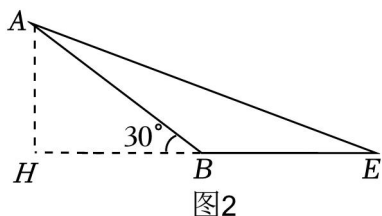
$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2\sqrt{3}$ (米)，由 $\frac{AH}{EH} = \frac{1}{2.5}$ ，得到 $EH = 2.5AH = 2.5 \times 2 = 5$ (米)，于是得到

$$BE = EH - BH = (5 - 2\sqrt{3}) \text{ 米};$$

(2) 根据三角形的面积公式得到 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}BE \cdot AH = \frac{1}{2} \times (5 - 2\sqrt{3}) \times 2 = (5 - 2\sqrt{3})$ 平方米，于是得到结论.

【小问 1 详解】

解：过 A 作 $AH \perp EB$ 交 EB 的延长线于 H ，如图所示：



$$\because \angle ABH = 30^\circ, AB = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AB = 2 \text{ (米)}, BH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 2\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEH \text{ 中}, \frac{AH}{EH} = \frac{1}{2.5},$$

$$\therefore EH = 2.5AH = 2.5 \times 2 = 5 \text{ (米)},$$

$$\therefore BE = EH - BH = (5 - 2\sqrt{3}) \text{ 米},$$

答：改造后斜面底部延伸出来的部分 (BE) 的长度为 $(5-2\sqrt{3})$ 米；

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}BE \cdot AH = \frac{1}{2} \times (5 - 2\sqrt{3}) \times 2 = (5 - 2\sqrt{3}) \text{ 平方米},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} \times AD = (5 - 2\sqrt{3}) \times 2 = (10 - 4\sqrt{3}) \text{ 立方米},$$

答：改建这条斜坡需要 $(10 - 4\sqrt{3})$ 立方米的混凝土材料。

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-1, n)$ ， $B(5, n)$ 是抛物线 $y = a(x - m)^2 + k$ ($a > 0$) 上的两点。

(1) $m =$ _____;

(2) 如果该抛物线与 x 轴交于点 C 、 D (点 C 在点 D 的右侧)，且 $CD = 4$ ，四边形 $ABCD$ 的面积是 25，求这个抛物线的表达式

【答案】 (1) 2 (2) $y = (x - 2)^2 - 4$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的图象及性质，待定系数法求函数解析式。

(1) 结合抛物线的对称性可得 $m = \frac{-1+5}{2} = 2$ 。

(2) 根据题意合抛物线的对称性可得 $D(0, 0)$ ， $C(4, 0)$ ，由已知条件可得 $n > 0$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB = 6$ ，进而根据四边形 $ABCD$ 的面积是 25 得到 $\frac{1}{2} \times (6 + 4) \times n = 25$ ，求得 $n = 5$ ，即 $A(-1, 5)$ ， $B(5, 5)$ ，再利用待定系数法求二次函数解析式即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = a(x - m)^2 + k$ 的对称轴为 $x = m$ ，

且抛物线上的点 $A(-1, n)$ ， $B(5, n)$ 关于对称轴对称，

$$\therefore m = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

故答案为：2。

【小问 2 详解】

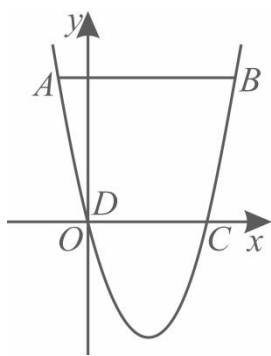
解：由 (1) 得，抛物线的解析式为 $y = a(x - 2)^2 + k$ ，对称轴为直线 $x = 2$ ，

$\because$ 该抛物线与 x 轴交于点 C 、 D ，

$\therefore$ 点 C ， D 关于直线 $x = 2$ 对称，

$\because CD = 4$ ，

$\therefore D(0, 0)$ ， $C(4, 0)$ 。



$$\therefore A(-1, n), B(5, n),$$

$$\therefore n > 0, AB \parallel CD, AB = 5 - (-1) = 6.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot y_A$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times (6 + 4) \times n = 25,$$

