

2022 学年第二学期初三数学教学质量调研试卷

一、选择题

1. 下列实数中，比 3 大的有理数是 ()

- A. $|-3|$ B. π C. $\frac{22}{7}$ D. $\sqrt{17}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据无理数的概念判断， π ， $\sqrt{17}$ 是无理数，再比较大小即可.

【详解】解： $\because |-3|=3$ ，而 $\frac{22}{7}>3$ ， π ， $\sqrt{17}$ 是无理数， $\frac{22}{7}$ 是有理数，

$\therefore$ 比 3 大的有理数是 $\frac{22}{7}$ ；

故选：C.

【点睛】本题考查的是有理数与无理数的识别，实数的大小比较，熟记无理数的概念是解本题的关键.

2. 用换元法解方程 $\frac{x-1}{x^2} - \frac{x^2}{x-1} = 3$ 时，如果设 $\frac{x-1}{x^2} = y$ ，那么原方程可化为关于 y 的方程是 ()

- A. $y^2 + 3y - 1 = 0$ B. $y^2 - 3y - 1 = 0$ C. $y^2 - 3y + 1 = 0$ D. $y^2 + 3y + 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】设 $\frac{x-1}{x^2} = y$ ，则原方程可化为 $y - \frac{1}{y} = 3$ ，去分母即可.

【详解】解： $\frac{x-1}{x^2} - \frac{x^2}{x-1} = 3$ ，

设 $\frac{x-1}{x^2} = y$ ，

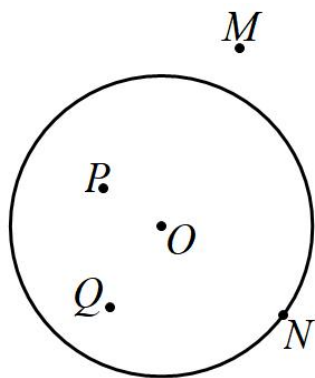
则原方程可化为 $y - \frac{1}{y} = 3$ ，

则 $y^2 - 3y - 1 = 0$ ，故 B 正确.

故选：B.

【点睛】本题考查了用换元法解分式方程，解此题的关键是能正确换元.

3. 如图，已知 $\odot O$ 及其所在平面内的 4 个点. 如果 $\odot O$ 半径为 5，那么到圆心 O 距离为 7 的点可能是 ()



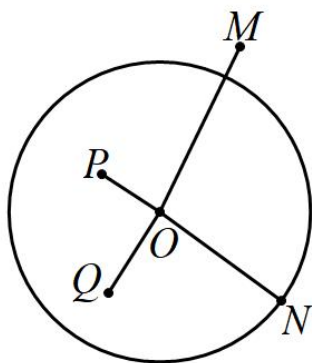
- A. P 点 B. Q 点 C. M 点 D. N 点

【答案】C

【解析】

【分析】根据点与圆的位置关系即可求解.

【详解】解：根据题意得， $\odot O$ 半径为 $r=5$ ，如图所示，连接 OP, OQ, ON, OM ，



$$\therefore OP < r = 5, OQ < r = 5, ON = r = 5, OM > r = 5,$$

$\therefore$ 到圆心 O 距离为 7 的点可能是点 M ，

故选：C.

【点睛】本题主要考查点与圆的位置关系，理解并掌握点到圆心的线段与圆的半径的大小关系是解题的关键.

4. 下列命题中，假命题的是（ ）

- A. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形 B. 对角线互相垂直的梯形是等腰梯形
C. 对角线平分一组对角的平行四边形是菱形 D. 对角线平分一组对角的矩形是正方形

【答案】B

【解析】

【分析】根据矩等腰梯形、菱形和正方形的判定一一判断即可.

【详解】解：A、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，为真命题，不符合题意；

B、对角线互相垂直的梯形是等腰梯形，还有可能为直角梯形等其它梯形，为假命题，符合题意；

C、对角线平分一组对角的平行四边形是菱形，为真命题，不符合题意；

D、对角线平分一组对角的矩形是正方形，为真命题，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了命题，等腰梯形、菱形和正方形的判定等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

5. 某抖音卖货小店专门营销一类货品，以八种型号销售，一段时间内的销售数据如下表所示：

货品型号	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
销售数据（件）	2	4	5	13	8	7	3	1

如果每件货品销售利润都相同，该小店决定多进一些 *D* 型号货品，那么影响店主决策的统计量是（ ）

A. 平均数

B. 中位数

C. 标准差

D. 众数

【答案】D

【解析】

【分析】根据各种统计量的含义及性质进行选择即可.

