

2022 学年第二学期九年级学业质量调研

数学试卷

(练习时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

1. 本练习含三个大题, 共 25 题. 答题时, 学生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 本次练习不可以使用科学计算器.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 单项式 $4xy^2$ 的次数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式次数的定义, 即单项式所含字母的指数和为单项式的次数, 据此即可解答.

【详解】解: 单项式 $4xy^2$ 的次数为: $1+2=3$,

故选: C.

【点睛】本题考查了单项式次数的定义, 熟练掌握和运用单项式次数的定义是解决本题的关键.

2. 上海某区 3 月 20 日至 3 月 26 日的气温 ($^{\circ}\text{C}$) 如下表:

日期	20 日	21 日	22 日	23 日	24 日	25 日	26 日
天气	多云	晴	晴	阴	多云	阴	小雨
最低气温	12	15	11	8	9	8	8
最高气温	16	22	23	13	15	13	13

那么这一周最高气温的众数和中位数分别是 ()

- A. 13, 13; B. 13, 15; C. 8, 15; D. 8, 13.

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数和中位数定义解答即可.

【详解】一周最高气温分别为 13、13、13、15、16、22、23

$\therefore$ 众数为 13; 中位数为 15,

故选 B.

【点睛】 本题考查了中位数及众数，熟练掌握上述知识点是解答本题的关键.

3. 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图像经过第一、二、三象限，它的解析式可以是 ()

- A. $y = x + 1$ B. $y = x - 1$ C. $y = -x + 1$ D. $y = -x - 1$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据一次函数的图像经过第一、二、三象限可知 $k > 0, b > 0$ ，然后问题可求解.

【详解】 解：由一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图像经过第一、二、三象限可知 $k > 0, b > 0$ ，所以符合题意的只有 A 选项；

故选 A.

【点睛】 本题主要考查一次函数的图像与性质，熟练掌握一次函数的图像与性质是解题的关键.

4. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 平行四边形的邻边相等； B. 平行四边形的对角线互相平分；
C. 平行四边形内角都相等； D. 平行四边形是轴对称图形.

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可进行求解.

【详解】 解：由平行四边形的性质可知：平行四边形的两组对边相等；平行四边形的对角线互相平分；平行四边形的对角相等；平行四边形是中心对称图形；

故选 B.

【点睛】 本题主要考查平行四边形的性质及真命题，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

5. 在平面直角坐标系中，如果把抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 3 个单位得到一条新抛物线，那么下列关于这两条抛物线的描述中不正确的是 ()

- A. 开口方向相同； B. 对称轴相同；
C. 顶点的横坐标相同； D. 顶点的纵坐标相同.

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据二次函数的平移及性质可进行求解.

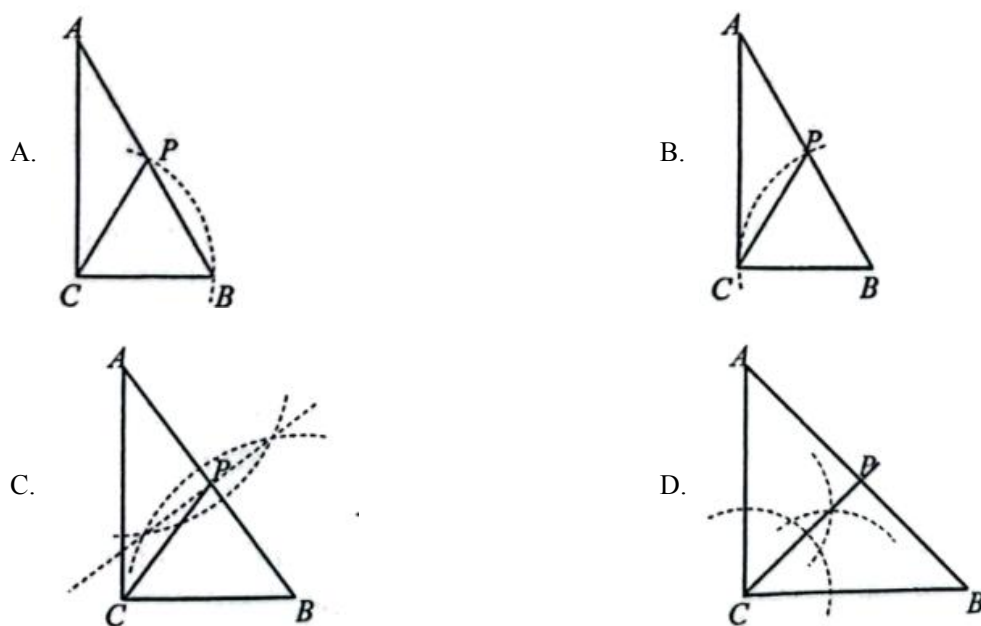
【详解】 解：把抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 3 个单位得到新的二次函数解析式为 $y = 2x^2 - 3$ ，

∴这两条抛物线的开口方向都是向上，对称轴都为直线 $x=0$ ，顶点的横坐标都为 0，顶点的纵坐标一个为 0，一个为 -3 ；

故选 D.

【点睛】 本题主要考查二次函数图象的平移及性质，熟练掌握二次函数的平移及性质是解题的关键.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$. 用尺规作图的方法作出直角三角形斜边上的中线 CP ，那么下列作法一定正确的是 ()



【答案】 C

【解析】

【分析】 根据线段垂直平分线的作图、角平分线的作图及直角三角形斜边中线定理可进行求解.

