

2024 学年第一学期九年级质量调研

数学样卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列 y 关于 x 的函数中, 一定是二次函数的是 ()

A. $y = ax^2 + bx + c$

B. $y = (x-5)^2 - x^2$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = \frac{2}{x^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的识别, 根据形如 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 这样的函数叫做二次函数, 进行判断即可.

【详解】解: A、当 $a = 0$ 时, $y = ax^2 + bx + c$ 不是二次函数, 不符合题意;

B、 $y = (x-5)^2 - x^2 = -10x + 25$, 不是二次函数, 不符合题意;

C、 $y = x^2 + 1$, 是二次函数, 符合题意;

D、 $y = \frac{2}{x^2}$, 不是二次函数, 不符合题意;

故选 C.

2. 抛物线 $y = x^2 + x$ 一定经过点 ()

A. $(1, 0)$

B. $(-1, 0)$

C. $(2, 4)$

D. $(-2, -4)$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题二次函数图象上的点的特征，根据图象上的点的横纵坐标满足函数解析式，进行判断即可.

【详解】 解：A、当 $x=1$ 时， $y=1^2+1=2$ ，故函数图象不经过点 $(1,0)$ ；

B、当 $x=-1$ 时， $y=(-1)^2-1=0$ ，故函数图象经过点 $(-1,0)$ ；

C、当 $x=2$ 时， $y=2^2+2=6$ ，故函数图象不经过点 $(2,4)$ ；

D、当 $x=-2$ 时， $y=(-2)^2-2=2$ ，故函数图象不经过点 $(-2,-4)$ ；

故选 B

3. 下列两个三角形一定相似的是 ()

A. 两个直角三角形

B. 有一个内角为 40° 的两个直角三角形

C. 两个等腰三角形

D. 有一个内角是 40° 的两个等腰三角形

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定，根据相似三角形的判定方法，逐一进行判断即可.

【详解】 解：A、两个直角三角形不一定相似，不符合题意；

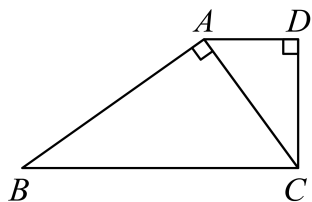
B、根据两角相等的两个三角形相似，可以得到有一个内角为 40° 的两个直角三角形一定相似，符合题意；

C、两个等腰三角形不一定相似，不符合题意；

D、有一个内角是 40° 的两个等腰三角形不一定相似，比如一个 40° 的角是顶角，一个 40° 的角为底角，不符合题意；

故选 B.

4. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，如果对角线 $AC \perp AB$ ，那么 $\frac{CD}{AC}$ 的值是 ()



A. $\sin B$

B. $\cos B$

C. $\tan B$

D. $\cot B$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了三角函数的比值关系，平行线的性质，熟练掌握角三角函数的比值关系是解题的关键. 利用角的等量代换和三角函数的比值关系求解即可.

【详解】解： $\because \angle D = 90^\circ$ ，

$$\therefore \cos \angle ACD = \frac{CD}{AC},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DCB = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp AB,$$

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle B + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD,$$

$$\therefore \cos \angle ACD = \frac{CD}{AC} = \cos B,$$

故选：B.

5. 下列命题正确的是 ()

A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都是单位向量，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

C. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

D. 如果 $\vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查命题与定理，平面向量，解答本题的关键是掌握平面向量的基本概念和性质.

由平面向量的基本概念和性质，即可判断.