【详解】这个问题中店主最关心的是货品的销售量，所以影响决策是统计量是众数.

故选：D

【点睛】本题主要考查平均数、中位数、标准差、众数的特点，理解题意是解题的关键.

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(2, t)$ ， $B(3, t)$ ， $C(4, 2)$ ，那么 $a + b + c$ 的值是（ ）

A. 2

B. 3

C. 4

D. t

【答案】A

【解析】

【分析】把点 $A(2, t)$ ， $B(3, t)$ ， $C(4, 2)$ 代入抛物线，解三元一次方程组即可求解.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(2, t)$ ， $B(3, t)$ ， $C(4, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + c = t \\ 9a + 3b + c = t \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} a = 1 - \frac{1}{2}t \\ b = \frac{5}{2}t - 5 \\ c = 6 - 2t \end{cases},$$

$$\therefore a + b + c = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{5}{2}t - 5 + 6 - 2t = 2,$$

故选：A.

【点睛】本题主要考查二次函数与三元一次方程组的综合，掌握二次函数的代入法，解三元一次方程组的方法是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 计算： $2x \cdot (-3xy^2) =$ _____ .

【答案】 $-6x^2y^2$

【解析】

【分析】根据单项式乘单项式法则计算.

【详解】解： $2x \cdot (-3xy^2) = -6x^2y^2$.

故答案为： $-6x^2y^2$.

【点睛】本题考查了单项式乘单项式，解题的关键是掌握运算法则. 单项式乘以单项式的法则：单项式乘以单项式，就是把系数和相同字母分别相乘，作为积的因式.

8. 函数 $y = \sqrt{x+2}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【分析】根据二次根式被开方数大于等于 0，列不等式求解即可.

【详解】解：由题意得， $x+2 \geq 0$,

解得 $x \geq -2$,

故答案为： $x \geq -2$.

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围，函数自变量的范围一般从三个方面考虑：（1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；（2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；（3）当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

9. 已知 $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ，那么 $f(\sqrt{5}) =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】直接把 $x = \sqrt{5}$ 代入 $\frac{x}{x^2-1}$ 中进行求解即可.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,

$$\therefore f(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2 - 1} = \frac{\sqrt{5}}{5-1} = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

【点睛】 本题主要考查了新定义下的实数运算，正确理解题意是解题的关键.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 2c = 0$ 有实数根，那么实数 c 的取值范围是_____.

【答案】 $c \leq 2$

【解析】

【分析】 由一元二次方程有实数根则 $\Delta \geq 0$ 解答.

【详解】 解: $\because$ 方程 $x^2 - 4x + 2c = 0$ 有实数根,

$$b^2 - 4ac = 16 - 8c \geq 0,$$

$$\therefore c \leq 2.$$

故答案为: $c \leq 2$.

【点睛】 本题考查一元二次方程根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

$$11. \text{不等式组} \begin{cases} x < 3x - 4 \\ \frac{2+x}{2} \geq x - 1 \end{cases} \text{的正整数解是} \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3, 4

【解析】

【分析】 先分别求出每个不等式的解集，进而得出不等式组的解集，再确定整数解即可.

$$\text{【详解】} \begin{cases} x < 3x - 4 \text{①} \\ \frac{2+x}{2} \geq x - 1 \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，得 $x > 2$;

解不等式②，得 $x \leq 4$,

所以不等式组的解集是 $2 < x \leq 4$.

可知整数解是 3, 4.

故答案为: 3, 4.

【点睛】 本题主要考查了求一元一次不等式组的整数解，掌握解一元一次不等式组的步骤是解题的关键.

12. 已知线段 $a=3$ ， $b=4$ ，从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这八个数中任意选取一个数作为线段 c 的长度，那么 a , b , c 不能组成三角形的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】 先根据三角形三边关系确定不能组成三角形的 c 的取值范围，再根据概率公式求解即可.