解得 $n = 5$,

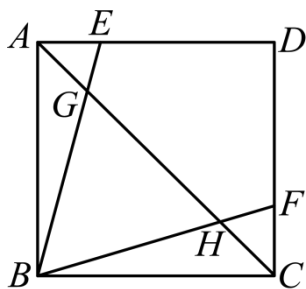
$$\therefore A(-1, 5), B(5, 5).$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = a(x - 2)^2 + k \text{ 过点 } A(-1, 5), D(0, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} (-1-2)^2 a + k = 5 \\ (0-2)^2 a + k = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ k = -4 \end{cases},$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为 } y = (x - 2)^2 - 4.$$

22. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长是 3, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上, $\angle EBF = 45^\circ$, BE 、 BF 分别与对角线 AC 交于点 G 、 H .



(1) 当 $\angle ABE =$ _____ $^\circ$ 时, $AG = CH$, 先补全条件;

(2) 如果 $CH = \sqrt{2}$, 求 BG 的长.

【答案】 (1) 22.5; 理由见解答过程;

$$(2) \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

【解析】

【分析】(1) 补充的条件是 $\angle ABE = 22.5^\circ$ ，先证明 $\angle ABE = \angle CBF = 22.5^\circ$ ，进而依据“ASA”判定 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CBH$ 全等即可得出 $AG = CH$ ；

(2) 连接 GF ，证明 $\triangle BHG$ 和 $\triangle CHF$ 相似得 $\frac{BH}{CH} = \frac{GH}{FH}$ ， $\angle BGH = \angle CFH$ ，则 $\frac{BH}{GH} = \frac{CH}{FH}$ ，再根据 $\angle BHC = \angle GHF$ 得 $\triangle BHC$ 和 $\triangle GHF$ 相似，则 $\angle CBH = \angle FGH$ ，由此得

$\angle BGH + \angle FGH = \angle CFH + \angle CBH = 90^\circ$ ，则 $\triangle BGF$ 是等腰直角三角形，由勾股定理得 $BG = \frac{\sqrt{2}}{2}BF$ ，

然后求出 $AC = 3\sqrt{2}$ ， $AH = 2\sqrt{2}$ ，证明 $\triangle CHF$ 和 $\triangle AHB$ 相似得 $CF = \frac{3}{2}$ ，则 $BF = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，由此可得 BG

的长.

【小问 1 详解】

解：当 $\angle ABE = 22.5^\circ$ 时， $AG = CH$ ，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，且边长为 3，

$\therefore AB = BC = 3$ ， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$ ， $\angle ABE = 22.5^\circ$ ，

$\therefore \angle CBH = \angle ABC - \angle EBF - \angle ABE = 22.5^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle CBF = 22.5^\circ$ ，

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CBH$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAG = \angle BCH = 45^\circ \\ AB = BC \\ \angle ABE = \angle CBF \end{cases},$$

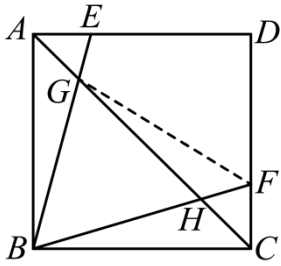
$\therefore \triangle ABG \cong \triangle CBH$ (ASA)，