【详解】 解： A、由作图可知 $CP = BC$ ，不满足点 P 是 AB 的中点，故不符合题意；

B、由作图可知 $BP = BC$ ，不满足点 P 是 AB 的中点，故不符合题意；

C、由作图可知点 P 是 AB 的中点，故符合题意；

D、由作图可知 CP 平分 $\angle ACB$ ，故不符合题意；

故选 C.

【点睛】 本题主要考查直角三角形斜边中线定理及线段垂直平分线的作图、角平分线的作图，熟练掌握尺规作图是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $2a + 3a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $5a$

【解析】

【分析】直接运用合并同类项法则进行计算即可得到答案.

【详解】解: $2a + 3a$

$$= (2 + 3)a$$

$$= 5a.$$

故答案为: $5a$.

【点睛】本题主要考查了合并同类项, 熟练掌握合并同类项法则是解答本题的关键.

8. 因式分解: $4x^2 - y^2 =$ _____.

【答案】 $(2x + y)(2x - y)$

【解析】

【分析】根据平方差公式直接进行因式分解即可.

【详解】解: 原式 $= (2x)^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$.

故答案为: $(2x + y)(2x - y)$.

【点睛】本题考查因式分解, 常用的方法有: 提取公因式法, 公式法, 十字相乘法.

9. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为 _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】由题意得, $\Delta = 4^2 - 4m = 0$, 计算求解即可.

【详解】解: 由题意得, $\Delta = 4^2 - 4m = 0$,

$$\text{解得 } m = 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式. 解题的关键在于熟练掌握一元二次方程有两个相等的实数根时, $\Delta = 0$.

10. 方程 $\sqrt{x + 2} = x$ 的根是 _____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先把方程两边平方, 使原方程化为整式方程 $x + 2 = x^2$, 解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, 结合二次根式的性质, 去掉增根, 即可得到答案.

【详解】方程两边平方得： $x+2=x^2$

$$\therefore x_1=2, \quad x_2=-1$$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{x+2}=x \geq 0$$

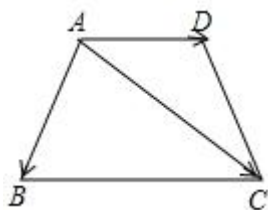
$\therefore x_2=-1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x=2$

故答案为： $x=2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

11. 如图，已知梯形 ABCD， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ ， 如果 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ， 那么 $\overrightarrow{AC}=\underline{\hspace{2cm}}$ (用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示).

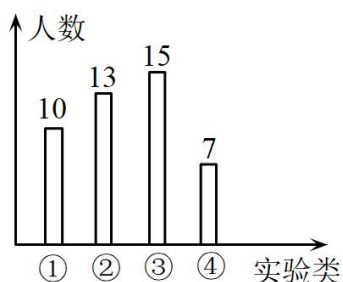


【答案】 $2\vec{a}+\vec{b}$

【解析】

【详解】 $\because$ 梯形 ABCD， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$ ， $\therefore \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}=2\vec{a}$ ， $\because \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ ，
 $\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+\vec{b}$. 故答案为 $2\vec{a}+\vec{b}$.

12. 2022 年 10 月 12 日，“天宫课堂”第三课在问天实验舱内开讲. 进行的太空实验有①毛细效应；②水球变“懒”实验；③太空趣味饮水；④会调头的扳手. 某校 1500 名学生在线观看了“天宫课堂”第三课，并参与了关于“我最喜爱的太空实验”的问卷调查. 如果从中随机抽取 45 名学生的问卷调查情况进行统计分析，并将调查数据整理成下面的条形图，那么估计该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有_____名.



【答案】 500

【解析】

【分析】 根据该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有 $1500 \times \frac{15}{45}$ ，计算求解即可.

【详解】 解：由题意知，该校喜欢③太空趣味饮水实验的初中学生有 $1500 \times \frac{15}{45} = 500$ （名），

故答案为：500.

【点睛】 本题考查了条形统计图，用样本估计总体. 解题的关键在于从条形统计图中获取正确的信息.

13. 为开展“学习二十大，奋进新征程”主题宣讲活动，某学校从甲、乙、丙三位宣讲员中随机抽取两人参加，恰好选中甲、丙两人的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据概率公式解答即可.

【详解】 从甲、乙、丙三位宣讲员中随机抽取两人的情况有：甲、乙；甲、丙；乙、丙，共三种情况，恰好选中甲、丙两人的情况只有一种

$\therefore$ 选中甲、丙两人的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了概率公式，熟练掌握上述知识点是解答本题的关键.

14. 如果正六边形的半径长为 2，那么它的面积为_____.

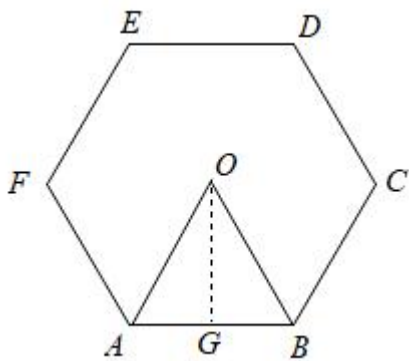
【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，证明 $\triangle OAB$ 是等边三角形，求出 $OG = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

得出 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \times OG = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，即可得出 $S_{\text{六边形}ABCDEF} = 6S_{\triangle AOB} = 6\sqrt{3}$.