【详解】 解： $\because a=3$ ， $b=4$ ，

$\therefore$ 线段 a , b , c 组成三角形时 c 的取值范围 $4-3 < c < 4+3$ ，即 $1 < c < 7$ ，

$\therefore$ 当 $0 < c \leq 1$ 或 $c \geq 7$ 时，线段 a , b , c 不能组成三角形，

$\therefore$ 在 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这八个数中任意选取一个数作为线段 c 的长度，不能组成三角形的是 1, 7, 8 这三个数，

所以， a , b , c 不能组成三角形的概率是 $\frac{3}{8}$ ，

故答案为： $\frac{3}{8}$

【点睛】 此题考查概率的求法：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种可能，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$. 用到的知识点为：构成三角形的基本要求为两小边之和大于第三边.

13. 为了解某区九年级 3000 名学生中“4 分钟跳绳”能获得满分的学生人数，区体测中心随机调查了其中的 200 名学生，结果仅有 45 名学生未获满分，那么估计该区九年级“4 分钟跳绳”能获得满分的学生人数约为_____.

【答案】 2325

【解析】

【分析】 根据 200 名学生，结果仅有 45 名学生未获满分求得九年级“4 分钟跳绳”能获得满分的学生人数所占总数的百分比，即可得到结论.

【详解】 解： $3000 \times \frac{200-45}{200} = 2325$ (名)，

答：估计该区九年级“4 分钟跳绳”能获得满分的学生人数约为 2325 名.

故答案为： 2325 名.

【点睛】 本题考查了用样本估计总体，正确的理解题意是解题的关键.

14. 已知点 $A(-4, m)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 点 A 关于 y 轴的对称点 A_1 恰好在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上, 那么 k 的值为_____.

【答案】 -8

【解析】

【分析】由点 A 与点 A_1 关于 y 轴的对称, 可得到 $A_1(4, m)$, 代入 $y = \frac{1}{2}x$ 即可求得 m 的值, 从而求得 $A(-4, 2)$, 进而即可求出 k 的值.

【详解】解: $\because$ 点 A 与点 A_1 关于 y 轴的对称, 点 $A(-4, m)$,

$\therefore A_1(4, m)$,

$\because$ 点 A_1 恰好在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上,

$\therefore m = 2$,

$\therefore A(-4, 2)$,

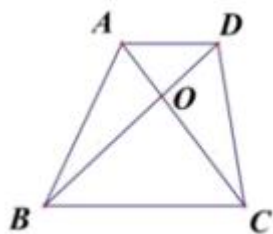
$\because$ 点 $A(-4, m)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$\therefore k = -4 \times 2 = -8$,

故答案为: -8.

【点睛】本题考查反比例函数图象上的点坐标的特征, 一次函数图象上点的坐标特征, 关于 y 轴对称的点的坐标的特征, 掌握方程思想是解题的关键.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC$, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CO} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AB} =$ _____. (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $-\frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$

【解析】

【分析】由 $AD \parallel BC$, 即可证得 $\triangle AOD \sim \triangle OBC$, 又由 $AD = \frac{1}{2}BC$, 即可求得 $\overrightarrow{CB}$ 和 $\overrightarrow{AO}$, 再运用向量

的和差即可求得 $\overrightarrow{AB}$.

【详解】解: $\because AD \parallel BC, AD = \frac{1}{2}BC,$

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2},$$

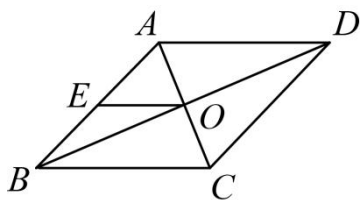
$$\therefore CB = -2AD = -2a, \quad AO = -\frac{1}{2}CO = -\frac{1}{2}b,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = -\frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{a}.$$

故答案为: $-\frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$.

【点睛】本题主要考查向量的和差、相似三角形的判定与性质等知识点, 掌握数形结合思想的应用以及明确向量是有方向的是解题的关键.

16. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 已知 $BD = 16$, $\tan \angle OCD = \frac{4}{3}$, 如果点 E 是边 AB 的中点, 那么 $OE =$ _____.



【答案】5

【解析】

【分析】根据菱形的性质得到 $AC \perp BD$, $AO = CO$, $BO = DO = \frac{1}{2}BD = 8$, 根据三角函数的定义得到 $OA = 6$, 根据勾股定理得到 $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = 10$, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可得到结论.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad AO = CO, \quad BO = DO = \frac{1}{2}BD = 8,$$

$$\because \tan \angle OCD = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OC = 6,$$

$$\therefore OA = 6,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = 10,$$

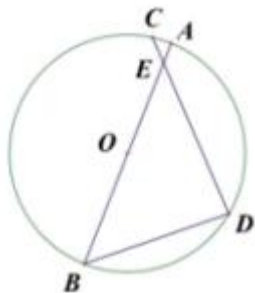
$\therefore$ 点 E 是边 AB 的中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = 5.$$

故答案为：5.

