

2022 学年第二学期期中学情诊断

初三数学 试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟) 2023. 04

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. -6 的相反数为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. 6 C. ± 6 D. $-\frac{1}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用相反数的定义: 只有符号不同的两个数叫做互为相反数判断即可.

【详解】解: -6 的相反数是 6,

故选: B.

【点睛】本题考查了相反数, 解题的关键是掌握相反数的定义.

2. 单项式 $-8ab^2$ 的系数是 ()

- A. -8 B. 2 C. 3 D. 8

【答案】A

【解析】

【分析】根据单项式的系数是数字部分, 可得答案.

【详解】解: 单项式 $-8ab^2$ 的系数是 -8 ,

故选: A.

【点睛】本题考查单项式的系数, 找字母与字母前面的数即可.

3. 下表是世界卫生组织统计的 5 种新冠疫苗对新冠病毒防御的有效率的数据统计表, 那么这 5 种疫苗对新冠病毒防御的有效率的中位数是()

疫苗名称	克尔来福	阿斯利康	莫德纳	辉瑞	卫星 V
有效率	79.2%	75.9%	95.0%	95.0%	92.3%

- A. 75.9% B. 79.2% C. 95.0% D. 92.3%

【答案】D

【解析】

【分析】有效率的大小排序为 75.9%, 79.2%, 92.3%, 95.0%, 95.0%，根据中位数的定义确定即可.

【详解】 $\because$ 有效率的大小排序为 75.9%, 79.2%, 92.3%, 95.0%, 95.0%，

$\therefore$ 新冠防御的有效率的中位数是 92.3%，

故选 D.

【点睛】本题考查了中位数即一组数据排序后中间一个数据或中间两个数据的平均数，正确理解定义是解题的关键.

4. 已知函数 $y = kx$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的函数值 y 随 x 值的增大而减小，那么这个函数图像可能经过的点是()

- A. (0.5, 1) B. (2, 1) C. (-2, 4) D. (-2, -2)

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数 $y = kx$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的函数值 y 随 x 值的增大而减小，判定 $k < 0$ ，从而确定 x , y 异号，判断即可.

【详解】 $\because$ 函数 $y = kx$ ($k \neq 0$, k 为常数) 的函数值 y 随 x 值的增大而减小，

$\therefore k < 0$ ，

$\therefore x, y$ 异号，

故选 C.

【点睛】本题考查了正比例函数的性质，熟练掌握 $k < 0$ 时函数值 y 随 x 值的增大而减小是解题的关键.

5. 下列图形中，是中心对称图形且旋转 240° 后能与自身重合的图形是()

- A. 等边三角形 B. 正方形 C. 正八边形 D. 正十二边形

【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形排除 A，计算 $\frac{360^\circ}{n}$ ，判断 240° 是 $\frac{360^\circ}{n}$ 的倍数即可.

【详解】A、等边三角形不是中心对称图形，错误，不符合题意；

B、正方形是中心对称图形， $\frac{360^\circ}{n} = 90^\circ$ ， 240° 不是 90° 的整数倍数，错误，不符合题意；

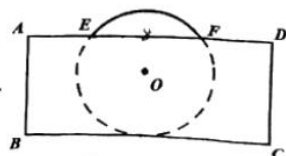
C、正八边形是中心对称图形， $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ， 240° 不是 45° 的整数倍数，错误，不符合题意；

D、正十二边形是中心对称图形， $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ， 240° 是 30° 的整数倍数，正确，符合题意；

故选 D.

【点睛】本题考查了中心对称图形即图形绕某点旋转 180° 后与原图形完全重合，熟练掌握定义是解题的关键.

6. 把球放在长方体纸盒内，球的一部分露出盒外，其截面如图所示，已知 $EF = CD = 8$ ，那么球的半径长是()



A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

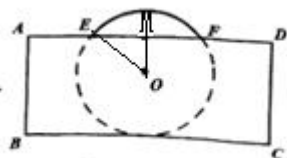
【答案】B

【解析】

【分析】过点 O 作 $OM \perp EF$ 于点 M ，利用垂径定理，勾股定理计算即可.

【详解】过点 O 作 $OM \perp EF$ 于点 M ，连接 OE ，

$\because EF = CD = 8$,



$$\therefore EM = \frac{1}{2}EF = 4, OM = 8 - OE,$$

$$\therefore OE^2 = 4^2 + (8 - OE)^2,$$

解得 $OE = 5$,

故选 B.