【详解】 解：过点 O 作 $OG \perp AB$ 于点 G ，如图所示：



$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形,

$$\therefore OA = OB, \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = OA = 2,$$

$$\because OG \perp AB,$$

$$\therefore AG = BG = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore OG = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \times OG = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{六边形}ABCDEF} = 6S_{\triangle AOB} = 6\sqrt{3}.$$

故答案为: $6\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了正多边形的性质, 勾股定理, 三角形面积的计算, 等边三角形的判定和性质, 解题的关键是证明 $\triangle OAB$ 是等边三角形, 求出 $S_{\triangle AOB} = \sqrt{3}$.

15. 我国古代数学名著《张丘建算经》中记载: “今有清酒一斗直粟十斗, 醕洒一斗直粟三斗, 今持粟三斛, 得酒五斗, 问清洒酒各几何?” 大意是: 现有一斗清酒价值 10 斗谷子, 一斗醕洒酒价值 3 斗谷子, 现在拿 30 斗谷子, 共换了 5 斗酒, 问清酒, 醕洒酒各几斗? 如果设清酒 x 斗, 那么可列方程为_____.

【答案】 $10x + 3(5 - x) = 30$

【解析】

【分析】 设清酒 x 斗, 则醕洒酒为 $(5-x)$ 斗, 一斗清酒价值 10 斗谷子, x 斗清酒价值 $10x$ 斗谷子; 一斗醕洒酒价值 3 斗谷子, $(5-x)$ 斗醕洒酒价值 $3(5-x)$ 斗谷子. 存在“换 x 斗清酒和 $(5-x)$ 斗醕洒酒共用 30 斗谷子”的等量关系, 根据等量关系可列方程.

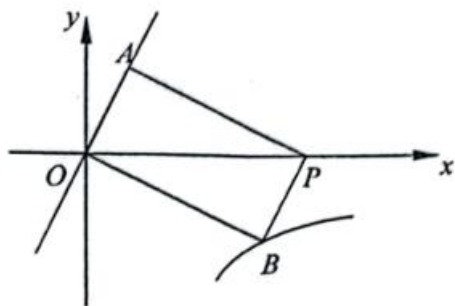
【详解】解：设清酒 x 斗，则醐洒酒为 $(5-x)$ 斗。

$$10x + 3(5-x) = 30.$$

故答案为： $10x + 3(5-x) = 30$.

【点睛】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用，准确分析出数量关系和等量关系是解决本题的关键。

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在直线 $y = 2x$ 上，点 A 的横坐标为 1，点 P 是 x 轴正半轴上一点，点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 图象上，联结 AP 、 PB 和 OB . 如果四边形 $OAPB$ 是矩形，那么 k 的值是_____.

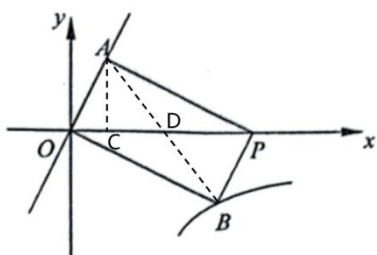


【答案】 -8

【解析】

【分析】当 $x = 1$ ， $y = 2x = 2$ ，即 $A(1, 2)$ ，如图，连接 AB 交 OP 于 D ，过 A 作 $AC \perp OP$ 于 C ，则 $AC = 2$ ， $OC = 1$ ， D 是 AB 中点，在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，由勾股定理求 AO 的值，证明 $\triangle AOC \sim \triangle POA$ ，则 $\frac{AO}{PO} = \frac{OC}{AO}$ ，求 PO 的值，进而可得 P ， D ， B 的点坐标，将 B 点坐标代入反比例函数解析式求解 k 值即可。

【详解】解：当 $x = 1$ ， $y = 2x = 2$ ，即 $A(1, 2)$ ，
如图，连接 AB 交 OP 于 D ，过 A 作 $AC \perp OP$ 于 C ，



$$\therefore AC = 2, OC = 1,$$

$\therefore$ 四边形 $OAPB$ 是矩形，

$\therefore D$ 是 AB 中点，

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，由勾股定理得 $AO = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$ ，

$$\because \angle ADO = \angle PAO = 90^\circ, \quad \angle AOC = \angle POA,$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle POA,$$

$$\therefore \frac{AO}{PO} = \frac{OC}{AO}, \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{5}}{PO} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{解得} \quad PO = 5,$$

$$\therefore P(5,0), \quad D\left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

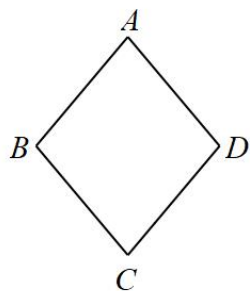
$$\therefore B(4, -2),$$

$$\text{将 } B(4, -2) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (x > 0) \text{ 得, } -2 = \frac{k}{4}, \quad \text{解得 } k = -8,$$

故答案为: -8 .