$\therefore AG = CH$ ；

故答案为：22.5；

【小问 2 详解】

解：连接 GF ，如图所示：



$$\because \angle EBF = \angle ACD = 45^\circ, \quad \angle BHG = \angle CHF,$$

$$\therefore \triangle BHG \sim \triangle CHF,$$

$$\therefore \frac{BH}{CH} = \frac{GH}{FH}, \quad \angle BGH = \angle CFH,$$

$$\therefore \frac{BH}{GH} = \frac{CH}{FH},$$

$$\text{又} \because \angle BHC = \angle GHF,$$

$$\therefore \triangle BHC \sim \triangle GHF,$$

$$\therefore \angle CBH = \angle FGH,$$

$$\therefore \angle BGH + \angle FGH = \angle CFH + \angle CBH,$$

$$\because \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBH + \angle CFH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGH + \angle FGH = 90^\circ,$$

$$\text{即} \angle BGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BGF \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore BG = FG,$$

$$\text{由勾股定理得: } BF = \sqrt{2}BG,$$

$$\therefore BG = \frac{\sqrt{2}}{2}BF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AB = BC = 3,$$

$$\text{由勾股定理得: } AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore CH = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = AC - CH = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle CHF \sim \triangle AHB,$$

$$\therefore \frac{CF}{AB} = \frac{CH}{AH},$$

$$\therefore \frac{CF}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore CF = \frac{3}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中，由勾股定理得： $BF = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$

$$\therefore BG = \frac{\sqrt{2}}{2}BF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

【点睛】 本题考查的是正方形的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理的应用，二次根式的运算，相似三角形的判定与性质，作出合适的辅助线是解本题的关键.

23. 学完“相似三角形”之后，小明和同学尝试探索相似四边形的判定与性质，以下是他们的思考

【定义】 如果两个四边形的四个角对应相等，四条边对应成比例，那么这两个四边形相似. 两个相似四边形的对应边的比等于相似比.

【思考】 类比相似三角形，对相似四边形的判定与性质提出了许多猜测，如：

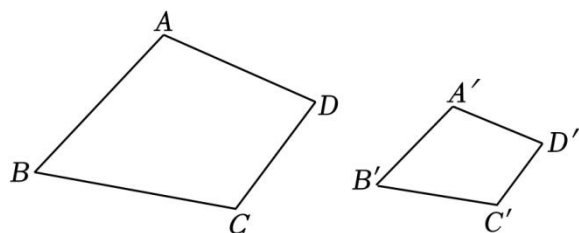
- ①四条边对应成比例，且有一组角对应相等的两个四边形相似；
- ②四个角对应相等，且有两条相邻的边对应成比例的两个四边形相似；
- ③相似四边形的面积的比等于相似比的平方.

.....

【探究】 请完成上述猜测中第③个结论的证明.

已知：如图，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，点 A 、 B 、 C 、 D 分别与点 A' 、 B' 、 C' 、 D' 对应

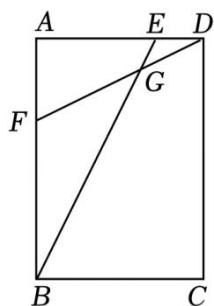
求证： $\frac{S_{\text{四边形}ABCD}}{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}} = k^2.$



证明：

【运用】 同学们通过讨论，证明了上述猜测都是正确的. 试运用这些结论，解决问题：如图， E 、 F 分别

是边 AD 、 AB 上的点, $AE = \frac{1}{2}AB$, $AF = \frac{1}{2}AD$, 试求 $\frac{S_{\text{四边形}AEGF}}{S_{\text{四边形}CDGB}}$ 的值.



【答案】探究：证明见解析；运用： $\frac{1}{4}$

【解析】

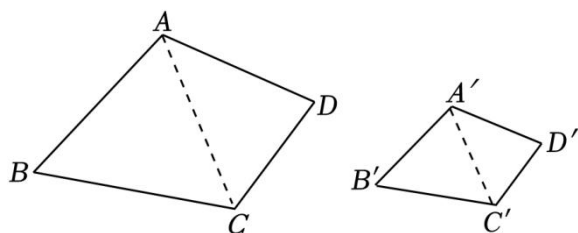
【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，相似多边形的性质，矩形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质，相似多边形的性质是解题的关键.