【点睛】本题考查了矩形的性质，垂径定理，勾股定理，熟练掌握垂径定理，勾股定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算 $x^2 \cdot x^7 =$ _____.

【答案】 x^9

【解析】

【分析】根据同底数幂相乘，底数不变，指数相加计算即可.

【详解】 $x^2 \cdot x^7 = x^9$,

故答案为: x^9 .

【点睛】 本题考查了同底数幂相乘, 熟练掌握底数不变, 指数相加是解题的关键.

8. 已知 $f(x) = \sqrt{x-1}$, 那么 $f(5) = \underline{\quad}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据函数的定义, 将 $x=5$ 代入 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 即可.

【详解】 解: 将 $x=5$ 代入 $f(x) = \sqrt{x-1}$,

得: $f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$.

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查求函数值, 把自变量的值代入函数解析式进行计算即可, 正确掌握函数值的求法是解题的关键.

9. 因式分解: $a^3 - a = \underline{\quad}$.

【答案】 $a(a-1)(a+1)$

【解析】

【分析】 先提取公因式 a , 再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【详解】 解: $a^3 - a$

$= a(a^2 - 1)$

$= a(a+1)(a-1)$

故答案为: $a(a-1)(a+1)$.

【点睛】 本题考查了提公因式法和公式法, 熟练掌握公式是解题的关键.

10. 分式方程 $\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0$ 的解是 $\underline{\quad}$.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 根据解分式方程的基本步骤计算求解即可.

【详解】 $\because \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 0$,

$$\therefore x^2 - 1 = 0,$$

解得 $x = -1$ 或 $x = 1$.

经检验, $x = -1$ 是原方程的根, $x = 1$ 是原方程的增根;

故原方程的根为 $x = -1$.

故答案为: $x = -1$.

【点睛】 本题考查了解分式方程, 正确求解, 规范验根是解题的关键.

11. 不等式组 $\begin{cases} 3x - 2 < x \\ \frac{x}{2} \leq x + 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-2 \leq x < 1$

【解析】

【分析】 根据解不等式组的基本步骤求解即可.

【详解】 $\begin{cases} 3x - 2 < x \text{ ①} \\ \frac{x}{2} \leq x + 1 \text{ ②} \end{cases},$

解①得 $x < 1$, 解②得 $x \geq -2$,

故不等式组的解集为 $-2 \leq x < 1$,

故答案为: $-2 \leq x < 1$.

【点睛】 本题考查了不等式组的解法, 熟练掌握解不等式组的基本步骤是解题的关键.

12. 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 在 y 轴的右侧呈_____趋势 (填 “上升” 或者 “下降”).

【答案】 下降

【解析】

【分析】 根据抛物线的性质判定即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 开口向下, 对称轴为 y 轴,

$\therefore$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 在 y 轴的右侧 y 随 x 的增大而减小,

故答案为: 下降.

【点睛】 本题考查了抛物线的增减性, 熟练掌握性质是解题的关键.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值为_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】根据方程有两个相等的实数根得出 $\Delta=0$ ，求出 m 的值即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2+3x+m=0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta=0, \text{ 即 } 9-4m=0, \text{ 解得 } m=\frac{9}{4}.$$

故答案为 $\frac{9}{4}$.

【点睛】本题考查的是根的判别式，熟知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 的关系是解答此题的关键.

14. 一个不透明的袋中装有除颜色外大小形状都相同的三种球，其中红球、黄球、黑球的个数之比为5:3:2. 从袋子中任意摸出1个球，结果是红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据概率公式计算即可.

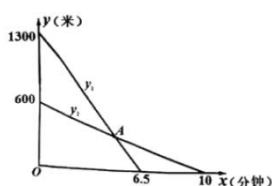
【详解】 $\because$ 红球、黄球、黑球的个数之比为5:3:2.

$$\therefore \text{结果是红球的概率为 } \frac{5}{5+3+2} = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了根据概率公式计算，熟练掌握公式是解题的关键.

15. 小明和小亮的家分别位于新华书店东、西两边，他们相约同时从家出发到新华书店购书，小明骑车、小亮步行，小明、小亮离新华书店的距离 y_1 (米)、 y_2 (米) 与时间 x (分钟) 之间的关系如图所示，在途中，当小明、小亮离书店的距离相同时，那么他们所用的时间是_____分钟.