【点睛】本题考查了反比例函数与几何综合, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理, 矩形的性质等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

17. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $\angle A = 80^\circ$, 如果将菱形 $ABCD$ 绕着点 D 逆时针旋转后, 点 A 恰好落在菱形 $ABCD$ 的初始边 AB 上的点 E 处, 那么点 E 到直线 BD 的距离为_____.



【答案】3

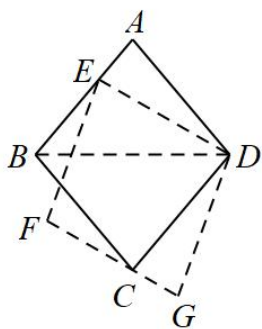
【解析】

【分析】如图, 旋转、菱形的性质可知, $DE = AD = AB = 6$, 则 $\angle DEA = \angle A = 80^\circ$,

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 50^\circ, \quad \angle ADE = 180^\circ - \angle DEA - \angle A = 20^\circ, \quad \angle BDE = \angle ADB - \angle ADE = 30^\circ,$$

根据 E 到直线 BD 的距离为 $DE \cdot \sin \angle BDE$, 计算求解即可.

【详解】解: 如图, 菱形 $ABCD$ 绕着点 D 逆时针旋转后为菱形 $DEFG$,



由旋转、菱形的性质可知, $DE = AD = AB = 6$,

$$\therefore \angle DEA = \angle A = 80^\circ, \quad \angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle DEA - \angle A = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ADB - \angle ADE = 30^\circ,$$

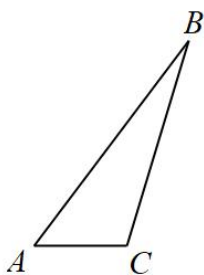
$$\therefore E \text{ 到直线 } BD \text{ 的距离为 } DE \cdot \sin \angle BDE = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题主要考查了旋转的性质, 菱形的性质, 等边对等角, 三角形内角和定理, 正弦等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

18. 阅读理解: 如果一个三角形中有两个内角 α 、 β 满足 $2\alpha + \beta = 90^\circ$, 那么我们称这个三角形为特征三角形.

问题解决: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB$ 为钝角, $AB = 25$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 如果 $\triangle ABC$ 是特征三角形, 那么线段 AC 的长为_____.

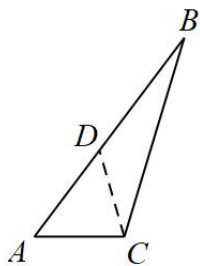


【答案】 $\frac{25}{3}$

【解析】

【分析】 由题意可分: ①设 $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$, 则在 AB 上截取一点 D , 使得 $CD = CA$, 此种情况不符合题意; ②设 $\angle A = \beta, \angle B = \alpha$, 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F , 然后根据三角函数及勾股定理可进行求解.

【详解】解：由题意可分：①设 $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$ ，则在 AB 上截取一点 D ，使得 $CD = CA$ ，如图所示：



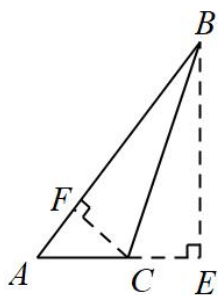
$$\therefore \angle A = \angle ADC,$$

$$\therefore \tan A = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{4}{3},$$

$\therefore \angle CDB$ 为钝角，故不存在 $2\alpha + \beta = 90^\circ$ ；

②设 $\angle A = \beta, \angle B = \alpha$ ，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于点 F ，如图所示：



$\therefore \triangle ABC$ 是特征三角形，即 $2\alpha + \beta = 90^\circ$ ，且 $\angle A + \angle ABE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABE = 2\angle ABC,$$

$\therefore BC$ 平分 $\angle ABE$ ，

$$\therefore CF = CE,$$

$$\therefore \tan A = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{BE}{AE},$$

设 $AF = 3x, CF = CE = 4x, AC = 5x$ ，则有 $AE = 9x$ ，

$$\therefore BE = 12x,$$

$$\therefore AB = 25,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $81x^2 + 144x^2 = 625$ ，

解得： $x = \frac{5}{3}$,

$\therefore AC = \frac{25}{3}$;

故答案为 $\frac{25}{3}$.

【点睛】 本题主要考查三角函数及勾股定理，熟练掌握三角函数及勾股定理是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算： $|1-\sqrt{3}| - 4^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

【答案】 0

【解析】

【分析】 先分别计算绝对值， 幂的乘方的逆运算与幂的乘方， 负整数指数幂， 分母有理化， 然后进行加减运算即可.

【详解】 解： $|1-\sqrt{3}| - 4^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

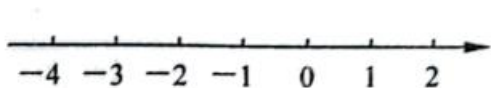
$$= \sqrt{3}-1 - (2^2)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{3} + \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \sqrt{3}-1 - 2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}+1$$

$$= 0$$

【点睛】 本题主要考查了绝对值， 幂的乘方的逆运算与幂的乘方， 负整数指数幂， 分母有理化. 解题的关键在于正确的运算.

20. 解不等式组 $\begin{cases} x-2 \geq -5 \\ 3x < x+2 \end{cases}$ ， 并把解集在数轴上表示出来；



【答案】 $-3 \leq x < 1$ ， 数轴见详解

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式组的解法可进行求解， 然后再把解集在数轴上表示即可.