【点睛】本题考查了菱形的性质，解直角三角形，直角三角形的性质，熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

17. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 与弦 CD 交于点 E ，已知 $\angle CEA = 45^\circ$ ， $DE = 7$ ， $OE = 3\sqrt{2}$ ，那么 $\cot \angle ABD$ 的值为_____.

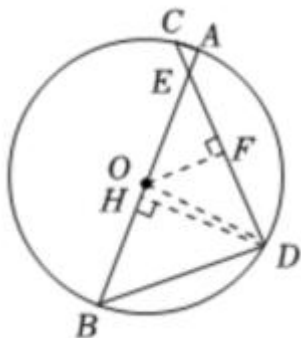


【答案】 $\frac{5\sqrt{2}-1}{7}$

【解析】

【分析】过点 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F ，连接 OD ，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，根据 $OE = 3\sqrt{2}$ ，求出 $OF = EF = 3$ ，根据勾股定理求出 $OD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，得出 $BE = 5 + 3\sqrt{2}$ ，求出 $EH = DH = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ ，得出 $BH = 5 + 3\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2} = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ，即可求出结果.

【详解】解：过点 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F ，连接 OD ，过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ，如图所示：



$$\therefore \angle CEA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OFE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle OEF$ 为等腰直角三角形，

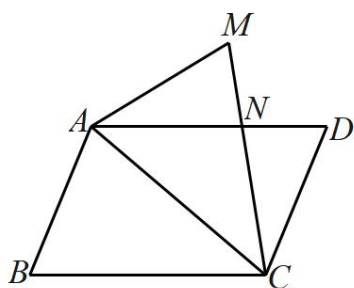
$$\begin{aligned}
&\because OE = 3\sqrt{2}, \\
&\therefore OF = EF = 3, \\
&\because DE = 7, \\
&\therefore DF = 4, \\
&\therefore OD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \\
&\therefore OB = 5, \quad BE = 5 + 3\sqrt{2}, \\
&\because \angle DEH = 45^\circ, \quad \angle DHE = 90^\circ, \\
&\therefore \triangle DEH \text{ 为等腰直角三角形}, \\
&\because DE = 7, \\
&\therefore EH = DH = \frac{7\sqrt{2}}{2}, \\
&\therefore BH = 5 + 3\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{2}}{2} = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
&\therefore \cot \angle ABD = \frac{BH}{DH} = \frac{5 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 1}{7}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\frac{5\sqrt{2} - 1}{7}$.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理，求余切值，等腰直角三角形的性质，解题的关键是作出辅助线，构造直角三角形，熟练掌握余切的定义.

18. 如图，将平行四边形 $ABCD$ 沿着对角线 AC 翻折，点 B 的对应点为 M ， CM 交 AD 于点 N ，如果 $\angle B = 76^\circ$ ， $\angle ACM = \angle DCM + 10^\circ$ ，且 $NC = m$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 的周长为_____。（参考数

据: $\cos 76^\circ \approx 0.24, \tan 76^\circ \approx 4$ ）



【答案】 $4.96m$

【解析】

【分析】由 $\angle B = 76^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，折叠的性质可得 $\triangle ANC$ 是等腰三角形， $AN = NC$ ，设 $\angle DCM = x$ ，则 $\angle ACM = \angle ACB = x + 10^\circ$ ，由三角形的内角和定理得 $\angle DCM = 28^\circ$ ，由外角性质可证明 $\triangle DNC$ 为等腰三角形，继而得到 $DN = CN = AN = m$ ，解得 $\angle BCM = 2\angle ACM = 76^\circ$ ，分别过点 A 、 N 作 $AE \perp BC$ ， $NF \perp BC$ ，利用余弦定理分别解得 BE 、 FC 的长，最后求得平行四边形的周长。

【详解】解： $\because \angle B = 76^\circ$ ，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore \angle D = 76^\circ$$

$\because$ 翻折

$$\therefore \angle ACM = \angle ACB$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ACM = \angle DAC$$