【答案】5

【解析】

【分析】分别求出函数 y_1 、 y_2 的函数解析式，然后求出它们的交点坐标即可得到答案.

【详解】解：设函数 $y_1 = kx + 1300$ ， $y_2 = k_1x + 600$ ，

$$\therefore \begin{cases} 6.5k + 1300 = 0 \\ 10k_1 + 600 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -200 \\ k_2 = -60 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = -200x + 1300, y_2 = -60x + 600,$$

$$\text{联立} \begin{cases} y_1 = -200x + 1300 \\ y_2 = -60x + 600 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 5 \\ y = 300 \end{cases},$$

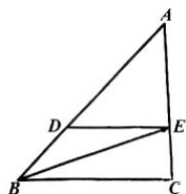
$\therefore$ 经过 5 分钟，他们途中到书店的距离相等，

故答案为：5.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的实际应用，正确求出对应的函数解析式是解题的关键.

16. 如图，已知 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ，联结 BE ，如果 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

当 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ 时，那么 $\overrightarrow{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 利用平行线分线段成比例定理，向量的计算解答即可.

【详解】 $\because DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AC - AE}{AC} = \frac{3 - 2}{3},$$

$$\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \frac{1}{3}\vec{a},$$

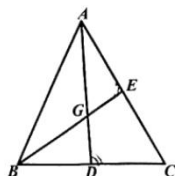
$$\therefore \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a},$$

故答案为: $\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理，向量的计算，熟练掌握定理，向量的计算是解题的关键.

17. 如图，已知 AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线， AD 和 BE 交于点 G ，当 $\angle AEG = \angle ADC$ 时，那么 $\frac{AC}{AD}$ 的值等于_____.

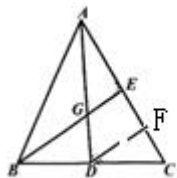


【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ## $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DF \parallel BE$ 交 AC 于点 F ，利用三角形相似的判定和性质，平行线分线段成比例定理计算即可.

【详解】 过点 D 作 $DF \parallel BE$ 交 AC 于点 F ,



$$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{CF}{FE}, \quad \frac{AG}{AD} = \frac{AE}{AF},$$

$$\therefore BD = CD, AE = CE,$$

$$\therefore CF = EF, \quad \frac{AG}{AD} = \frac{2EF}{3EF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AG = \frac{2}{3}AD, \quad AE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle ADC, \quad \angle EAG = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \frac{AG}{AC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore \frac{2}{3}AD^2 = \frac{1}{2}AC^2,$$

$$\therefore \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{4}{3},$$

$$\text{解得 } \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{AC}{AD} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去),}$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了三角形相似的判定和性质，平行线分线段成比例定理，熟练掌握三角形相似的性质，平行线分线段成比例定理是解题的关键.

18. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $\tan C = \frac{3}{4}$ ，点 D 是线段 BC 上的动点，点 E 在线段 AC 上，如果点 E 关于直线 AD 对称的点 F 恰好落在线段 BC 上，那么 CE 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】过 A 点作 $AG \perp BC$ 于点 G ，先解直角三角形求出 $AC = 4$ ， $BC = 5$ ，然后利用面积求出 $AG = \frac{12}{5}$ ，当 F 与 G 重合时 AF 最小，即 CE 最大，求出最大值即可.

【详解】解：如图，过 A 点作 $AG \perp BC$ 于点 G ，

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = 3, \tan C = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AC = 4,$$

$$\text{则 } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\text{又 } \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AG = \frac{1}{2} AC \times AB,$$

$$\therefore AG = \frac{AC \times AB}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$\because$ 点 E 、点 F 关于直线 AD 对称，

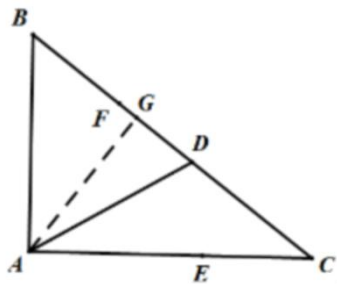
$$\therefore AF = AE,$$

又点 F 恰好落在线段 BC 上，

$\therefore$ 当 F 与 G 重合时 AF 最小，即 CE 最大，

$$\therefore CE \text{ 最大值为 } 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{5}.$$



【点睛】 本题考查解直角三角形，轴对称的性质，掌握垂线段最短是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算： $(2023 - \pi)^0 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^{-1} - 27^{\frac{1}{3}} + |\sqrt{3} - 2|$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据零指数幂，负整数指数幂，分数指数幂，绝对值的化简计算即可.