【详解】解：A、两向量的模相等，方向不一定相同，故A选项不符合题意；

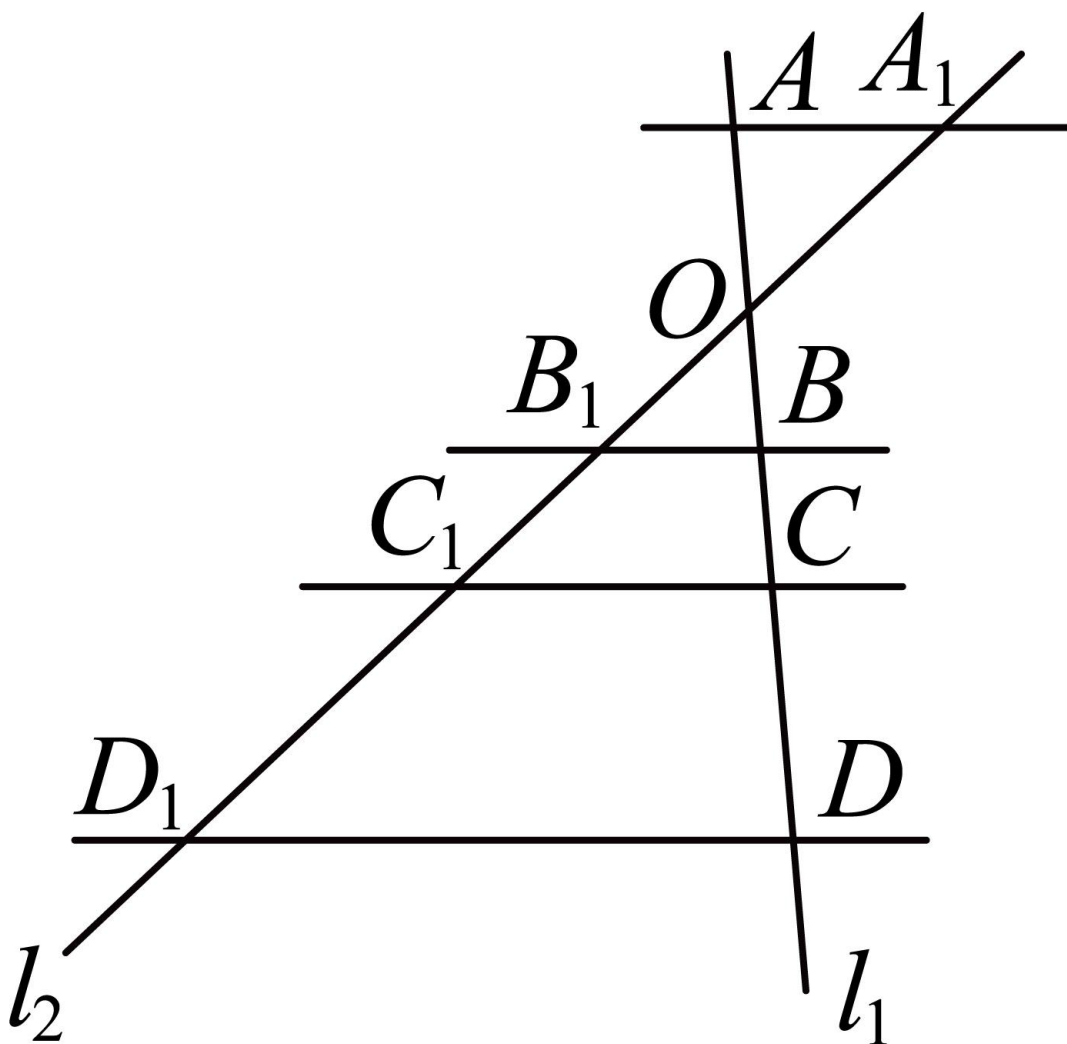
B、两单位向量的方向可能不同，故B选项不符合题意；

C、 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，故C选项不符合题意；

D、如果 $\vec{a} = k\vec{b} (k \neq 0)$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，正确，故D选项符合题意；

故选：D.

6. 如图，两条不平行的直线 l_1 与直线 l_2 相交于点 O ，四条平行线分别交直线 l_1 于点 A 、 B 、 C 、 D ，分别交直线 l_2 于点 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 ，则有 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. 如果 $AO = 3$ ， $OB_1 = B_1C_1 = 2$ ， $C_1D_1 = 4$ ，那么在下列结果中，线段之差最大的是 ()



A. $BD - AB$

B. $OC - OA$

C. $OC - CD$

D. $CD - OB$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例，根据平行线分线段成比例，分别求出线段之间的数量关系，逐一计算，比较大小即可.

【详解】 解: $\because A_1O = 3, OB_1 = B_1C_1 = 2, C_1D_1 = 4, AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1,$

$$\therefore \frac{AO}{OB} = \frac{A_1O}{OB_1} = \frac{3}{2}, \frac{OB}{BC} = \frac{OB_1}{B_1C_1} = 1, \frac{BC}{CD} = \frac{B_1C_1}{C_1D_1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AO = \frac{3}{2}OB, BC = OB, CD = 2BC = 2OB,$$

$$\therefore AB = OA + OB = \frac{5}{2}OB, OC = OB + BC = 2OB, BD = BC + CD = 3OB,$$

$$\therefore BD - AB = 3OB - \frac{5}{2}OB = \frac{1}{2}OB, \quad OC - OA = 2OB - \frac{3}{2}OB = \frac{1}{2}OB,$$

$$OC - CD = 0, CD - OB = OB,$$

$$\therefore OB > \frac{1}{2}OB > 0,$$

$\therefore CD - OB$ 的差最大;

故选 D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, 那么 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{4}$ ~~##~~ -0.25

【解析】

【分析】 本题考查了代数式的运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

根据 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ 推出 $x = \frac{3}{4}y$, 再整体代入 $\frac{x-y}{y}$ 运算即可.

【详解】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4},$

$$\therefore x = \frac{3}{4}y,$$

$$\therefore \text{把 } x = \frac{3}{4}y \text{ 代入 } \frac{x-y}{y} \text{ 可得: } \frac{\frac{3}{4}y-y}{y} = \frac{-\frac{1}{4}y}{y} = -\frac{1}{4},$$

故答案为: $-\frac{1}{4}$.

8. 如果抛物线 $y = (2-a)x^2 + x - 1$ 的开口向下, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的性质, 根据抛物线开口向下可得出 $a > 2$, 再结合二次函数的定义即可求出答案.

【详解】 解: 根据题意可知: $2-a < 0$ 且 $2-a \neq 0$,

解得: $a > 2$,

故答案为: $a > 2$

9. 将抛物线 $y = -(x-1)^2$ 向右平移 3 个单位, 得到新抛物线的顶点坐标是_____.

【答案】 $(4,0)$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数图象的平移, 根据平移规则: 左加右减, 上加下减, 进行求解即可.

【详解】 解: 抛物线 $y = -(x-1)^2$ 向右平移 3 个单位, 得到: $y = -(x-1-3)^2 = -(x-4)^2$,

$\therefore$ 新抛物线的顶点坐标是 $(4,0)$;

故答案为: $(4,0)$.

10. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在函数 $y = -x^2 + 2x + 1$ 的图像上, 如果 $x_1 > x_2 > 1$, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=”、“<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查比较二次函数的函数值大小, 根据开口向下的抛物线上的点离对称轴越远, 函数值越小, 进行判断即可.

【详解】 解: $\because y = -x^2 + 2x + 1$,

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = -\frac{2}{-1 \times 2} = 1$,

$\therefore$ 抛物线上的点离对称轴越远, 函数值越小,

$\because x_1 > x_2 > 1$,

$\therefore x_1 - 1 > x_2 - 1$,

$\therefore y_1 < y_2$;

故答案为: <.

11. 已知某二次函数一部分自变量 x 和函数值 y 的对应情况如表所示, 根据表中信息可知这个函数图像的对称轴是直线_____.

x	...	-4	-2	1	2	4	...
y	...	11	-5	1	11	43	...

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题考查根据抛物线的对称性求对称轴，找到表格中函数值相同的两个自变量的值，进行求解即可.

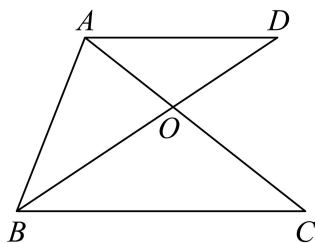
【详解】 解：由表格可知：当 $x = -4$ 和 $x = 2$ 时，函数值相等，

即：点 $(-4, 11)$ 和 $(2, 11)$ 关于对称轴对称，

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{-4 + 2}{2} = -1$ ；

故答案为： $x = -1$.

