

2022 学年度第二次学生学习能力诊断练习

初三数学

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) [下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. $\sqrt{5}$ 的相反数是 ()

A. $-\frac{1}{5}$

B. $-\sqrt{5}$

C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. -5

【答案】B

【解析】

【分析】根据“只有符号不同的两个数互为相反数”, 即可得出结果.

【详解】解: $\sqrt{5}$ 的相反数是 $-\sqrt{5}$,

故选: B.

【点睛】本题考查实数的性质. 熟练掌握“只有符号不同的两个数互为相反数”, 是解题的关键.

2. 方程 $\sqrt{x-2} = 2$ 的解是 ()

A. $x = 4$

B. $x = 5$

C. $x = 6$

D. $x = 7$

【答案】C

【解析】

【分析】将等式两边同时平方得到一元一次方程 $x - 2 = 4$, 解方程并检验即可解题.

【详解】解: 将方程两边平方得 $x - 2 = 4$,

解得: $x = 6$

经检验: $x = 6$ 是原无理方程的解;

故选 C.

【点睛】本题考查了无理方程及一元一次方程的解法，解本题的关键是注意解出方程之后一定要进行检验，确保式子有意义.

3. 已知正比例函数 $y = (a-3)x$ 的图像经过第二、四象限，那么 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 3$ B. $a < 3$ C. $a > -3$ D. $a < -3$

【答案】 B

【解析】

【分析】根据正比例函数的性质，可得 $a-3 > 0$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 正比例函数 $y = (a-3)x$ 的图像经过第二、四象限，

$\therefore a-3 < 0$,

解得： $a < 3$,

故选： B.

【点睛】本题考查了正比例函数图像的性质，熟练掌握正比例函数图像的性质是解题的关键.

4. 某地统计部门公布最近 5 年居民消费价格指数年增长率分别为 1.5%、1.2%、1.9%、1.2% 和 1.8%，业内人士评论说：“这 5 年居民消费价格指数年增长率相当平稳.” 从统计角度看，“年增长率相当平稳”说明这组数据比较小的量是 ()

- A. 方差 B. 平均数 C. 众数 D. 中位数

【答案】 A

【解析】

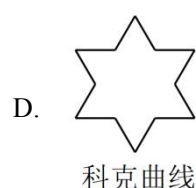
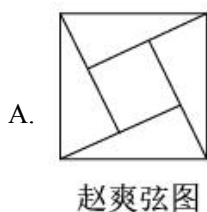
【分析】根据方差的意义：是反映一组数据波动大小，稳定程度的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，反之也成立，故从统计角度看，“增长率相当平稳”说明这组数据方差比较小.

【详解】解：根据方差的意义可知，数据越稳定，说明方差越小，

故选： A.

【点睛】本题考查方差的意义，方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

5. 在下面用数学家名字命名的图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义逐一判断即可.

【详解】解: A. 是中心对称图形, 不是轴对称图形, 不符合题意;

B. 不是中心对称图形, 是轴对称图形, 不符合题意;

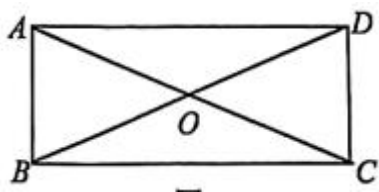
C. 既不是中心对称图形, 也不是轴对称图形, 不符合题意;

D. 既是中心对称图形, 又是轴对称图形, 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查中心对称图形与轴对称图形的识别, 轴对称图形指的是延某条直线折叠, 两边的图形能够完全重合; 将图形旋转 180° , 能够与原图形重合的图形叫做中心对称图形, 掌握定义是解题的关键.

6. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB=5$, $BC=12$. 分别以点 O 、 D 为圆心画圆, 如果 $\odot O$ 与直线 AD 相交、与直线 CD 相离, 且 $\odot D$ 与 $\odot O$ 内切, 那么 $\odot D$ 的半径长 r 的取值范围是 ()



A. $\frac{1}{2} < r < 4$

B. $\frac{5}{2} < r < 6$

C. $9 < r < \frac{25}{2}$

D. $9 < r < 13$

【答案】C

【解析】

【分析】过点 O 作 $OE \perp AD$, 勾股定理求得 $BD=13$, 进而根据平行线分线段成比例得出 $OE = \frac{1}{2} AB$, $OF = \frac{1}{2} AD$, 根据题意, 画出相应的图形, 即可求解.