【详解】 $(2023 - \pi)^0 + \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^{-1} - 27^{\frac{1}{3}} + |\sqrt{3} - 2|$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} - 3 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 1 + \sqrt{3} - 1 - 3 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= -1.$$

【点睛】 本题考查了零指数幂，负整数指数幂，分数指数幂，绝对值的化简，熟练掌握运算法则是解题的关键.

20. 解方程组： $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 先将方程 $x^2 - 2xy + y^2 = 4$ 变成完全平方开方降次后得到新的方程组，选择加减消元法解答即可.

【详解】 $\because \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x+2y=5 \\ (x-y)^2=4 \end{cases},$$

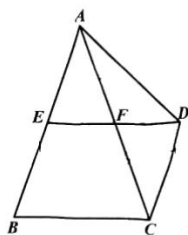
$$\therefore \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases},$$

$$\text{故原方程组的解为 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了方程组的解法，灵活运用完全平方公式，加减消元法计算是解题的关键.

21. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=6$ ， $BC=4$ ，点 E 、 F 分别是 AB 、 AC 的中点，过点 C 作 $CD \parallel AB$ 交 EF 的延长线于点 D ，连接 AD .



- (1) 求 $\angle B$ 的正弦值；
- (2) 求线段 AD 的长.

【答案】 (1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $\sqrt{17}$

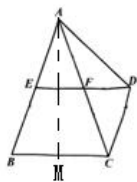
【解析】

【分析】 (1) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，根据三线合一性质，勾股定理计算 AM ，根据正弦定义计算即可.

(2) 过点 C 作 $CN \perp AB$ 于点 N ，根据正弦，余弦计算 CN ， BN ，求得 EN ， EC ，后证明四边形 $ADCE$ 是平行四边形，计算即可.

【小问 1 详解】

过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,



$$\because AB = AC = 6, \quad BC = 4,$$

$$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = 2$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin B = \frac{AM}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

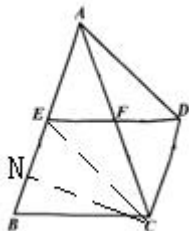
【小问 2 详解】

过点 C 作 $CN \perp AB$ 于点 N , 连接 CE

$$\because \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos B = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, BC = 4,$$

$$\therefore CN = BC \sin B = \frac{8\sqrt{2}}{3}, \quad BN = BC \cos B = \frac{4}{3},$$

$\because AB = AC = 6$, 点 E 是 AB 的中点,



$$\therefore BE = 3, \quad EN = EB - BN = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore EC = \sqrt{EN^2 + CN^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{17},$$

$\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FD},$$

$\because F$ 是 AC 的中点,

$$\therefore AF = FC,$$

$$\therefore EF = FD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

∴ AD = EC = √17.

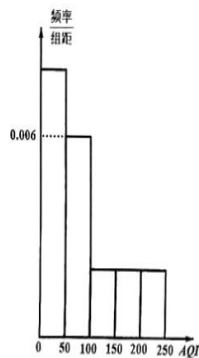
【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，三角函数，勾股定理，平行四边形的判定和性质，平行线分线段成比例定理，熟练掌握三角函数，勾股定理，平行四边形的判定和性质，平行线分线段成比例定理是解题的关键.

22. 空气质量指数 (Air Quality Index, 缩写 AQI) 是定量描述空气状况的非线性无量纲指数. 其数值越大、级别和类别越高, 说明空气污染状况越严重, 对人体的健康危害也就越大, 适用于表示某地区的短期空气质量状况和变化趋势. (空气污染指数为 0~50 是优; 空气污染指数为 50~100 是良好; 空气污染指数为 100~150 是轻度污染; 空气污染指数为 150~200 是中度污染; 空气污染指数为 200~250 是重度污染.)

如图表示的是某地区 2022 年 11 月份 30 天日均 AQI 指数的频率分布直方图.

空气质量指数 (AQI)	0~50	50~100	100~150	150~200	200~250
天数	a	b	3	3	3
频率	c	d	0.1	0.1	0.1

(注: 每组数据可含最高值, 不含最低值)



(1) 请你根据上述频率分布直方图及表格完成下面的填空:

这个地区 11 月份空气为轻度污染的天数是_____天. $a =$ _____; $b =$ _____; $c =$ _____; $d =$ _____.