$\therefore \triangle ANC$ 是等腰三角形

$$\therefore AN = NC$$

设 $\angle DCM = x$ ，则 $\angle ACM = \angle ACB = x + 10^\circ$

在 $\triangle DAC$ 中，由三角形内角和定理可得

$$x + 2(x + 10) + 76^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 28^\circ$$

$$\therefore \angle BCM = 2\angle ACM = 2(x + 10^\circ) = 76^\circ$$

分别过点 A 、 N 作 $AE \perp BC$ ， $NF \perp BC$

在 $Rt\triangle NFC$ 中， $FC = NC \cos 76^\circ = 0.24m$

在 $Rt\triangle ABE$ 中， $BE = AB \cos 76^\circ = 0.24m$

$$\therefore BC = BE + EF + FC = 0.24m + m + 0.24m = 1.48m$$

平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB + BC) = 2(m + 1.48m) = 4.96m$

故答案为： $4.96m$.

【详解】解：
$$\begin{cases} x+y=2 \text{①} \\ x^2-9y^2=0 \text{②} \end{cases}$$

由②得： $(x+3y)(x-3y)=0$,

$\therefore x+3y=0$ 或 $x-3y=0$ 。

从而有
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=2 \\ x-3y=0 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{3}{2} \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases},$$

故原方程组的解是
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{3}{2} \\ y_2=\frac{1}{2} \end{cases},$$

【点睛】 本题考查了二元二次方程组的解法，平方差公式，加减消元法解二元一次方程，利用平方差公式将二元二次方程降次是解题的关键。

21. 已知点 $A(-2, m)$ 在双曲线 $y = -\frac{4}{x}$ 上，将点 A 向右平移 5 个单位得到点 B 。

(1) 当点 B 在直线 $y = -2x + b$ 上时，求直线 $y = -2x + b$ 的表达式；

(2) 当线段 AB 被直线 $y = -2x + b$ 分成两部分，且这两部分长度的比为 $3:2$ 时，求 b 的值。

【答案】 (1) $y = -2x + 8$

(2) $b = 2$ 或 $b = 4$

【解析】

【分析】 (1) 根据点 $A(-2, m)$ 在双曲线 $y = -\frac{4}{x}$ 上，求出点 A 坐标，根据点平移得到点 B 的坐标，将点 B 的坐标代入直线解析式即可得到答案；

(2) 根据 $A(-2, 2)$ ， $B(3, 2)$ ，得到 $AB = 5$ ，根据线段 AB 被分得的两段的长度比为 $3:2$ ，得到分割点坐标分类讨论即可得到答案。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 $A(-2, m)$ 在双曲线 $y = -\frac{4}{x}$ 上，

$$\therefore m = -\frac{4}{-2} = 2, \text{ 即 } A(-2, 2),$$

又 $\because$ 将点 A 向右平移 5 个单位得到点 B ,

$$\therefore B(3, 2),$$

当点 B 在直线 $y = -2x + b$ 上时, 有 $2 = -2 \times 3 + b$, 解得 $b = 8$,

$\therefore$ 直线 $y = -2x + b$ 的表达式为 $y = -2x + 8$;

【小问 2 详解】

解: $\because A(-2, 2), B(3, 2)$,

$$\therefore AB = 5,$$

$\therefore$ 线段 AB 被分得的两段的长度比为 $3:2$,

故分割点为 $C(0, 2)$ 或 $D(1, 2)$,

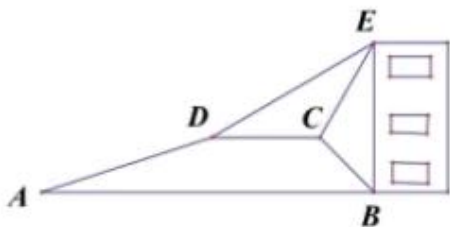
当分割点为 $C(0, 2)$ 时, $2 = -2 \times 0 + b$, 得 $b = 2$,

当分割点为 $D(1, 2)$ 时, $2 = -2 \times 1 + b$, 得 $b = 4$,

综上, $b = 2$ 或 $b = 4$;

【点睛】 本题考查反比例函数与一次函数综合题, 解题的关键是根据反比例函数求出点的坐标, 代入直线解出直线解析式.