【探究】连接 AC , $A'C'$, 证明 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, 得出 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = k^2$,

$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle A'C'D'}} = \left(\frac{AD}{A'D'}\right)^2 = k^2$, 则可得出答案；【运用】由矩形的性质得出

$AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = CD$, $AD = BC$, 证出 $\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{BC} = \frac{1}{2}$, 由结论“四个角对应相等，且两条相邻的边对应成比例的两个四边形相似”证明四边形 $AEGF \sim$ 四边形 $CDGB$, 则可得出答案.

【详解】【探究】证明：连接 AC , $A'C'$, 如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似,

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}, \quad \angle D = \angle D', \quad \angle B = \angle B',$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C', \triangle ACD \sim \triangle A'C'D',$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = k^2, \quad \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle A'C'D'}} = \left(\frac{AD}{A'D'}\right)^2 = k^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}ABCD}}{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}} = \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle A'B'C'} + S_{\triangle A'C'D'}} = k^2;$$

【运用】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = CD$, $AD = BC$,

∴ $\angle AFG = \angle GDC$, $\angle AEG = \angle CBG$,

∴ $AE = \frac{1}{2}AB$, $AF = \frac{1}{2}AD$,

∴ $AE = \frac{1}{2}CD$, $AF = \frac{1}{2}BC$,

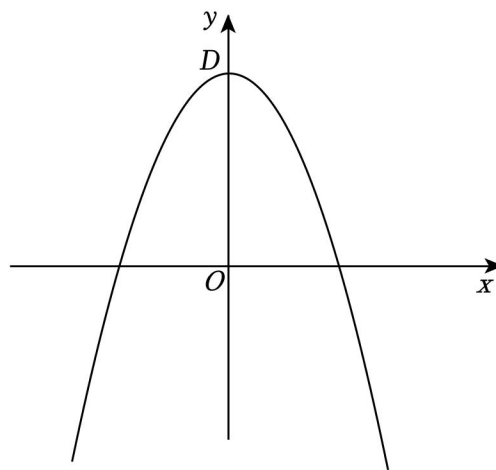
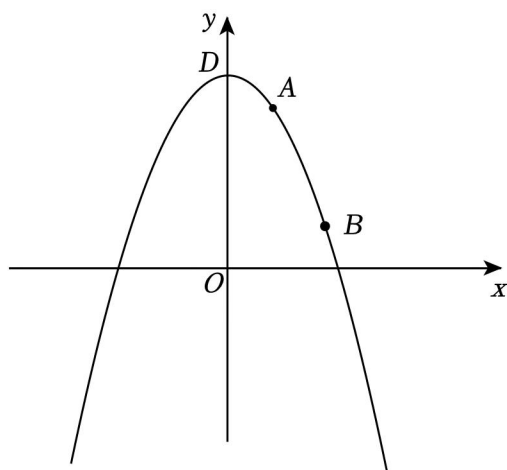
∴ $\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{BC} = \frac{1}{2}$,

∴ $\angle FGE = \angle BGD$,

∴ 四边形 $AEGF \sim$ 四边形 $CDGB$,

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}AEGF}}{S_{\text{四边形}CDGB}} = \left(\frac{AE}{CD} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = ax^2 + 4$ 的顶点为 D ，点 A 、 B 在抛物线上，且都在 y 轴右侧，横坐标分别是 m , $m+1$.



备用图

(1) 连接 AD 、 BD ，求 $\cot \angle ODA - \cot \angle ODB$ 的值 (结果用含 a 的代数式表示);

(2) 如果 y 轴上存在点 C ，使得 $AC \perp BC$ ，且 $AC = BC$ ，

①求抛物线的表达式;

②若 $AB = \sqrt{10}$ ，点 E 在 y 轴上，且 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求点 E 的坐标

【答案】(1) a (2) ① $y = -x^2 + 4$; ② $E(0, 3)$ 或 $(0, 2)$

【解析】

【分析】(1) 由 $\cot\angle ODA - \cot\angle ODB = \frac{y_D - y_A}{x_A} - \frac{y_D - y_B}{x_B}$, 即可求解;

(2) ①证明 $\triangle CMA \cong \triangle BNC$ (AAS), 得到 $MA = CN$, $CM = BN$, 即可求解;

②证明 $\triangle BAC$ 为等腰直角三角形, 且 ADE 与 ABC 相似, 则 ADE 为等腰直角三角形, 进而求解.