【详解】解: 如图所示, 当圆 O 与 AD 相切时, 过点 O 作 $OE \perp AD$,

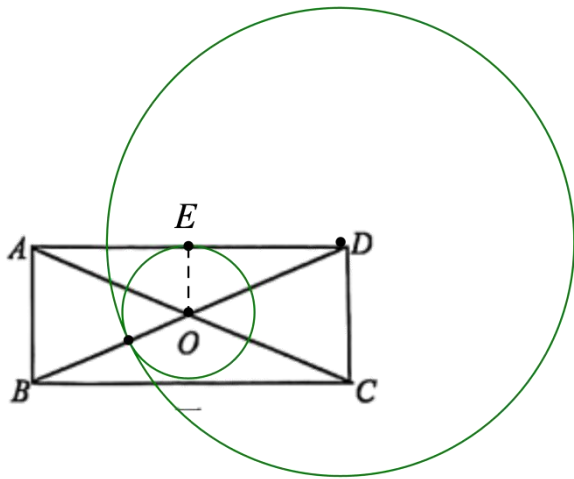
$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $AB=5$, $BC=12$.

$$\therefore AD \perp CD, CD = AB = 5, AD = BC = 12, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13,$$

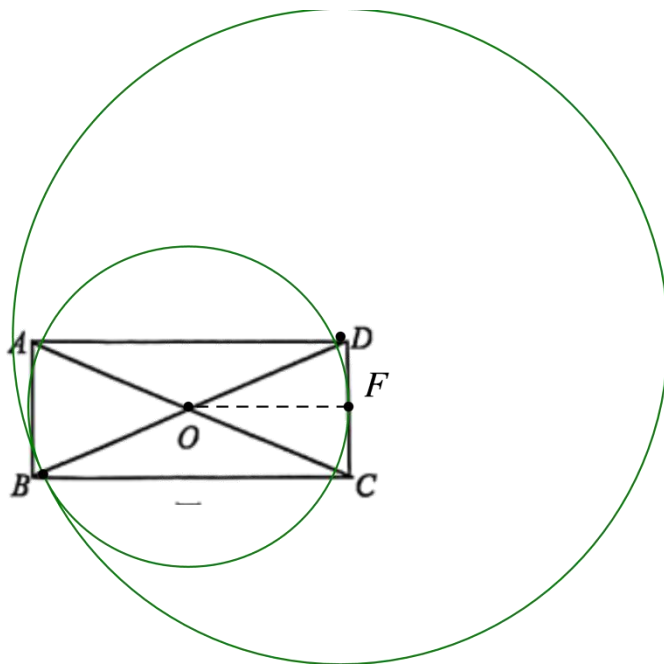
$$\therefore OE \parallel DC$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2},$$

$$\text{则 } r = OD + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9;$$



当圆 O 与 CD 相切时，过点 O 作 $OF \perp CD$ 于点 F ，如图所示，



$$\text{则 } OF = \frac{1}{2} AD = 6$$

$$\text{则 } r = \frac{13}{2} + 6 = \frac{25}{2}$$

$\therefore \odot O$ 与直线 AD 相交、与直线 CD 相离，且 $\odot D$ 与 $\odot O$ 内切时， $9 < r < \frac{25}{2}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了矩形的性质，勾股定理，平行线分线段成比例，直线与圆的位置关系，圆与圆的位置关系，根据题意画出图形是解题的关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 计算： $(-a^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-a^6$

【解析】

【分析】 直接根据积的乘方运算法则进行计算即可.

【详解】 $(-a^2)^3 = (-1)^3 \cdot (a^2)^3 = -a^6$.

故答案为: $-a^6$.

【点睛】 此题主要考查了积的乘方, 熟练掌握运算法则是解答此题的关键.

8. 计算: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质求解即可.

【详解】 解析 解: 原式 $= |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = \sqrt{5}-2$.

故答案为 $\sqrt{5}-2$.

【点睛】 本题考查了二次根式的双重非负性, 无理数的大小比较, 掌握二次根式的性质是解题的关键.

9. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 有实数根, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq 4$

【解析】

【分析】 根据判别式的意义得到 $\Delta = (-4)^2 - 4k \geq 0$, 然后解不等式即可.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + k = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = 16 - 4k \geq 0$,

解得: $k \leq 4$.