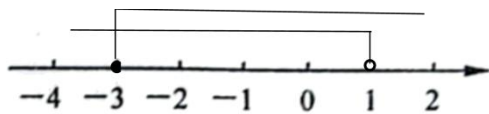
【详解】 解： $\begin{cases} x-2 \geq -5 \text{ ①} \\ 3x < x+2 \text{ ②} \end{cases}$

由①得： $x \geq -3$,

由②得: $x < 1$,

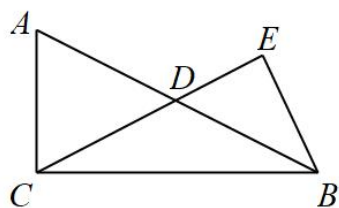
∴ 原不等式组的解集为 $-3 \leq x < 1$,

在数轴上表示如下:



【点睛】 本题主要考查一元一次不等式组的解法, 熟练掌握一元一次不等式组的解法是解题的关键.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 4$, 点 D 为 AB 的中点, 过点 B 作 CD 的垂线, 交 CD 的延长线于点 E .



(1) 求线段 CD 的长;

(2) 求 $\frac{CD}{DE}$ 的值.

【答案】 (1) $\sqrt{5}$

(2) $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $Rt\triangle ACB$ 勾股定理可求得斜边, 再由斜边中线可得 CD 长度.

(2) 通过相似三角形得到比例, 求出 BE 长度, 再通过 $Rt\triangle EBD$ 勾股定理求出 DE 长度, 再计算比值即可.

【小问 1 详解】

∵ $\angle ACB = 90^\circ$

∴ $Rt\triangle ACB$ 中 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$, 代入 $AC = 2$, $BC = 4$,

得 $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

D 为 AB 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$

∴ $CD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$

【小问 2 详解】

解法 1:

D 为 AB 的中点, $\angle ACB = 90^\circ$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = AD = BD = \sqrt{5}$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC$$

$$\text{又} \because BE \perp CE, \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle BEC$$

$$\therefore \frac{EB}{CB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{EB}{4}$$

$$\therefore EB = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BEC \text{ 中 } DE = \sqrt{BD^2 - EB^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{3}$$

解法 2:

$$\text{Rt}\triangle BEC \text{ 与 } \text{Rt}\triangle BED \text{ 中 } EB^2 = CB^2 - CE^2 = BD^2 - DE^2$$

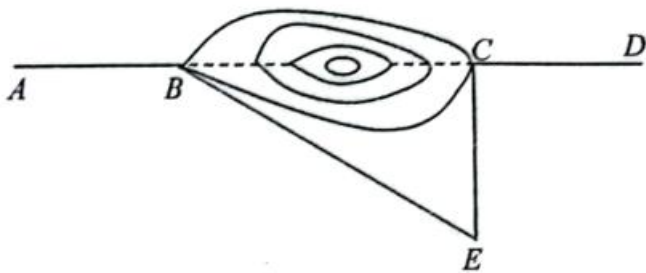
$$\text{设 } DE = x \text{ 得 } 4^2 - (x + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 - x^2$$

$$\text{解得 } DE = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{3}$$

【点睛】 本题考查几何图形中长度的计算，相似三角形，主要利用勾股定理进行长度关系计算，可以设元列勾股方程或结合相似计算，通常几何长度的求解可采用 3 中方法（勾股、相似、面积法），常考直角三角形和含有特殊角度的图形。在计算中灵活利用勾股定理是解题的关键。

22. 如图，在修建公路 AD 时，需要挖掘一段隧道 BC ，已知点 A 、 B 、 C 、 D 在同一直线上， $CE \perp AD$ ， $\angle ABE = 143^\circ$ ， $BE = 1500$ 米；



(1) 求隧道两端 B 、 C 之间的距离 (精确到个位);

(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$).

(2) 原计划单向开挖, 但为了加快施工进度, 从 B 、 C 两端同时相向开挖, 这样每天的工作效率提高了 20%, 结果提前 2 天完工. 问原计划单向开挖每天挖多少米?

【答案】 (1) 1200 米

(2) 原计划单向开挖每天挖 100 米

【解析】

【分析】 (1) 由题意易得 $\angle CBE = 37^\circ$, 然后根据三角函数可进行求解;

(2) 设原计划单向开挖每天挖 x 米, 根据题意可得方程 $\frac{1200}{x} = \frac{1200}{(1+20\%)x} + 2$, 然后求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle ABE = 143^\circ$,

$\therefore \angle CBE = 37^\circ$,

$\because CE \perp AD$, $BE = 1500$ 米,

$\therefore BC = BE \cdot \cos 37^\circ \approx 1200$ 米;

答: 隧道两端 B 、 C 之间的距离为 1200 米.