22. 为了测量某建筑物的高度 BE , 从与建筑物底端 B 在同一水平线的点 A 出发, 沿着坡比为 $i = 1:2.4$ 的斜坡行走一段路程至坡顶 D 处, 此时测得建筑物顶端 E 的仰角为 30° , 再从 D 处沿水平方向继续行走 100 米后至点 C 处, 此时测得建筑物顶端 E 的仰角为 60° , 建筑物底端 B 的俯角为 45° , 如图, 已知点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 在同一平面内, 求建筑物 BE 的高度与 AD 的长. (参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$)



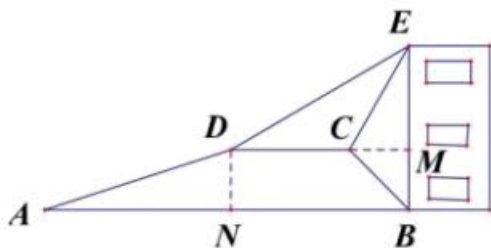
【答案】 建筑物 BE 的高度为 136.6 米, AD 的长为 130 米

【解析】

【分析】 如图, 过点 C 、 D 分别作 BE 、 AB 的垂线, 垂足分别为 M 、 N , 则四边形 $BMDN$ 是矩形, $BM = DN$, 由题意可得 $DC = 100$ 米, $\angle EDM = 30^\circ$, $\angle ECM = 60^\circ$, $\angle BCM = \angle CBM = 45^\circ$, 则

$\angle DEC = \angle ECM - \angle EDM = 30^\circ = \angle EDM$, $BM = CM$, $EC = DC = 100$ 米, $CM = 50$ 米, 则 $DN = BM = CM = 50$ 米, $EM = 50\sqrt{3}$ 米, 根据 $BE = BM + EM$ 计算求解可得 BE 的值, 由坡比可得 $\frac{DN}{AN} = \frac{1}{2.4}$, 即 $\frac{50}{AN} = \frac{1}{2.4}$, 解得 $AN = 120$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中, 由勾股定理可得: $AD = \sqrt{AN^2 + DN^2}$, 计算求解即可.

【详解】解: 如图, 过点 C 、 D 分别作 BE 、 AB 的垂线, 垂足分别为 M 、 N , 则四边形 $BMDN$ 是矩形, $BM = DN$,



由题意可得: $DC = 100$ 米, $\angle EDM = 30^\circ$, $\angle ECM = 60^\circ$, $\angle BCM = \angle CBM = 45^\circ$,

$\therefore \angle DEC = \angle ECM - \angle EDM = 30^\circ = \angle EDM$, $BM = CM$,

$\therefore EC = DC = 100$ 米,

$\therefore CM = EC \cdot \cos \angle ECM = 50$ 米, 则 $DN = BM = CM = 50$ 米,

$\therefore EM = CM \cdot \tan \angle ECM = 50\sqrt{3}$ 米,

$\therefore BE = BM + EM = 50\sqrt{3} + 50 \approx 136.6$ 米,

$\therefore$ 斜坡 AD 的坡比为 $i = 1:2.4$,

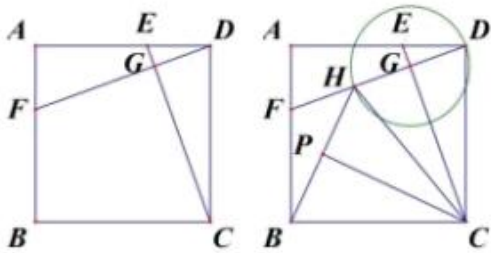
$\therefore \frac{DN}{AN} = \frac{1}{2.4}$, 即 $\frac{50}{AN} = \frac{1}{2.4}$, 解得 $AN = 120$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle ADN$ 中, 由勾股定理可得: $AD = \sqrt{AN^2 + DN^2} = 130$ 米,

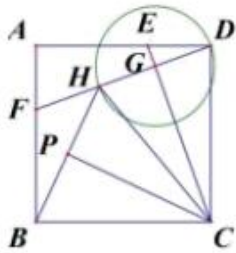
答: 建筑物 BE 的高度为 136.6 米, AD 的长为 130 米.

【点睛】 本题考查了矩形的判定与性质, 三角形的外角性质, 等角对等边, 解直角三角形的应用, 勾股定理等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

23. 如图 1, 点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 AD 、 AB 上, CE 与 DF 交于点 G . 已知 $AE + AF = AB$.