12. 如图， $AD \parallel BC$ ， AC 、 BD 相交于点 O ，如果 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = 2 : 3$ ，那么 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，先根据同高三三角形的面积之比等于底边长之比得到 $OD : OB = 2 : 3$ ，再证明 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，最后根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方即可得到答案.

【详解】 解： $\because S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} = 2 : 3$ ，

$\therefore OD : OB = 2 : 3$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

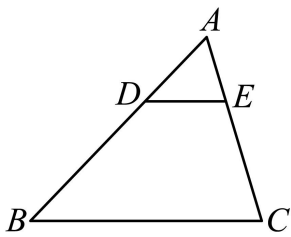
$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

$\therefore S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC} = (OD)^2 : (OB)^2 = 4 : 9 = \frac{4}{9}$ ，

故答案为： $\frac{4}{9}$.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，且 $BD = 2AD$ ， $EC = 2AE$ ，连接 DE ，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，

$\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{DE} =$ _____ . (用含向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，向量的线性运算，三角形法则求出 $\overrightarrow{BC}$ ，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，求出 $\frac{DE}{BC}$ 的值，即可得出结果。

【详解】解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\because BD = 2AD, EC = 2AE,$$

$$\therefore AB = 3AD, AC = 3AE,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a};$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$ 。

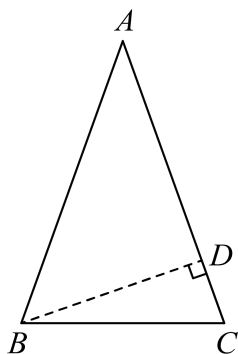
14. 在等腰 ABC 中， $AB = AC$ ， 如果 $AB:BC = 3:2$ ， 那么 $\sin \angle BAC$ 的值是_____。

【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

【解析】

【分析】本题考查求角的正弦值，勾股定理。过点 B 作 $BD \perp AC$ ， 根据 $AB:BC = 3:2$ ， 不妨设 $AB = AC = 3$ ， $BC = 2$ ， 设 $CD = x$ ， 勾股定理列出方程求出 CD 的长， 进而求出 BD 的长， 再根据正弦的定义即可求解。

【详解】解： 过点 B 作 $BD \perp AC$ ， 如图， 设 $CD = x$ ，



$$\therefore AB:BC = 3:2,$$

$\therefore$ 不妨设 $AB = AC = 3$, $BC = 2$, 则: $AD = 3 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中, $BD^2 = AB^2 - AD^2$,

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中, $BD^2 = BC^2 - CD^2$,

$$\therefore AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2, \text{ 即: } 3^2 - (3 - x)^2 = 2^2 - x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{2}{3},$$

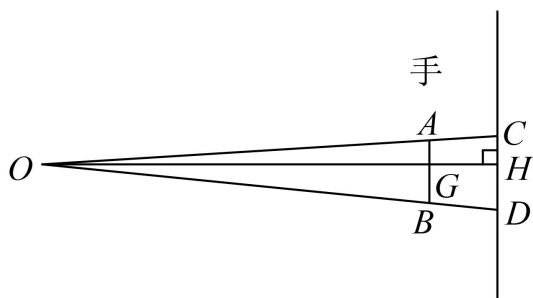
$$\therefore CD = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } \sin \angle BAC = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\text{故答案为: } \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

15. 手影戏是一种独特的艺术形式, 它通过手势和光影创造出生动的形象. 它的原理是利用光的直线传播, 将手影投射到幕布上形成各种影像. 如图, 为了投影出一个动物造型 CD , 手 AB 的长度是 15 厘米, $AB \parallel CD$, 光源 O 到手 AB 的距离 OG 是 100 厘米, 手 AB 到幕布的距离 GH 是 20 厘米. 此时 CD 的长度是_____厘米.



【答案】18

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，先证明 $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ ，然后根据相似三角形的对应高之比等于相似比求解即可.

【详解】解：根据题意，得 $OG = 100$ ， $GH = 20$ ， $AB = 15$ ， $OH \perp CD$

$$\therefore OH = OG + GH = 120,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OCD,$$

$$\because OH \perp CD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{OG}{OH}, \text{ 即 } \frac{15}{CD} = \frac{100}{120},$$

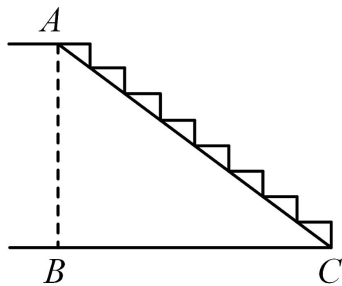
解得 $CD = 18$,

经检验， $CD = 18$ 是原方程的解，

$\therefore CD$ 的长度是18厘米，

故答案为：18.

16. 如图，某商场开业，要为一段楼梯铺上红地毯，已知楼梯高 $AB = 6\text{m}$ ，坡面 AC 的坡度 $i = 1:\frac{4}{3}$ ，则至少需要红地毯_____m.



【答案】14

【解析】

【分析】根据坡面 AC 的坡度 $i = 1:\frac{4}{3}$ ，求出 BC 的长度，从而利用平移的知识可得红地毯的长度为 $AB + BC$ ，进而得出答案.

【详解】解： $\because AB = 6\text{m}$ ，坡面 AC 的坡度 $i = 1:\frac{4}{3} = AB:BC$ ，

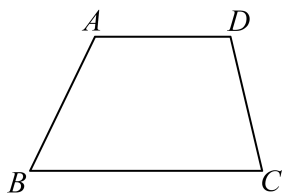
$$\therefore BC = \frac{4}{3}AB = \frac{4}{3} \times 6 = 8\text{m},$$

$\therefore$ 红地毯的长度为 $AB + BC = 6 + 8 = 14\text{m}$ ，

故答案为：14.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，利用坡度求出 BC 的长度是解答本题的关键，另外要掌握平移性质的运用.