【小问 2 详解】

解: 设原计划单向开挖每天挖 x 米, 根据题意可得:

$$\frac{1200}{x} = \frac{1200}{(1+20\%)x} + 2,$$

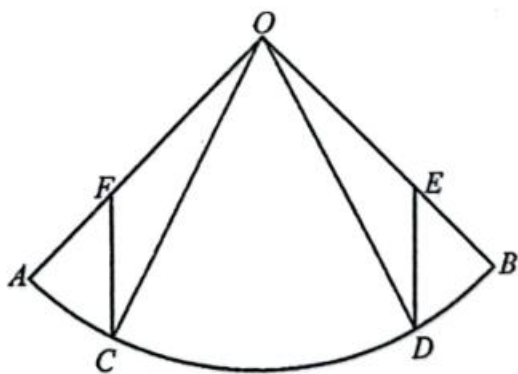
解得: $x = 100$,

经检验: $x = 100$ 是原方程的解且满足题意,

答: 原计划单向开挖每天挖 100 米.

【点睛】 本题主要考查解直角三角形及分式方程的应用, 熟练掌握三角函数是解题的关键.

23. 如图, 在扇形 AOB 中, 点 C 、 D 在 $\widehat{AB}$ 上, $\widehat{AD} = \widehat{CB}$, 点 F 、 E 分别在半径 OA 、 OB 上, $OF = OE$, 连接 DE 、 CF .



(1) 求证: $DE = CF$;

(2) 设点 P 为 $\widehat{CD}$ 的中点, 连接 CD 、 EF 、 PO , 线段 PO 交 CD 于点 M 、交 EF 于点 N . 如果 $PO \parallel DE$, 求证: 四边形 $MNED$ 是矩形.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, 则有 $\angle FOC = \angle EOD$, 然后可证 $\triangle FOC \cong \triangle EOD$, 进而问题可求证;

(2) 由 (1) 可知: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, $DE = CF$, 然后可得扇形 AOB 关于 OP 对称, 则有 $EF \parallel CD$, 进而问题可求证.

【小问 1 详解】

证明: $\because \widehat{AD} = \widehat{CB}$, $\widehat{CD}$ 是公共弧,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle FOC = \angle EOD,$$

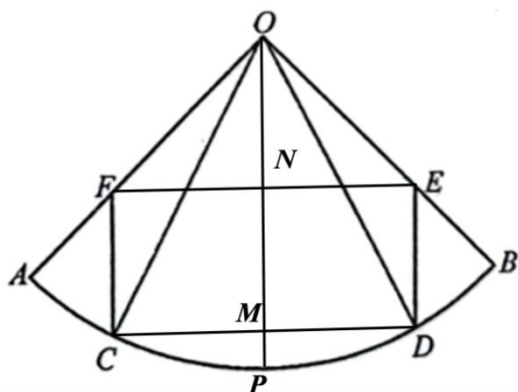
$$\because OF = OE, OC = OD,$$

$$\therefore \triangle FOC \cong \triangle EOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = CF;$$

【小问 2 详解】

解: 如图所示:



由 (1) 可知: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$, $DE = CF$,

$\therefore$ 点 P 为 $\widehat{CD}$ 的中点,

$\therefore \widehat{PC} = \widehat{PD}$, $OP \perp CD$,

$\therefore$ 扇形 AOB 关于 OP 对称,

$\therefore \angle ONE = \angle OMD = 90^\circ$,

$\therefore EF \parallel CD$,

$\therefore PO \parallel DE$,

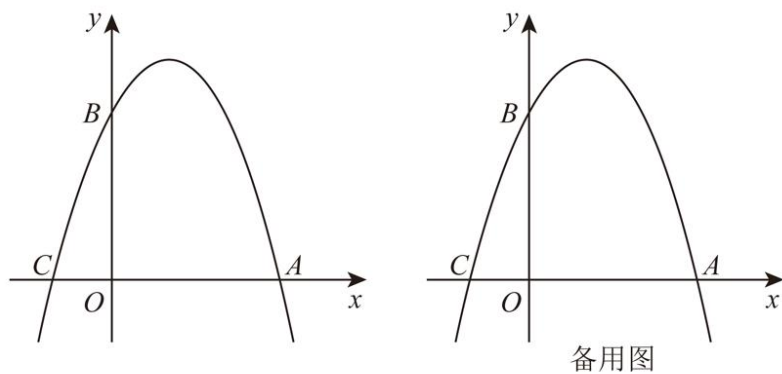
$\therefore$ 四边形 $MNED$ 是平行四边形,

$\therefore \angle OMD = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $MNED$ 是矩形.

【点睛】 本题主要考查垂径定理、圆的基本性质及矩形的判定, 熟练掌握垂径定理、圆的基本性质及矩形的判定是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$, 与 x 轴的负半轴交于点 C .



(1) 求该抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 设点 D 在该抛物线上 (位于对称轴右侧部分), 连接 CD .

①如果 CD 与线段 AB 交于点 E , 且 $BE = 2AE$, 求 $\angle ACD$ 的正切值;

②如果 CD 与 y 轴交于点 F , 以 CF 为半径的 $\odot C$, 与以 DB 为半径的 $\odot D$ 外切, 求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $C(-1, 0)$

(2) ① $\tan \angle ACD = \frac{1}{3}$; ② $D\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 把点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入抛物线解析式可求解, 然后令 $y = 0$ 可求点 C 的坐标;

(2) ①根据题意作图, 则过点 E 作 $EG \perp AC$ 于点 G , 然后可得 $\triangle AEG \sim \triangle ABO$, 则根据相似三角形的性质可得点 E 坐标, 进而问题可求解; ②由题意可知 $BD = DF$, 然后过点 D 作 $DH \perp BO$ 于点 H , 设点 $D(a, -a^2 + 2a + 3)$, 则有 $OH = -a^2 + 2a + 3$, $DH = a$, 进而问题可求解.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 代入抛物线解析式得:

$$\begin{cases} -9 + 3m + n = 0 \\ n = 3 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases},$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