(图 1)



(图 2)

(1) 求证: $CE \perp DF$;

(2) 以点 G 为圆心, GD 为半径的圆与线段 DF 交于点 H , 点 P 为线段 BH 的中点, 联结 CP , 如图 2 所示, 求证: $\angle BCP + \angle DCE = \angle ECP$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先根据正方形的性质证明 $AF = DE$, 再证明 $\triangle ADF \cong \triangle DCE(\text{SAS})$, 再根据等角的余角相等即可得出结论;

(2) 根据圆的知识证明 CE 垂直平分 DH , 再根据等腰三角形的性质与判定即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $AD = AB = AC - CD$,

$$\angle DAF = \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\because AE + AF = AB, \quad AE + DE = AD,$$

$$\therefore AF = DE,$$

故 $\triangle ADF \cong \triangle DCE(\text{SAS})$,

$$\therefore \angle ADF = \angle DCE,$$

$$\because \angle ADF + \angle FDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE + \angle FDC = 90^\circ, \quad \text{即 } \angle DGC = 90^\circ$$

$$\therefore CE \perp DF;$$

【小问 2 详解】

由题意可知: $DG = HG$, 且 (1) 有: $CE \perp DF$,

$$\therefore CE \text{ 垂直平分 } DH, \text{ 故 } CD = CH = CB,$$

在 $\triangle DCH$ 中, $CD = CH$, $CE \perp DF$, $\therefore \angle DCE = \angle ECH$,

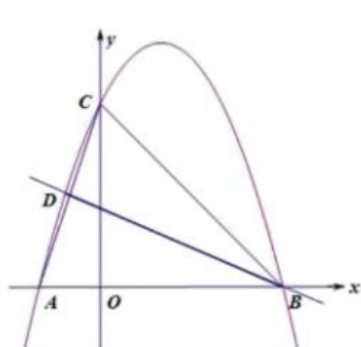
在 $\triangle BCH$ 中, $CB = CH$, P 为线段 BH 的中点, $\angle BCP = \angle HCP$,

故 $\angle BCP + \angle DCE = \angle HCP + \angle ECH$,

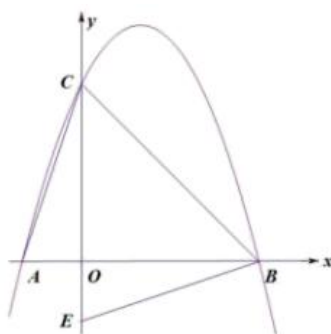
$\therefore \angle BCP + \angle DCE = \angle ECP$.

【点睛】本题考查的是圆的知识、正方形的性质、全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，掌握等腰三角形的性质与判定是解题的关键.

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + 6$ 与 x 轴交于点 A 、点 B (点 A 在点 B 的左侧，点 B 在原点 O 右侧)，与 y 轴交于点 C ，且 $OB = OC$.



(图 1)



(图 2)

(1) 求抛物线的表达式.

(2) 如图 1，点 D 是抛物线上一点，直线 BD 恰好平分 $\triangle ABC$ 的面积，求点 D 的坐标;

(3) 如图 2，点 E 坐标为 $(0, -2)$ ，在抛物线上存在点 P ，满足 $\angle OBP = 2\angle OBE$ ，请直接写出直线 BP 的表达式.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(2) $\left(-\frac{8}{7}, \frac{150}{49}\right)$

(3) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ 或 $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$

【解析】

【分析】(1) 首先由抛物线的解析式可求得点 C 的坐标，由 $OB = OC$ ，可求得点 B 的坐标，再把点 B 的坐标代入解析式，即可求解;

(2) 首先可求得点 A 的坐标，记直线 BD 交 AC 于点 F ，由直线 BD 恰好平分 $\triangle ABC$ 的面积，可知点 F 为 AC 的中点，即可求得点 F 的坐标，即可求得直线 BD 的解析式，再与抛物线的解析式联立成方程组，解方程组，即可求解;

(3) 分点 P 在 x 轴上方、点 P 在 x 轴下方两种情况;当点 P 在 x 轴上方时，在 y 轴上取 $OG = OE$ ，连接 BG ，过点 B 作直线 BP 交抛物线于点 P ，交 y 轴于点 M ，使 $\angle GBM = \angle GBO$ ，则 $\angle OBP = 2\angle OBE$ ，过点 G 作