17. 平行于梯形两底的直线截梯形的两腰，当两交点分别是两腰的黄金分割点时，我们称这条线段是梯形的“黄金分割线”. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = 6$ ， $BC = 10$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上 ($AE > BE$)，如果 EF 是梯形 $ABCD$ 的“黄金分割线”，那么 $EF =$ _____.

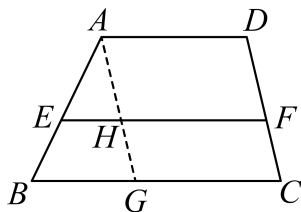


【答案】 $2\sqrt{5} + 4$

【解析】

【分析】 本题考查黄金分割，相似三角形的判定和性质，过点 A 作 $AG \parallel CD$ 交 EF 于点 H ，证明 $\triangle AEH \sim \triangle ABG$ ，得到 $\frac{EH}{BG} = \frac{AE}{AB}$ ，求出 EH 的长，利用 $EH + FH$ 求出 EF 的长即可.

【详解】 解：过点 A 作 $AG \parallel CD$ 交 EF 于点 H ，



$\therefore EF$ 是梯形 $ABCD$ 的“黄金分割线”，

$$\therefore AD \parallel BC \parallel EF, \quad \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ADFH$, $ADCG$ 均为平行四边形,

$$\therefore HF = CG = AD = 6,$$

$$\therefore BG = BC - CG = 4,$$

$$\therefore AG \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABG,$$

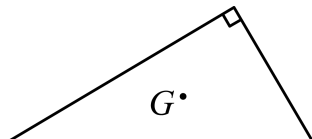
$$\therefore \frac{EH}{BG} = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore EH = 2\sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore EF = EH + HF = 2\sqrt{5} + 4;$$

故答案为: $2\sqrt{5} + 4$.

18. 如图, 将一块含 30° 角的实心的直角三角板放置在桌面上, 在桌面所在平面内绕着它的重心 G 逆时针旋转 180° . 如果这块三角板的斜边长 12 厘米, 那么运动前后两个三角形重叠部分的面积为_____平方厘米.

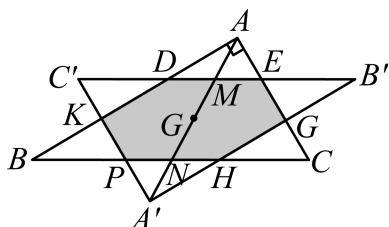


【答案】 $12\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 旋转的性质, 重心的性质, 根据含 30° 度角的直角三角形的性质, 求出 ABC 的面积, 旋转的性质, 重心的性质, 推出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 且相似比为 $1:3$, 利用 ABC 的面积减去三个小三角形的面积求出重叠部分的面积即可.

【详解】 解: 如图, $\angle BAC = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, BC = 12\text{cm}$,



$$\therefore AC = \frac{1}{2}BC = 6\text{cm}, AB = \sqrt{3}AC = 6\sqrt{3}\text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\text{cm}^2,$$

$\therefore G$ 为重心,

$$\therefore AG : GN = 2 : 1,$$

$\therefore ABC$ 绕点 G 旋转 180° ,

$$\therefore AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', A'C' \parallel AC, AG = A'G, MG = NG,$$

$$\therefore AM : MG : GM = 1 : 1 : 1,$$

$$\therefore AM : AN = 1 : 3,$$

$$\therefore BC \parallel B'C',$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = AM^2 : AN^2 = 1 : 9,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \text{cm}^2,$$

$$\text{同理: } S_{\triangle CGH} = S_{\triangle BKP} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3} \text{cm}^2,$$

$$\therefore \text{重叠部分的面积为: } S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CGH} - S_{\triangle BKP} - S_{\triangle ADE} = 18\sqrt{3} - 3 \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{cm}^2;$$

故答案为: $12\sqrt{3}$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sin^2 45^\circ - \frac{2\cos 60^\circ}{\cot 30^\circ - \tan 45^\circ}.$

【答案】 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角的三角函数的混合运算, 先把特殊角的三角函数值代入, 然后再根据实数的混合运算法则计算即可.

【详解】 解: $\sin^2 45^\circ - \frac{2\cos 60^\circ}{\cot 30^\circ - \tan 45^\circ}$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 的顶点为 D ,

(1) 为了确定这条抛物线, 需要再添加一个条件, 请从以下两个条件中选择一个: ①它与 y 轴交点的坐标是 $(0, -1)$; ②顶点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$. 你选择的条件是_____ (填写编号), 并求 b 、 c 的值.

(2) 由 (1) 确定的抛物线与 x 轴正半轴交于点 A ，求 $\tan \angle DAO$ 的值.

【答案】(1) ②, $b = \frac{2}{3}, c = 1$

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查二次函数的综合应用，正确的求出函数解析式，利用数形结合的思想进行求解是解题的关键：

(1) 选择②，写出顶点式，再转化为一般式求出 b 、 c 的值即可；

(2) 求出点 A 的坐标，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴，利用正切的定义，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：当选择条件为①时，只有一个点的坐标无法求出两个参数的值；

故选择②，此时：
$$y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1,$$

$\therefore b = \frac{2}{3}, c = 1;$

故答案为：②；

【小问 2 详解】

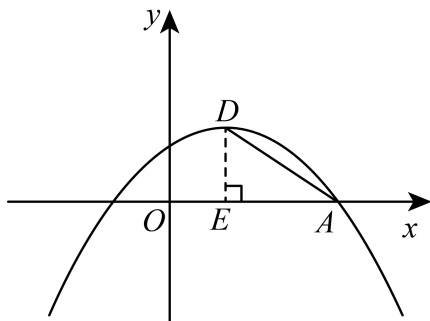
解：当 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$ 时，

解得： $x_1 = 3, x_2 = -1,$

$\therefore A(3, 0),$

$\therefore OA = 3,$

过点 D 作 $DE \perp x$ 轴，

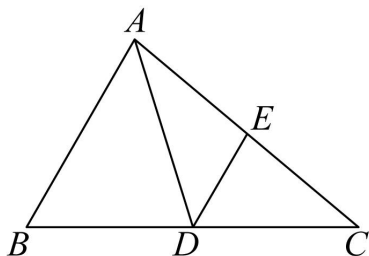


则： $OE = 1, DE = \frac{4}{3},$

$\therefore AE = OA - OE = 2,$

$$\therefore \tan \angle DAO = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}.$$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, $BD=12$, $CD=15$, 且 $\angle BAD = \angle C$.