故答案为: $k \leq 4$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数.

10. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 4$, 点 $A(1, y_1)$ 、 $B(3, y_2)$ 都在该抛物线上, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ” 或 “ $=$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】因为抛物线的对称轴为直线 $x = 4$ ，根据二次函数的性质即可判断 $y_1 > y_2$ 。

【详解】解：抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的图象的对称轴为直线 $x = 4$ ，

$\therefore$ 当 $x < 4$ 时， y 随 x 的增大而减小，

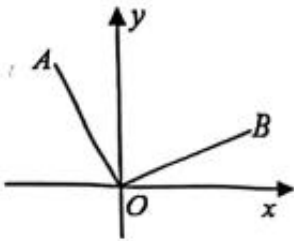
$\because 1 < 3 < 4$ ，

$\therefore y_1 > y_2$ 。

故答案为：>。

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，熟知二次函数的性质是解题的关键。

11. 如图，已知点 $A(-1, 2)$ ，连接 OA ，将线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到线段 OB ，如果点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上，那么 k 的值是_____。



【答案】2

【解析】

【分析】分别过 A 、 B 向 x 轴作垂线，根据旋转的性质，证明两三角形全等，求出点 B 的坐标，即可求 k 的值。

【详解】解：分别过 A 、 B 向 x 轴作垂线交 x 轴于点 C 和点 D ，

由题意可知： $AO = BO$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $AC = 2$ ， $CO = 1$ ，

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ$

$\because \angle A + \angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle BOD$

在 $\triangle ACO$ 和 $\triangle ODB$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle ACO = \angle ODB = 90^\circ \\ \angle A = \angle BOD \\ AO = OB \end{cases},$$

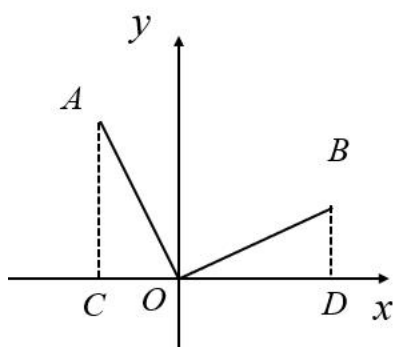
$\therefore \triangle ACO \cong \triangle ODB$ ，

$\therefore OD = 2$ ， $BD = 1$ ，

$$\therefore B(2,1)$$

$$\therefore k = 1 \times 2 = 2,$$

故答案为：2.



【点睛】本题主要考查旋转的性质、全等三角形的判定和性质、求反比例函数中比例系数 k 的值，解题的关键是添加辅助线证明三角形全等，求出反比例函数图像上点的坐标.

12. 在一个不透明的袋子中装有 5 个仅颜色不同的小球，其中红球 3 个，黑球 2 个，从袋子中随机摸出 1 个球，那么“摸出黑球”的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】用黑球的个数除以球的总数计算即可.

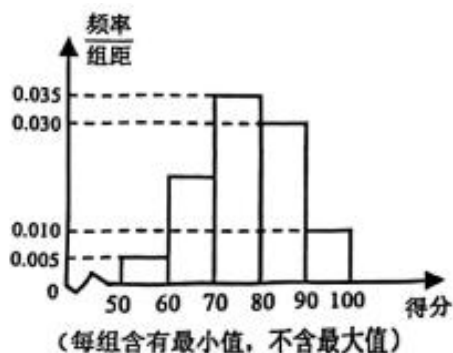
【详解】解：∵有 5 个仅颜色不同的小球，黑球 2 个，

$$\therefore \text{摸出黑球的概率：} 2 \div 5 = \frac{2}{5};$$

$$\text{故答案为：} \frac{2}{5}.$$

【点睛】本题考查了求简单事件的概率，熟记概率的计算公式：事件发生的个数 $\div$ 总个数是解题的关键.

13. 某校抽取部分学生参与“大阅读”学习问卷，并对其得分情况进行了统计，绘制了如图所示的频率分布直方图，得分在 60 分到 70 分(含 60 分，不含 70 分)的频率是_____.



【答案】 0.2

【解析】

【分析】根据频数分布直方图可知组距为 10，求得得分在 60 分到 70 分(含 60 分，不含 70 分)的值，进而即可求解.