【小问 1 详解】

解: 设点 A 、 B 的坐标分别为: $(m, am^2 + 4)$, $(m+1, a(m+1)^2 + 4)$,

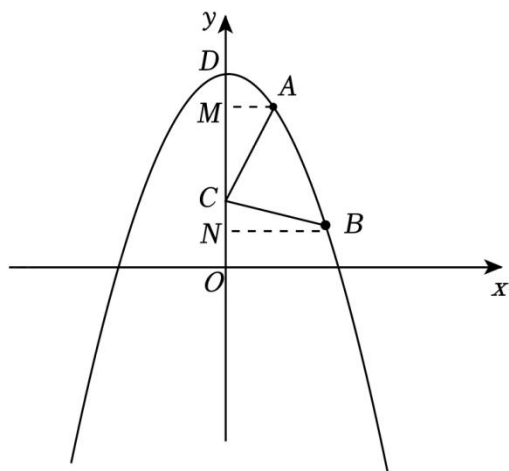
由抛物线的表达式知, 点 $D(0, 4)$,

$$\text{则 } \cot\angle ODA - \cot\angle ODB = \frac{y_D - y_A}{x_A} - \frac{y_D - y_B}{x_B} = \frac{4 - am^2 - 4}{m} - \frac{4 - a(m+1)^2 - 4}{(m+1)} = a;$$

【小问 2 详解】

解: ① $AC \perp BC$, 且 $AC = BC$, 则 ABC 为等腰直角三角形, 设点 $C(0, y)$,

过点 A 、 B 分别作 y 轴的垂线, 垂足分别为点 M 、 N ,



$$\therefore \angle MCA + \angle BCN = 90^\circ, \quad \angle BCN + \angle NCB = 90^\circ,$$

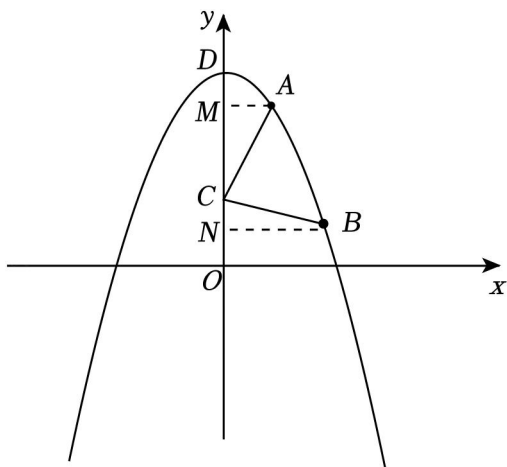
$$\therefore \angle MAC = \angle NCB,$$

$$\therefore \angle CMA = \angle BNC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CMA \cong \triangle BNC \text{ (AAS)},$$

则 $MA = CN$, $CM = BN$,

$$\text{即 } m = y - [a(m+1)^2 + 4] \text{ 且 } m+1 = am^2 + 4 - y,$$



整理得: $2m+1=a(2m+1)\times(-1)$, 则 $a=-1$,

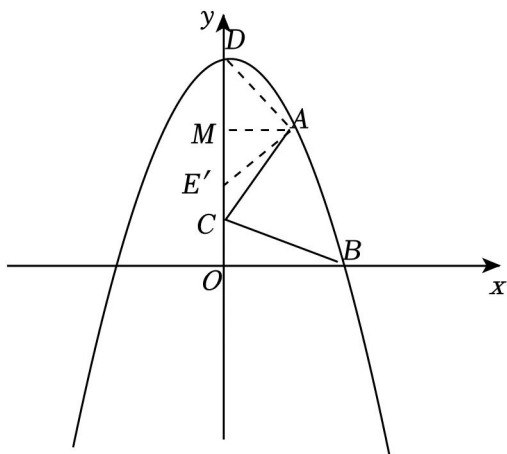
故抛物线的表达式为: $y=-x^2+4$;