- (1) 求线段 AB 的长;
 (2) 当 $\angle ADE = \angle C$, $\angle B=60^\circ$ 时, 求 $\triangle EDC$ 的面积.

【答案】(1) 18;

(2) $\frac{75}{2}\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定与性质、直角三角形的性质、勾股定理.

(1) 根据: $\angle BAD = \angle C$, $\angle B = \angle B$, 可证 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, 根据相似三角形的对应边成比例可得:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB}, \text{ 从而可求 } AB \text{ 的长度;}$$

(2) 过点 A 作 $AM \perp BC$, 根据直角三角形的性质可求 $BM=9$, 利用勾股定理可求 $AM=9\sqrt{3}$, 利用三角形的面积公式可求 $S_{\triangle ABC} = \frac{243}{2}\sqrt{3}$, 因为 $\angle BAD = \angle C$, $\angle ADE = \angle C$, 可证 $\triangle CDE \sim \triangle CBA$, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方可知 $S_{\triangle CDE} = \frac{75}{2}\sqrt{3}$.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle BAD = \angle C$, $\angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB},$$

$$\because BD=12, CD=15,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 12 + 15 = 27,$$

$$\therefore \frac{AB}{27} = \frac{12}{AB},$$

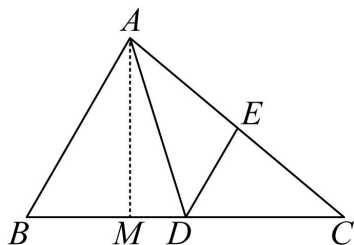
$\because AB$ 是线段,

$$\therefore AB > 0,$$

$$\therefore AB = 18;$$

【小问2详解】

解：如下图所示，过点A作 $AM \perp BC$ ，



$$\therefore \angle AMB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2} AB = 9,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} \times 27 \times 9\sqrt{3} = \frac{243}{2} \sqrt{3},$$

$$\because \angle BAD = \angle C, \quad \angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

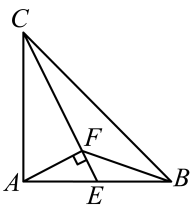
$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{25}{81} \times \frac{243}{2} \sqrt{3} = \frac{75}{2} \sqrt{3}.$$

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点E是边AB的中点，连接CE，作 $AF \perp CE$ ，垂足为点F，连接BF.



(1) 求证: $\triangle EFB \sim \triangle EBC$;

(2) 取 BC 边的中点 D , 连接 DF , 求证: $\frac{DF}{EF} = \sqrt{2}$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定以及性质, 等腰直角三角形的判定以及性质, 三角形中位线的判定以及性质, 掌握这些判定定理以及性质是解题的关键.

(1) 先证明 $\triangle FEA \sim \triangle AEC$, 由相似三角形的性质得出 $\frac{EF}{EA} = \frac{EA}{EC}$, 由线段中点的定义得出 $EA = EB$, 等量代换可得出 $\frac{EF}{EB} = \frac{EB}{EC}$, 结合 $\angle FEB = \angle BEC$, 进而可得出 $\triangle EFB \sim \triangle EBC$.

(2) 取 BC 边的中点 D , 连接 DF , 先证明 $\triangle EFB \sim \triangle EBC$, 由相似三角形的性质得出 $\angle EFB = \angle EBC = 45^\circ$, $\angle EBF = \angle DCF$, 连接 AD 交 CF 于点 H , 连接 ED , 利用三角形中位线的判定以及性质, 等腰直角三角形的判定得出 $CD = BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{2}BE$, 再证明 $\triangle CHD \sim \triangle AHF$, $\triangle FHD \sim \triangle AHC$, 再由相似三角形的性质进一步证明 $\triangle DCF \sim \triangle EBF$, 最后根据相似三角形的性质即可得出 $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BE} = \sqrt{2}$.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$, 点 E 是边 AB 的中点, $AF \perp CE$ 于点 F ,

$\therefore \angle EFA = \angle EAC = 90^\circ$, $EA = EB$,

$\therefore \angle FEA = \angle AEC$,

$\therefore \triangle FEA \sim \triangle AEC$,

$\therefore \frac{EF}{EA} = \frac{EA}{EC}$,

$\therefore \frac{EF}{EB} = \frac{EB}{EC}$

$\because \angle FEB = \angle BEC$,

$\therefore \triangle EFB \sim \triangle EBC$.

【小问 2 详解】

解: 取 BC 边的中点 D , 连接 DF ,

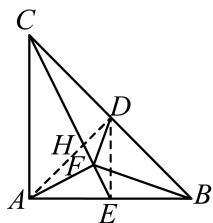
$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle EBC = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \triangle EFB \sim \triangle EBC$,

$$\therefore \angle EFB = \angle EBC = 45^\circ, \quad \angle EBF = \angle DCF,$$

连接 AD 交 CF 于点 H , 连接 ED ,



$\because$ 点 E 是 AB 的中点, 点 D 是 BC 的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB, \quad DE = \frac{1}{2} AC, \quad DE \parallel AC, \quad AD \perp BC,$$

$$\angle DAC = \angle DAB = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore BE = DE, \quad \angle BED = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{2} BE,$$

$$\therefore \angle CDH = \angle AFH = 90^\circ, \quad \angle CHD = \angle AHF,$$

$$\therefore \triangle CHD \sim \triangle AHF,$$

$$\therefore \frac{DH}{FH} = \frac{CH}{AH},$$

$$\therefore \frac{DH}{CH} = \frac{FH}{AH},$$

$$\therefore \angle AHC = \angle DHF$$

$$\therefore \triangle FHD \sim \triangle AHC,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle EFB,$$