(2) 为了进一步改善生活环境和空气质量, 提高人民的生活质量, 当地政府计划从 2023 年开始增加绿化面积. 已知 2022 年底该地区的绿化面积为 20 万亩, 如果到 2024 年底, 该地区的绿化面积比为 2022 年的绿化面积增加了 50%, 假设这两年绿化面积的年增长率相同, 求这两年中绿化面积每年的增长率 (精确到 0.01) (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)

【答案】 (1) 3, 12, 9, 0.4, 0.3

(2) 0.22

【解析】

【分析】(1) 根据样本容量=天数÷频率，求得样本容量，根据 $\frac{\text{频率}}{50}=0.006$ 计算出良好的频率，后运用公式依次计算即可.

(2) 设平均增长率为 x ，根据题意得 $20(1+x)^2 = 20 \times (1+50\%)$ 计算即可.

【小问 1 详解】

根据题意，得轻度污染天数为 3 天，样本容量为： $\frac{3}{0.1}=30$ ，

$$\therefore \frac{\text{频率}}{50}=0.006,$$

$\therefore$ 良好天气的频率为 0.3，

$\therefore$ 优秀天气的频率为 $1-0.3-0.1-0.1-0.1=0.4$ ，

$\therefore b=0.3 \times 30=9$ ，

$\therefore$ 优秀天气的频率为 $a=0.4 \times 30=12$ ，

故答案为：3，12，9，0.4，0.3.

【小问 2 详解】

设平均增长率为 x ，根据题意得 $20(1+x)^2 = 20 \times (1+50\%)$ ，

$$\text{解得 } 1+x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

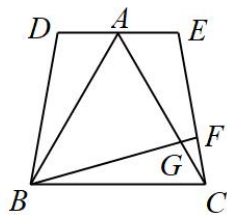
$$\therefore \sqrt{6} \approx 2.449,$$

$$\therefore x \approx 0.22 \text{ 或 } x \approx -2.22 \text{ (舍去)}$$

故这两年中绿化面积每年的增长率为 0.22.

【点睛】本题考查了频数分布表，一元二次方程的增长率问题，熟练掌握频数分布表，增长率问题是解题的关键.

23. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，过点 A 作 $DE \parallel BC$ ($DE < BC$)，且 $DA = EA$ ，联结 BD 、 CE .



(1) 求证：四边形 $DBCE$ 是等腰梯形；

(2) 点 F 在腰 CE 上, 联结 BF 交 AC 于点 G , 若 $CF^2 = GF \cdot BF$, 求证: $CG = \frac{1}{2}DE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形和平行线的性质得到 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 继而得到 $BD = CE$ 进行证明即可;

(2) 将等积式化为比例式, 利用两边成比例且夹角相等的三角形相似得到 $\triangle CFG \sim \triangle BFC$, 即 $\angle FBC = \angle ACE$, 进而得到 $\triangle CBG \cong \triangle ACE$ 进行证明.

【小问 1 详解】

解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, \quad AB = AC = BC,$$

又 $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAB = \angle ABC = \angle ACB = \angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore DA = EA$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$$

$$\therefore BD = CE$$

$$\therefore DE \parallel BC \quad (DE < BC)$$

$\therefore$ 四边形 $DBCE$ 是等腰梯形;

【小问 2 详解】

证明: $\because CF^2 = GF \cdot BF$,

$$\therefore \frac{CF}{GF} = \frac{BF}{CF},$$

又 $\because \angle BFC = \angle CFG$,

$$\therefore \triangle CFG \sim \triangle BFC$$

$$\therefore \angle FBC = \angle ACE,$$

又 $\because AC = BC, \angle ACB = \angle CAE = 60^\circ$,

$$\therefore \triangle CBG \cong \triangle ACE$$

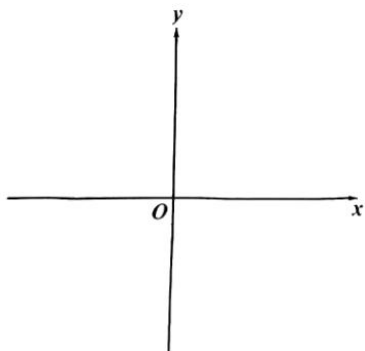
$$\therefore CG = AE$$

又 $DA = EA$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}DE$$

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质, 全等三角形判定和性质, 等腰梯形的判定, 等边三角形的性质, 掌握全等三角形的判定定理是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 8)$, 直线 AB 与 y 轴交于点 C , 与抛物线的对称轴直线 l 交于点 D .