【详解】设 60~70 的频率/组距为: x ,

由题意得 $10 \times (0.005 + 0.010 + x + 0.030 + 0.035) = 1$,

解得: $x = 0.02$,

$\therefore$ 频率为 0.2,

故答案为: 0.2.

【点睛】本题考查了频数分布直方图，掌握频数、频率的关系是解题的关键.

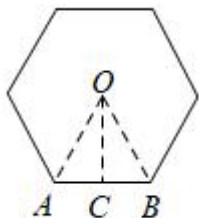
14. 如果正六边形的边心距为 3，那么它的半径是_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接 OA 、 OB ，作 $OC \perp AB$ 于 C ，由正六边形的性质得出 $AC = BC = \frac{1}{2}AB$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，得出 $\angle AOC = 30^\circ$ ，由勾股定理求出 AC ，得出 OA 即可.

【详解】解：如图所示：



连接 OA 、 OB ，作 $OC \perp AB$ 于 C ，

则 $\angle OCA = 90^\circ$ ， $AC = BC = \frac{1}{2}AB$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 设 $AC = x$ ，则 $OA = 2x$ ，

由勾股定理可得， $(2x)^2 - x^2 = 3^2$ ，

解得: $x = \sqrt{3}$ ，

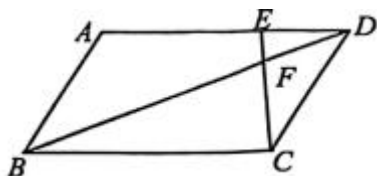
$\therefore OA = 2\sqrt{3}$ ，

即它的半径为 $2\sqrt{3}$ ，

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了正多边形和圆、正六边形的性质、勾股定理等知识; 熟练掌握正六边形的性质, 运用勾股定理求出 AC 是解决问题的关键.

15. 如图, 在 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 且 $AE = 2ED$, CE 交 BD 于点 F , 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DF} =$ _____.



【答案】 $-\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}$

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$, $AD = BC$, 证明 $\triangle EDF \sim \triangle CBF$, 根据已知得出 $DF = \frac{1}{3}BF$, $DF = \frac{1}{4}DB$, 进而根据三角形法则表示出 DB , 进而即可求解.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \triangle EDF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{DF}{FB},$$

$$\because AE = 2ED,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DF = \frac{1}{3}FB,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{4}DB$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

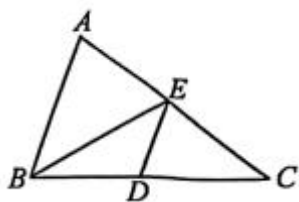
$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a},$$

故答案为: $-\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 平行四边形的性质, 向量的线性运算, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, $\angle ABE = \angle C$, $DE \parallel AB$, 如果 $AB = 6$, $AC = 9$, 那么 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE}$ 的值是_____.



【答案】 4:5

【解析】

【分析】 根据已知证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACB$, 得出 $AE = 4$, 进而得出 $EC = 5$, 根据 $DE \parallel AB$, 根据平行线分线段成比例, 得出 $\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$, 即可求解.

【详解】 解: $\because \angle BAE = \angle CAB$, $\angle ABE = \angle C$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACB,$$

$$\because AB = 6, AC = 9,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\therefore AE = \frac{AB^2}{AC} = 4,$$

$$\therefore EC = AC - AE = 9 - 4 = 5,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = BD : DC = AE : EC = 4 : 5,$$

故答案为: 4:5.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 平行线分线段成比例, 熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

17. 我国古代著作《四元玉鉴》记载“买椽多少”问题: “六贯二百一十钱, 请人去买几株椽. 每株脚钱三文足, 无钱准与一株椽.” 其大意: 现请人代买一批椽, 这批椽的价钱为 6210 文. 如果每株椽的运费是 3 文, 那么少拿一株椽后, 剩下的椽的运费恰好等于一株椽的价钱, 试问 6210 文能买多少株椽? 若设这批椽的数量为 x 株, 则可列分式方程为_____.

【答案】 $\frac{6210}{x} = 3(x-1)$

【解析】

【分析】根据题意可知： x 株需要 6210 文， $(x-1)$ 株的运费 = 一株椽的价钱，从而可以列出相应的方程.