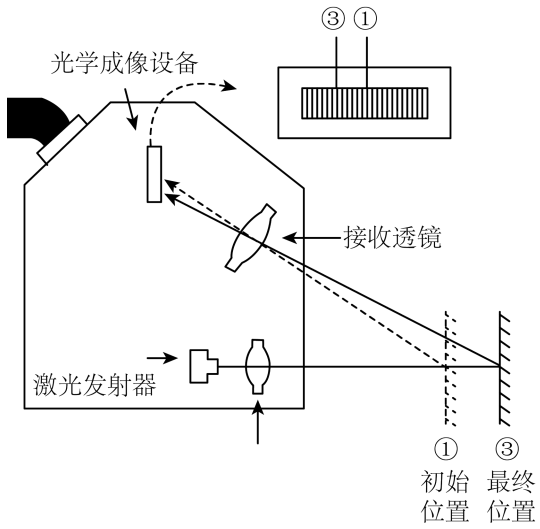
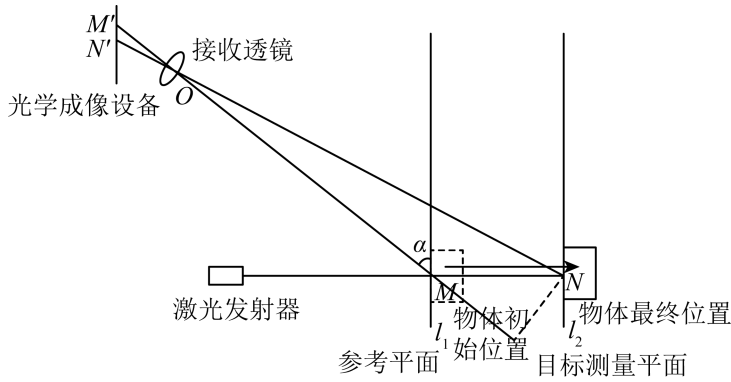
$$\therefore \angle DCF = \angle EBF,$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BE} = \sqrt{2}.$$

23. 火车作为我国重要的交通运输形式之一, 其轨道的平顺性和稳定性直接影响列车的运行安全. 我国目前轨道检测的主要方法是机械检测, 通过使用机械传感器和无损检测设备 (包括激光三角位移传感器、超声波传感器等) 来测量轨道的各种参数 (几何尺寸、轨距、高差和曲率), 从而判断轨道是否有损伤或缺陷. 某校科创活动小组率先就“激光三角位移计”这一设备开展了学习与探究:

阅读概述	激光三角位移计是由半导体激光向目标物照射激光, 聚集目标物反射的光,
------	------------------------------------

	并在光接收元件上成像。一旦离目标物的距离发生改变，聚集反射光的的角度也会改变，成像的位置也随之改变。可以通过成像的位移来计算物体实际的移动距离。 
发现原理	被测量物体从初始位置移动到最终位置，需要测量的是参考平面与目标测量平面的距离，也就是图中点 M 与点 N 之间的距离。假设激光通过接收透镜后仍按照原直线方向传播，最后在光学成像设备上成像。 
建立模型	如图，直线 $M'N' \parallel$ 直线 $l_1 \parallel$ 直线 l_2，直线 MN 垂直于 l_1 和 l_2，垂足分别为 M 和 N，线段 MM' 与线段 NN' 交于点 O，$\angle M'MP = \alpha$。

探究 (1)	设 $MN = m$ ，请用含 m 和 α 的式子表示点 N 到直线 MM' 的距离.
探究 (2)	已知 $M'N' = 5$ ， $OM' = 23$ ， $OM = 132$ ，求 MN 的长度. (结果精确到个位， $\sin \alpha \approx 0.8$ ， $\cos \alpha \approx 0.6$ ， $\cot \alpha \approx 0.75$)

【答案】 (1) $m \cos \alpha$ (2) 60

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的实际应用，相似三角形的判定和性质，添加辅助线构造直角三角形，是解题的关键：

(1) 过点 N 作 $NB \perp MM'$ 于点 B ，对顶角结合同角的余角相等，得到 $\angle MNB = \alpha$ ，解直角三角形 MBN ，求出 BN 的长即可；

(2) 作 $N'D \parallel MN$ ，交 MM' 于点 D ，解直角三角形 $DM'N'$ ，证明 $\triangle DON' \sim \triangle MON$ ，列出比例式进行求解即可.

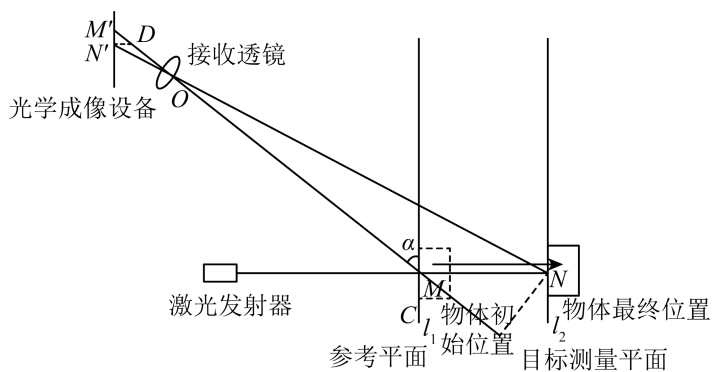
【详解】 解：过点 N 作 $NB \perp MM'$ 于点 B ，则： $\angle NBM = 90^\circ$ ， $\angle CMB = \alpha$ ，

$\therefore MN \perp l_1$ ，

$\therefore \angle CMN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MNB = \angle CMB = 90^\circ - \angle BMN = \alpha$ ，