- (1) 求抛物线的表达式及对称轴;
- (2) 如果该抛物线平移后经过点 C , 其顶点 P 在原抛物线上, 且点 P 在直线 l 的右侧, 求点 P 的坐标;
- (3) 点 E 在直线 l 上, 若 $\tan \angle ABE = \frac{1}{3}$, 求点 E 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$; $x = 1$

(2) $P\left(3, -\frac{5}{2}\right)$

(3) $E\left(1, \frac{11}{2}\right)$ 或 $E(1, -2)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求二次函数的解析式, 进一步即可求出抛物线的对称轴;

(2) 求出直线 AB 的解析式, 进而求出 C 点坐标, 设平移后的顶点坐标为 $P\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a - 4\right)$, 则有平移后的解析式为 $y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}a^2 - a - 4$, 把点 C 坐标代入求出 a 解题即可;

(3) 分点 E 在点 D 的上方时和点 E 在点 D 的下方两种情况解题, 过 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F , 利用正切求出 DF 与 DB 的关系进行解题.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 8)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} 2 - 2b + c = 0 \\ 18 + 6b + c = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -1 \\ c = -4 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

$$\text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1,$$

【小问 2 详解】

设直线 AB 的解析式为 $y = mx + n$, 代入得:

$$\begin{cases} -2m + n = 0 \\ 6m + n = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = x + 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 2,$$

$$\therefore C \text{ 点坐标为 } (0, 2),$$

$$\text{设平移后的顶点坐标为 } P\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a - 4\right),$$

$$\text{则解析式为 } y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}a^2 - a - 4,$$

$$\text{把 } (0, 2) \text{ 代入得: } a = 3 \text{ 或 } a = -2 \text{ (舍)},$$

$$\therefore P\left(3, -\frac{5}{2}\right),$$

【小问 3 详解】

$$\because OA = OC = 2,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle ACO = \angle EDB = 45^\circ,$$

$$\text{对于 } y = x + 2, \text{ 当 } x = 1 \text{ 时, } y = 3,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (1, 3),$$

$$\therefore DB = 5\sqrt{2},$$

当点 E 在点 D 的上方时, 过 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F ,

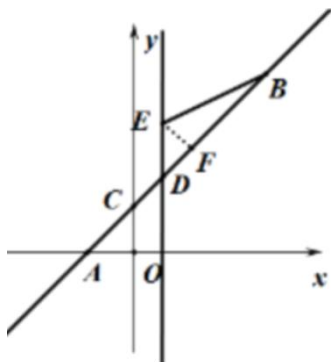
$$\because \tan \angle ABE = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BF = 3EF = 3DF,$$

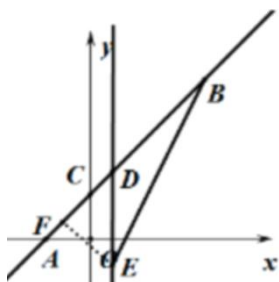
$$\therefore DF = \frac{1}{4}DB = \frac{5}{4}\sqrt{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}DF = \sqrt{2} \times \frac{5}{4}\sqrt{2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore E\left(1, \frac{11}{2}\right),$$



当点 E 在点 D 的下方时，过 E 作 $EF \perp BD$ 于点 F ，



$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BF = 3EF = 3DF,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}DB = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

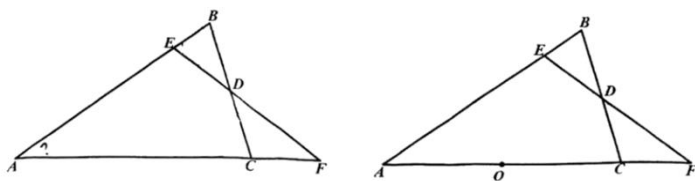
$$\therefore DE = \sqrt{2}DF = \sqrt{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{2} = 5,$$

$$\therefore E(1, -2),$$

综上所述， $E\left(1, \frac{11}{2}\right)$ 或 $E(1, -2)$ 。

【点睛】 本题考查三角函数，待定系数法求解析式，平移，二次函数的图象和性质，掌握待定系数法求函数解析式是解题的关键。

25. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 是边 BC 中点，在边 AB 上取一点 E ，使得 $DE = DB$ ，延长 ED 交 AC 延长线于点 F 。