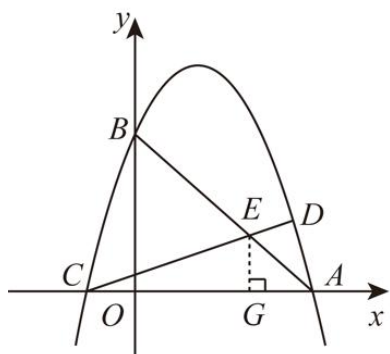
令 $y = 0$, 则有 $-x^2 + 2x + 3 = 0$,

解得: $x_1 = -1, x_2 = 3$,

$\therefore C(-1, 0)$;

【小问 2 详解】

解: ①如图所示:



过点 E 作 $EG \perp AC$ 于点 G ,

$$\therefore EG \parallel OB,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{EG}{OB} = \frac{AE}{AB},$$

$$\because \text{点 } A(3,0)、B(0,3),$$

$$\therefore OA = OB = 3, \text{ 即 } \triangle AOB \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\because BE = 2AE,$$

$$\therefore \frac{EG}{3} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } EG = 1,$$

$$\because \triangle AEG \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \triangle AEG \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore AG = EG = 1,$$

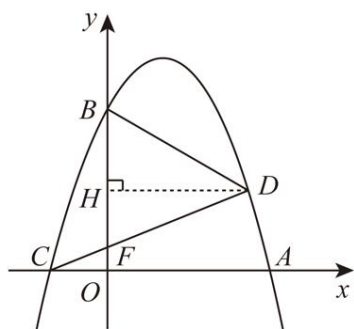
$$\therefore OG = 2,$$

$$\text{由 (1) 可知 } C(-1,0),$$

$$\therefore CG = 3,$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{EG}{CG} = \frac{1}{3};$$

②如图所示:



$$\therefore \text{以 } CF \text{ 为半径的 } \odot C \text{ 与以 } DB \text{ 为半径的 } \odot D \text{ 外切},$$

$$\therefore \odot C \text{ 与 } \odot D \text{ 相切于点 } F, \text{ 即 } DB = DF,$$

过点 D 作 $DH \perp BO$ 于点 H ,

$$\therefore BH = FH, \quad DH \parallel OC,$$

$$\therefore \triangle DHF \sim \triangle COF,$$

$$\therefore \frac{DH}{OC} = \frac{HF}{OF},$$

设点 $D(a, -a^2 + 2a + 3)$, 则有 $OH = -a^2 + 2a + 3, DH = a, OC = 1$,

$$\therefore \frac{HF}{OF} = \frac{1}{a},$$

$$\therefore OF = \frac{1}{a+1}OH, HF = \frac{a}{a+1}OH,$$

$$\therefore OF = 3 - a, HF = BH = -a^2 + 3a,$$

$$\therefore OB = OF + 2FH = 3 - a - 2a^2 + 6a = -2a^2 + 5a + 3 = 3,$$

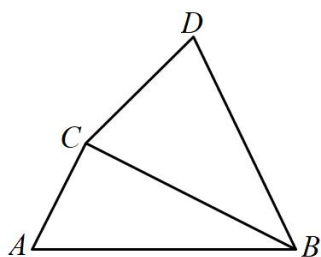
$$\text{解得: } a_1 = \frac{5}{2}, a_2 = 0 \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

$$\therefore D\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right);$$

当点 D 在 x 轴的下方时, 显然 $CD < BD$, 所以以 CF 为半径的 $\odot C$ 与以 DB 为半径的 $\odot D$ 不会外切.

【点睛】本题主要考查圆与圆的位置关系及二次函数的综合, 熟练掌握圆与圆的位置关系及二次函数的综合问题是解题的关键.

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, 以 BC 为边作 $\triangle DBC$ (点 D, A 在直线 BC 的异侧), 且满足 $BD = BC$, $\angle BCD = \angle ABC + 45^\circ$.



(1) 求证: $\angle A = \angle ABD$;

(2) 设点 E 为边 BC 的中点, 连结 DE 并延长交边 AB 于点 F , 当 $\triangle BEF$ 为直角三角形时, 求边 AC 的长;

(3) 设 $AB = x$, $CD = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域.

【答案】(1) 见详解 (2) $AC = 2 - \sqrt{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

$$(3) y = \frac{\sqrt{2}}{x} - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}, \quad 1 < x < \sqrt{2}$$

【解析】

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质可知 $\angle BCD = \angle D = \angle ABC + 45^\circ$, 然后根据三角形内角和可进行求解;

(2) 由题意可分: ①当 $\angle FEB = 90^\circ$ 时, ②当 $\angle EFB = 90^\circ$ 时, 然后分别画出图形, 进而根据含 30° 直

角三角形的性质及三角函数可进行求解;

(3) 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M , 交 BC 于点 N , 过点 N 作 $NQ \perp CD$ 于点 Q , 由题意易得 $\triangle ACB \sim \triangle BMD$,