在 $\text{Rt}\triangle MBN$ 中， $BN = MN \cdot \cos \alpha = m \cos \alpha$ ；



(2) 作 $N'D \parallel MN$, 交 MM' 于点 D

$$\therefore M'N' \parallel l_1, MN \perp l_1,$$

$$\therefore \angle N'M'D = \alpha, DN' \perp M'N',$$

$$\therefore DM' = \frac{M'N'}{\cos \alpha} \approx \frac{25}{3}, \quad DN' = \frac{M'N'}{\cot \alpha} \approx \frac{20}{3},$$

$$\therefore OD = OM' - DM' = \frac{44}{3},$$

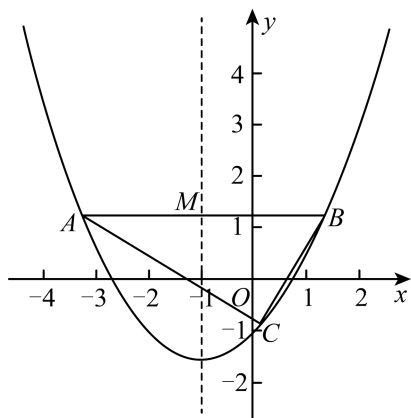
$$\therefore N'D \parallel MN,$$

$$\therefore \triangle DON' \sim \triangle MON,$$

$$\therefore \frac{MN}{DN'} = \frac{OM}{OD} = \frac{132}{\frac{44}{3}} = 9,$$

$$\therefore MN = 9DN' = 9 \times \frac{20}{3} = 60.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 经过点 $(2, 3)$ 和点 $(-4, 3)$.



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 如图, 该抛物线上有三个点 A 、 B 、 C , $AB \parallel x$ 轴, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, AB 与抛物线的对称轴交于点 M (点 A 在对称轴的左侧).

①如果点 C 到抛物线对称轴的距离为 t , 请用含 t 的代数式表示点 B 的横坐标;

②求点 C 的横坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

(2) ① $2t - 1$; ② $\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的综合应用，解直角三角形，正确的求出函数解析式，利用数形结合的思想进行求解是解题的关键：

(1) 待定系数法求出函数解析式即可；

(2) ①连接 CM ，过点 C 作 $CD \perp$ 直线 $x = -1$ ，根据对称性结合直角三角形斜边上的中线推出 $\triangle CMB$ 为等边三角形，在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中，求出 CM 的长，进而得到 BM 的长，即可得出点 B 的横坐标；

②在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中，利用锐角三角函数求出 t 的值，进而求出点 C 的横坐标即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 经过点 $(2, 3)$ 和点 $(-4, 3)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b - 1 = 3 \\ 16a - 4b - 1 = 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1;$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} \because y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1,$$

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = -1,$$

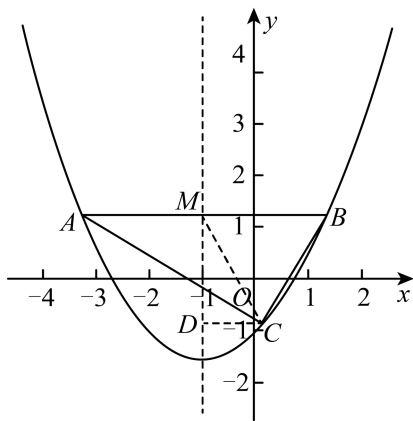
$\therefore AB \parallel x$ 轴,

$\therefore A, B$ 关于对称轴对称,

$\therefore AB$ 与抛物线的对称轴交于点 M ,

$\therefore M$ 为 AB 的中点,

连接 CM ，过点 C 作 $CD \perp$ 直线 $x = -1$,



$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \quad \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2} AB = AM = BM, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CMB$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle CMB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CMD = 90^\circ - \angle CMB = 30^\circ,$$

$\therefore CD \perp$ 直线 $x = -1$, 且点 C 到抛物线对称轴的距离为 t ,

$$\therefore CD = t,$$

$$\therefore CM = 2CD = 2t,$$

$$\therefore BM = 2t,$$

$\therefore$ 点 B 的横坐标为: $2t - 1$;

② 设点 C 到抛物线对称轴的距离为 t , 则点 C 的横坐标为 $t - 1$,

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的纵坐标为: } \frac{1}{2}(t-1)^2 + t - 1 - 1 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2},$$

由①可知: 点 B 的横坐标为: $2t - 1$, 则: 点 B 的纵坐标为: $\frac{1}{2}(2t-1)^2 + 2t - 1 - 1 = 2t^2 - \frac{3}{2}$,

$$\therefore DM = 2t^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}t^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, $\angle CMD = 30^\circ$,

$$\therefore \tan \angle CMD = \frac{CD}{MD} = \frac{t}{\frac{3}{2}t^2} = \frac{2}{3t} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的横坐标为: } t - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为点 D , 点 D 在 AB 边上 (不与点 A 重合), 点 E 是边 AC 上的点, 且满足 $CD = CE$, 设 $k = \tan B$.

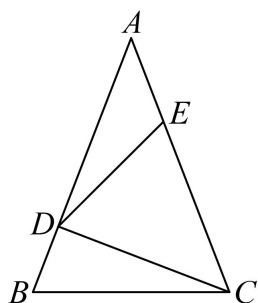


图 1

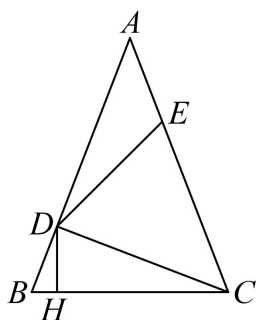
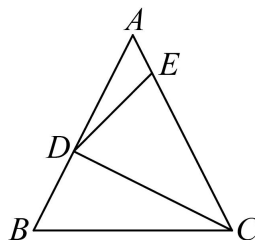


图 2



备用图

(1) 求证: $\angle CDE = \angle BCD + 45^\circ$;

(2) 如图 2, 过点 D 作 $DH \perp BC$, 垂足为点 H , 求证: $DE = \sqrt{2}(CH - DH)$;

(3) 设点 F 是 CD 的中点, 连接 EF 并延长交边 BC 于点 G , 当 $\triangle CFG$ 与 $\triangle BCD$ 相似时, 求 k 的值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $2 + \sqrt{3}$ 或 2