②由点 A 、 B 的坐标得: $(m+1-m)^2+\left[-(m+1)^2+4-m^2-4\right]^2=10$,

解得: $m=1$,

则点 A 、 B 的坐标分别为: $(1,3)$ 、 $(2,0)$,

由 $m=y-\left[a(m+1)^2+4\right]$ 得: $y=1$, 即点 $C(0,1)$;



$\because AC \perp BC$, 且 $AC=BC$,

则 $\triangle BAC$ 为等腰直角三角形,

$\because ADE$ 与 ABC 相似, 则 ADE 为等腰直角三角形,

过点 A 作 $AM \perp y$ 轴于点 M , 则点 $M(0,3)$,

则 $MD=4-3=1=AM$,

故当点 E 和点 M 重合时, 即点 $E(0,3)$, 符合题意;

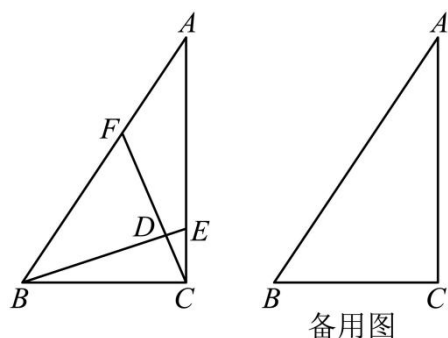
如图，取 $ME' = 1$ ，则 $\triangle ADE'$ 为等腰直角三角形，

即点 $E'(0, 2)$ 符合题意，

综上， $E(0, 3)$ 或 $(0, 2)$ 。

【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用，涉及到三角形全等和相似，解直角三角形，求抛物线解析式等知识点，数据处理是解题的关键。

25. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 2$ ，点 E 、 F 分别在边 AC 、 AB 上（不与端点重合）， $BE \perp CF$ ，垂足为点 D 。



- (1) 当 $CE = 1$ 时，求 AF 的长；
- (2) 当 $BE = CF$ 时，求 $\tan \angle CBE$ 值；
- (3) 连接 EF ，如果 $\triangle AEF$ 是直角三角形，求这时四边形 $BCEF$ 的面积。

【答案】 (1) $\frac{3\sqrt{13}}{7}$ ；

(2) $\frac{1}{3}$ ；

(3) $\frac{44\sqrt{10}-80}{27}$ 或 $\frac{4\sqrt{13}-8}{3}$ 。

【解析】

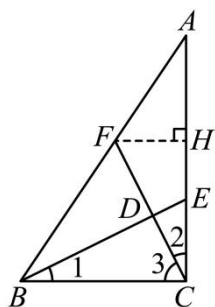
【分析】 (1) 过 F 作 $FH \perp AC$ ，垂足为点 H ，利用等角的三角函数值相等可得 $\frac{FH}{CH} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2}$ ，
 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{FH}{AH}$ ，设 $FH = 2x$ ，则 $AH = 3x$ ，可得 $CH = 4x$ ，所以 $AC = AH + CH = 7x = 3$ ，
 求出 x 值，再利用勾股定理求出 AF 即可；

(2) 同 (1) 思路，证 $\triangle FHC \cong \triangle ECB$ (AAS)，即可得解；

(3) 分两种情况讨论， $\angle AEF$ 为直角或 $\angle AFE$ 为直角，然后利用相似三角形得出比例线段，设参建立方程求解即可。

【小问 1 详解】

解：过 F 作 $FH \perp AC$ ，垂足为点 H ，



$$\because BE \perp CF,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ, \quad \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \tan \angle 1 = \tan \angle 2, \quad \text{即} \quad \frac{FH}{CH} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{FH}{AH},$$