则有 $DM = \frac{1}{x}$, $BM = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, 然后可得 $\triangle BMN \sim \triangle DMB$, $\triangle ABC \sim \triangle NBM$, 进而根据相似三角形的

性质及三角函数可进行求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because BD = BC$, $\angle BCD = \angle ABC + 45^\circ$,

$$\therefore \angle BCD = \angle D = \angle ABC + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 180^\circ - 2\angle BCD = 90^\circ - 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ - \angle ABC,$$

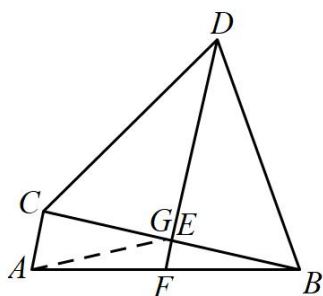
$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ABC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD;$$

【小问 2 详解】

解: 由题意可分: ①当 $\angle FEB = 90^\circ$ 时,



$\because$ 点 E 为边 BC 的中点, 且 $DE \perp BC$,

$$\therefore CD = BD,$$

$$\because BD = BC,$$

$$\therefore BD = BC = CD,$$

$\therefore \triangle BDC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BCD = \angle ABC + 45^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 15^\circ,$$

在 BC 上取一点 G , 使得 $AG = BG$,

$$\therefore \angle GAB = \angle ABC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle AGC = 30^\circ,$$

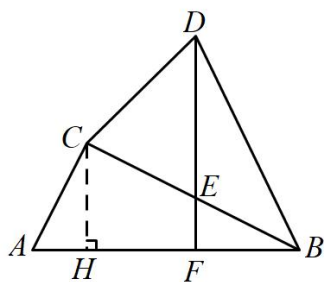
$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AG = BG = 2AC, CG = \sqrt{3}AC,$$

$$\therefore BC = CG + BG = (2 + \sqrt{3})AC = 1,$$

$$\therefore AC = 2 - \sqrt{3};$$

②当 $\angle EFB = 90^\circ$ 时,



过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H ,

$$\therefore \angle BHC = \angle DFB = 90^\circ, EF \parallel CH,$$

由 (1) 可知 $\angle A = \angle ABD$,

$$\therefore \angle A + \angle ABC = \angle HCB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle HCB = \angle FBD,$$

$$\therefore BC = BD,$$

$$\therefore \triangle CHB \cong \triangle BFD (\text{AAS}),$$

$$\therefore CH = BF,$$

$$\therefore EF \parallel CH,$$

$$\therefore \triangle CHB \sim \triangle EFB,$$

$\therefore$ 点 E 为边 BC 的中点,

$$\therefore \frac{EF}{CH} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2} = \tan \angle ABC,$$

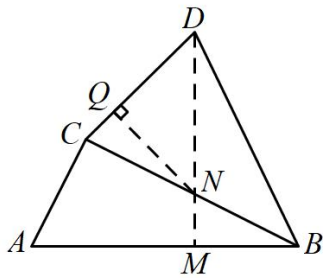
$$\therefore BC = 1,$$

$$\therefore AC = BC \cdot \tan \angle ABC = \frac{1}{2};$$

综上所述: 当 $\triangle BEF$ 为直角三角形时, $AC = 2 - \sqrt{3}$ 或 $\frac{1}{2}$;

【小问 3 详解】

解：过点 D 作 $DM \perp AB$ 于点 M ，交 BC 于点 N ，过点 N 作 $NQ \perp CD$ 于点 Q ，如图所示：



由 (1) 可知 $\angle A = \angle ABD$ ，

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle BMD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDM, \frac{DB}{AB} = \frac{DM}{BC},$$

$$\because BD = BC = 1, AB = x,$$

$$\therefore DM = \frac{1}{x},$$

$$\therefore BM^2 = BD^2 - DM^2 = 1 - \frac{1}{x^2}, \text{ 即 } BM = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

$$\because \angle DMB = \angle BMN, \angle MBN = \angle MDB, \angle ACB = \angle NMB = 90^\circ, \angle ABC = \angle NBM,$$

$$\therefore \triangle BMN \sim \triangle DMB, \triangle ABC \sim \triangle NBM,$$

$$\therefore \frac{BM}{DM} = \frac{MN}{MB}, \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB},$$

$$\therefore MN = x - \frac{1}{x}, BN = x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

$$\therefore DN = DM - MN = \frac{2}{x} - x, CN = BC - BN = 1 - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},$$

$$\because \angle ABC = \angle BDM, \text{ 由 (1) 知 } \angle BCD = \angle BDC = \angle ABC + 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDN = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle QDN \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore QD = QN = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{x} - x \right) = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CQN \text{ 中, 由勾股定理得: } CQ = \sqrt{\left(1 - x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 2x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{2}{x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2}\left(x - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right), \\
\therefore y = CQ + QD &= \frac{\sqrt{2}}{x} - 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},
\end{aligned}$$

$$\because \angle BCD = \angle ABC + 45^\circ < 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC < 45^\circ,$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\cos \angle ABC} < \sqrt{2},$$

$$\because AB \text{ 是斜边,}$$

$$\therefore 1 < AB < \sqrt{2}, \text{ 即 } 1 < x < \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题主要考查函数解析式、等腰三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及三角函数，熟练掌握函数解析式、等腰三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及三角函数是解题的关键.