$GH \perp BM$ 于点 H ，根据角平分线的性质、勾股定理、全等三角形的判定与性质，即可求得点 M 的坐标，据此即可求解；同理可得点 P 在 x 轴下方时的解。

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ ，则 $y=6$ ，

$$\therefore C(0,6), OC=6,$$

$$\because OB=OC,$$

$$\therefore OB=6,$$

$$\therefore B(6,0),$$

把点 B 代入 $y=ax^2+2x+6$ 得： $0=36a+12+6$ ，解得： $a=-\frac{1}{2}$ ，

故抛物线表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ ；

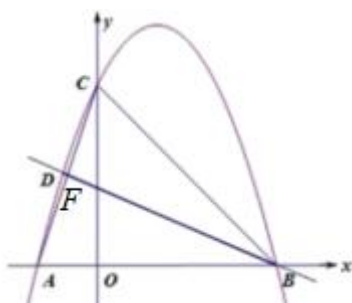
【小问 2 详解】

解：由 (1) 知抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ ，

故令 $y=0$ 得： $0=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$ 解得： $x_1=-2$ ， $x_2=6$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2,0)$ ，

如图：记直线 BD 交 AC 于点 F ，



$\because$ 直线 BD 恰好平分 $\triangle ABC$ 的面积，

$\therefore$ 点 F 为 AC 的中点，

$$\because C(0,6), A(-2,0),$$

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(-1,3)$ ，

设直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$ ，

把点 B 、 F 的坐标分别代入，得

$$\begin{cases} 6k + b = 0 \\ -k + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{7} \\ b = \frac{18}{7} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BD 的解析式为 $y = -\frac{3}{7}x + \frac{18}{7}$,

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \\ y = -\frac{3}{7}x + \frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -\frac{8}{7} \\ y = \frac{150}{49} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

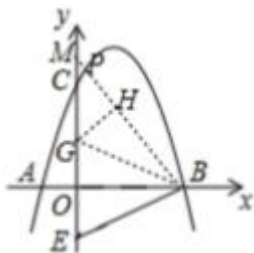
故点 D 的坐标为 $\left(-\frac{8}{7}, \frac{150}{49}\right)$;

【小问 3 详解】

解: 当点 P 在 x 轴上方时,

如图: 在 y 轴上取 $OG = OE$, 连接 BG , 过点 B 作直线 BP 交抛物线于点 P , 交 y 轴于点 M , 使 $\angle GBM = \angle GBO$,

则 $\angle OBP = 2\angle OBE$, 过点 G 作 $GH \perp BM$ 于点 H ,



$\therefore$ 点 E 坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore OE = OG = 2$,

$\because \angle GBM = \angle GBO$, $GH \perp BM$, $OG \perp OB$,

$\therefore OE = OG = GH = 2$,

又 $\because BG = BG$,

$\therefore \text{Rt}\triangle OBG \cong \text{Rt}\triangle OHG$ (HL),

$$\therefore BH = BO = 6,$$

$$\text{设 } MH = x, \text{ 则 } MG = \sqrt{MH^2 + GH^2} = \sqrt{x^2 + 4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBM \text{ 中, } OM^2 + OB^2 = MB^2,$$

$$\therefore \left(\sqrt{x^2 + 4} + 2\right)^2 + 6^2 = (x + 6)^2,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore MG = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore MO = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2},$$

$$\therefore M\left(0, \frac{9}{2}\right),$$

$$\text{设直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = k_1x + b_1,$$

把点 M 、 B 的坐标分别代入解析式, 得

$$\begin{cases} b_1 = \frac{9}{2} \\ 6k_1 + \frac{9}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = -\frac{3}{4} \\ b_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{故此时直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2};$$

当点 P 在 x 轴下方时,

$$\text{同理可得, 直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2},$$

$$\text{综上, 直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2} \text{ 或 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}.$$

【点睛】 本题考查了利用待定系数法求二次函数及一次函数的解析式, 二次函数与一次函数的交点问题, 角平分线的性质, 全等三角形的判定与性质, 作出辅助线, 采用分类求解是解决本题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以点 A 为圆心、 AC 为半径的 $\odot A$ 交边 AB 于点 D , 点 E 在边 BC 上, 满足 $CE = BD$, 过点 E 作 $EF \perp CD$ 交 AB 于点 F , 垂足为点 G .