设 $FH = 2x$ ，则 $AH = 3x$ ，

$$AF = \sqrt{AH^2 + FH^2} = \sqrt{13}x,$$

$$CH = 4x,$$

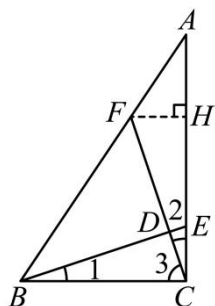
$$\therefore AC = AH + CH = 3x + 4x = 3,$$

$$\therefore x = \frac{3}{7},$$

$$\therefore AF = \sqrt{13}x = \frac{3\sqrt{13}}{7};$$

【小问 2 详解】

解：过 F 作 $FH \perp AC$ ，垂足为点 H ，



由 (1) 知， $\angle 1 = \angle 2$ ，

$$\therefore \angle ECB = \angle FHC = 90^\circ, \quad CF = BE,$$

$$\therefore \triangle FHC \cong \triangle ECB (\text{AAS}),$$

$$\therefore BC = CH = 2, \quad FH = CE,$$

$$\therefore AH = AC - CH = 1,$$

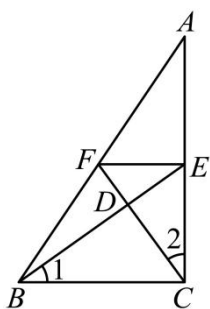
$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} = \frac{FH}{AH},$$

$$\therefore FH = \frac{2}{3} = CE,$$

$$\therefore \tan \angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{3};$$

【小问 3 详解】

解：①当 $\angle AEF = 90^\circ$ 时，如图，



此时 $FE \parallel BC$,

$$\therefore \tan A = \frac{FE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{设 } EF = 2x, \text{ 则 } AE = 3x,$$

$$\therefore EC = 3 - 3x,$$

$$\therefore 3 - 3x > 0,$$

$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \quad \angle BCE = \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CBE \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{EC}{EF} = \frac{CB}{EC}, \text{ 即 } \frac{3-3x}{2x} = \frac{2}{3-3x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{11 \pm 2\sqrt{10}}{9},$$

$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore x = \frac{11 - 2\sqrt{10}}{9},$$

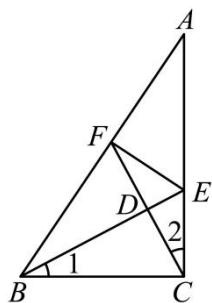
$$\therefore S_{\text{四边形}BCEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AFE},$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2x \cdot 3x$$

$$= 3 - 3x^2$$

$$= \frac{44\sqrt{10} - 80}{27};$$

②当 $\angle AFE = 90^\circ$ 时, 如图,



$$\because \angle 1 = \angle 2, \angle BDC = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle EDC \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{ED}{CD}, \text{ 即 } CD^2 = BD \cdot DE,$$

$$\text{同理 } \triangle DEF \sim \triangle DFB, \text{ 得 } DF^2 = DE \cdot DB,$$

$$\therefore CD^2 = DF^2, \text{ 即 } CD = DF,$$

$$\text{又 } \because BE \perp CF,$$

$$\therefore EF = EC,$$

$$\because \tan A = \frac{FE}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{设 } EF = 2x = CE, \text{ 则 } AF = 3x,$$

$$\therefore AE = \sqrt{13}x,$$

$$\therefore AC = AE + CE = (\sqrt{13} + 2)x = 3,$$

$$\text{解得 } x = \frac{\sqrt{13} - 2}{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BCEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AFE}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2x \cdot 3x$$

$$= 3 - 3x^2$$

$$= \frac{4\sqrt{13}-8}{3};$$

综上，四边形 $BCEF$ 的面积为 $\frac{44\sqrt{10}-80}{27}$ 或 $\frac{4\sqrt{13}-8}{3}$.

【点睛】 本题考查的是勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，一元二次方程的解法，作出合适的辅助线是解本题的关键.