(1) 求证: $\angle A = \angle CDF$;

(2) 设 AC 的中点为点 O ,

①如果 CD 为经过 A 、 C 、 D 三点的圆的一条弦, 当弦 CD 恰好是正十边形的一条边时, 求 $CF:AC$ 的值;

② $\odot M$ 经过 C 、 D 两点, 联结 OM 、 MF , 当 $\angle OFM = 90^\circ$, $AC = 10$, $\tan A = \frac{3}{4}$ 时, 求 $\odot M$ 的半径长.

【答案】 (1) 见解析 (2) ① $CF:AC = (\sqrt{5}-1):4$ ② $\frac{5}{9}\sqrt{61}$

【解析】

【分析】 (1) 根据等边对等角可得 $\angle B = \angle ACB = \angle DEB$, 再利用三角形的内角和定理得到结论;

(2) ①连 AD , 根据正十边形的中心角可得 $\angle DOC = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, 推出 $\triangle FDC \sim \triangle FOD$, 根据对应边成

比例解题即可; ②由 $\triangle FDC \sim \triangle FOD$, 得 $DF^2 = CF \cdot OF$, 过点 D 作 $DH \perp OC$ 于点 H , 则

$DF^2 = DH^2 + HF^2$, 等量代换得到 DF 的值, 然后根据 $\triangle HDC \sim \triangle FOM$, 求出 MF 的长, 再利用勾股定理求出半径长即可.

【小问 1 详解】

证明: $AB = AC$, $DE = DB$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = \angle DEB$,

$\therefore \angle A = 180^\circ - 2\angle B$, $\angle BDE = \angle CDF = 180^\circ - 2\angle B$,

$\therefore \angle A = \angle CDF$,

【小问 2 详解】

①连 AD ,

$\because D$ 是 BC 的中点, $AB = AC$

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$

$\therefore AC$ 为圆的直径,

连接 OD , 设经过 A 、 C 、 D 三点的圆半径为 r ,

弦 CD 恰好是正十边形的一条边,

$\therefore \angle DOC = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$,

$\therefore \angle OCD = \frac{180^\circ - \angle DOC}{2} = 72^\circ$,

又 $\because O、D$ 是 $AC、BC$ 的中点,

$$\therefore OD \parallel AB, AC = 2r$$

$$\therefore \angle A = \angle CDF = \angle DOC = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle OCD - \angle CDF = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ,$$

$$\therefore FD = OD = OC = r,$$

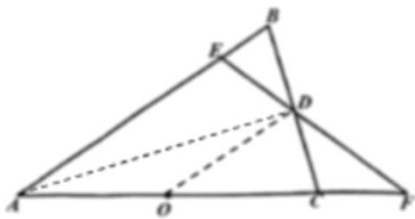
$$\therefore \angle CDF = \angle DOF, \angle F = \angle F$$

$$\therefore \triangle FDC \sim \triangle FOD$$

$$\text{则 } \frac{DF}{OF} = \frac{CF}{FD}, \text{ 即 } \frac{r}{r+CF} = \frac{CF}{r},$$

$$\text{解得 } CF = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r \text{ 或 } CF = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}r \text{ (舍)},$$

$$\therefore CF : AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r : 2r = (\sqrt{5}-1) : 4,$$



$$\textcircled{2} \because AC = 10,$$

$$\therefore OC = OD = 5,$$

$$\text{又} \because \tan A = \tan DOC = \frac{DH}{OH} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore DH = 3, OH = 4,$$

$$\therefore CH = OC - OH = 5 - 4 = 1,$$

$$\text{设 } CF = a,$$

$$\text{由}\textcircled{1}\text{可知 } \angle A = \angle CDF = \angle DOC, \angle DFO = \angle DFO,$$

$$\therefore \triangle FDC \sim \triangle FOD,$$

$$\therefore \frac{DF}{OF} = \frac{CF}{FD},$$

$$\therefore DF^2 = CF \cdot OF, \text{ 即 } DF^2 = a(a+5)$$

如图, 过点 D 作 $DH \perp OC$ 于点 H ,

在 $\text{Rt}\triangle DHF$ 中,

$$DF^2 = DH^2 + HF^2 = 3^2 + (a+1)^2,$$