【解析】

【分析】(1) 设 $\angle BCD = \alpha$, 则 $\angle B = 90^\circ - \alpha$, 在结合等腰三角形的性质即可推出结论;

(2) 过点 E 作 $EM \perp BC$ 于点 M , 过 D 作 $DN \perp EM$ 于点 N , 证明 $\triangle CDH \cong \triangle ECM$ (AAS), 得出 $CH = EM$, 可推出结论;

(3) 分两种情况①当 $\angle CFG = \angle BDC = 90^\circ$ 时, ②当 $\angle CGF = \angle BDC = 90^\circ$ 时, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 设 $\angle BCD = \alpha$,

$\because CD \perp AB$,

$\therefore \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \alpha$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ACB = \angle B = 90^\circ - \alpha$,

$\therefore \angle ECD = \angle ACB - \angle BCD = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$,

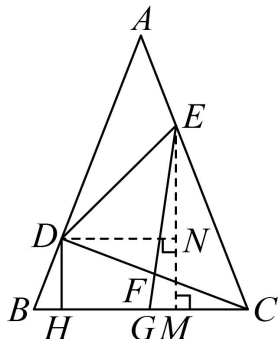
$\because CD = CE$,

$\therefore \angle CDE = \angle CED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ECD) = \frac{1}{2}[180^\circ - (90^\circ - 2\alpha)] = 45^\circ + \alpha$,

$$\therefore \angle CDE = \angle BCD + 45^\circ;$$

【小问 2 详解】

如图，过点 E 作 $EM \perp BC$ 于点 M ，过 D 作 $DN \perp EM$ 于点 N ，



$$\therefore \angle DNE = \angle DNM = 90^\circ = \angle NMH = \angle NMC,$$

$$\therefore DH \perp BC,$$

$$\therefore \angle DHB = \angle DHC = 90^\circ = \angle CME,$$

$$\therefore \angle DHC = \angle NMH = \angle DNM = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DHMN$ 为矩形， $\triangle EMC$ 为 $\text{Rt}\triangle$ ，

$$\therefore DN \parallel BC, \quad DH = NM,$$

$$\therefore \angle NDC = \angle BCD = \alpha,$$

$$\therefore \angle EDN = \angle CDE - \angle NDC = 45^\circ + \alpha - \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DEN = 90^\circ - \angle EDN = 45^\circ = \angle EDN,$$

$$\therefore DN = EN, \quad \angle CEM = \angle CED - \angle DEN = 45^\circ + \alpha - 45^\circ = \alpha = \angle DCH,$$

$$\therefore DE = \sqrt{DN^2 + EN^2} = \sqrt{EN^2 + EN^2} = \sqrt{2}EN,$$

在 $\triangle CDH$ 和 $\triangle ECM$ 中，

$$\begin{cases} \angle DHC = \angle CME \\ \angle DCH = \angle CEM, \\ CD = EC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CDH \cong \triangle ECM \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CH = EM,$$

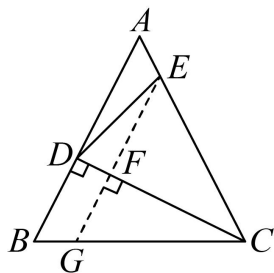
$$\therefore CH - DH = EM - DH = EM - NM = EN,$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}EN = \sqrt{2}(CH - DH);$$

【小问 3 详解】

解：∵ $\triangle CFG$ 与 $\triangle BCD$ 相似，

①当 $\angle CFG = \angle CDB = 90^\circ$ 时，如图所示



则 $\triangle CFG \sim \triangle CDB$,

∴ $\angle CGF = \angle CBD$,

∵ 点 F 是 CD 的中点， $CD = CE$,

∴ EF 垂直平分 CD ,

∴ $ED = EC$,

∴ $ED = EC = DC$,

∴ $\triangle CDE$ 为等边三角形，

∴ $\angle EDC = 60^\circ$,

由 (1) 知： $\angle CDE = \angle BCD + 45^\circ$,

∴ $\angle BCD = 15^\circ$,

∴ $\angle B = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$,

∴ $\angle EGC = \angle B = 75^\circ = \angle ECG$,

∴ $EG = EC$,

设 $FC = FD = m$ ，则 $CE = CD = 2m$,

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中， $EF = \sqrt{CE^2 - CF^2} = \sqrt{(2m)^2 - m^2} = \sqrt{3}m$,

∵ $EF \perp CD$ ， $BD \perp CD$,

∴ $EF \parallel BD$,

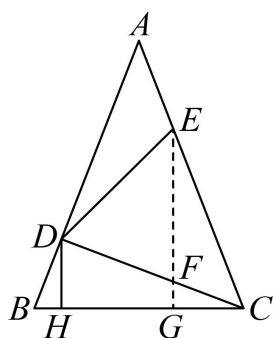
∴ $\angle EGC = \angle CBD = \angle ECG$,

∴ $EG = EC = 2m$,

∴ $FG = (2 - \sqrt{3})m$,

∴ $k = \tan B = \frac{FC}{FG} = \frac{m}{(2 - \sqrt{3})m} = 2 + \sqrt{3}$;

②当 $\angle CGF = \angle CDB = 90^\circ$ 时,



则 $\triangle CGF \sim \triangle CDB$,

$$\therefore \angle CFG = \angle CBD = \angle ECG,$$

又 $\because \angle EGC = \angle CGF$,

$$\therefore \triangle EGC \sim \triangle CGF,$$

$$\therefore \frac{EG}{CG} = \frac{CE}{CF},$$

$$\text{又} \because \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{\frac{1}{2}CD} = \frac{CE}{\frac{1}{2}CE} = 2,$$

$$\therefore k = \tan B = \tan \angle ECB = \frac{EG}{CG} = 2,$$

$\therefore k$ 的值为 $2 + \sqrt{3}$ 或 2.

【点睛】 本题是相似三角形综合题，考查了等边对等角，矩形的判定和性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等边三角形的判定和性质等知识点。正确作出辅助线构造全等三角形是解题的关键。