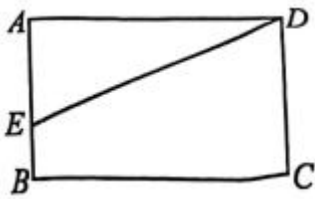
【详解】解：设这批椽的数量为 x 株，

由题意可得： $\frac{6210}{x} = 3(x-1)$,

故答案为： $\frac{6210}{x} = 3(x-1)$.

【点睛】本题主要考查了从实际问题中抽象出分式方程，正确理解题意找到等量关系是解题的关键.

18. 如图，在矩形 ABCD 中， $AB=3$ ，点 E 在边 AB 上， $AE=2$ ，联结 DE，将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折，点 A 的对应点为 P，联结 EP、DP，分别交边 BC 于点 F、G，如果 $BF = \frac{1}{4}BC$ ，那么 CG 的长是_____.

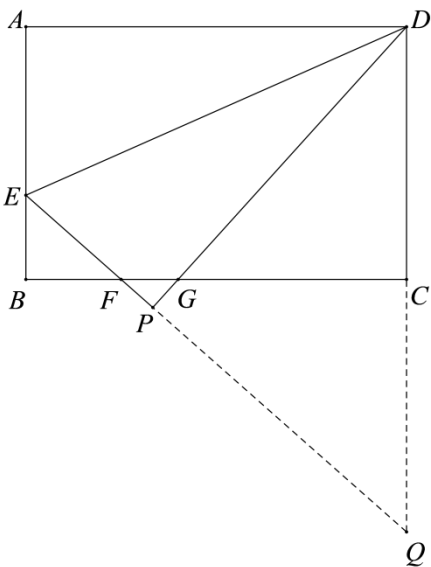


【答案】 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{6}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】延长 EP 交 DC 于点 Q，根据已知得出 $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{3}$ ，证明 $\triangle EBF \sim \triangle QCF$ ，求得 $CQ=3$ ，根据折叠的性质以及平行线的性质得出 $QE=QD$ ，在 $\text{Rt}\triangle PDQ$ 中， $PD = \sqrt{DQ^2 - PQ^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，进而得出 $BC = AD = PD = 2\sqrt{5}$ ，证明 $\triangle EBF \sim \triangle GCD$ ，根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解：如图所示，延长 EP 交 DC 于点 Q，



$$\therefore BF = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore \frac{BF}{FC} = \frac{1}{3},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB \parallel CD, \quad AB = CD = 3, \quad AD = BC$$

$$\therefore \triangle EBF \sim \triangle QCF,$$

$$\therefore \frac{EF}{FQ} = \frac{EB}{CQ} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BE = 1,$$

$$\therefore CQ = 3BE = 3,$$

$$\therefore DQ = DC + CQ = 6,$$

$\therefore$ 折叠,

$$\therefore AD = PD, \quad \angle AED = \angle QED, \quad AE = EP,$$

则 $BC = PD$,

$$\text{又} \therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDQ$$

$$\therefore \angle DEQ = \angle EDQ,$$

$$\therefore QE = QD = 6$$

$$\therefore AE = EP = 2,$$

$$\therefore PQ = EQ - EP = 6 - 2 = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDQ \text{ 中, } PD = \sqrt{DQ^2 - PQ^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = AD = PD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BF = \frac{1}{4}BC = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \angle BEF = 90^\circ - \angle BFE, \angle BFE = \angle PFG = 90^\circ - \angle PGF, \quad \angle PGF = \angle DGC = 90^\circ - \angle GDC$$

$$\therefore \angle BEF = \angle DGC,$$

$$\text{又} \therefore \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBF \sim \triangle GCD,$$

$$\therefore \frac{EB}{CG} = \frac{BF}{CD},$$

$$\text{即 } \frac{1}{CG} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{3},$$

$$\therefore CG = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题考查了矩形的折叠问题，相似三角形的性质与判定，熟练掌握折叠的性质以及相似三角形的性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{m^2}{m^2+4m+4} \div \frac{m}{m+2} - \frac{m-1}{m+2}$, 其中 $m = \sqrt{3} - 3$.

【答案】 $\frac{1}{m+2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

【解析】

【分析】对分母 $m^2 + 4m + 4$ 进行分解因式, 再利用除法法则变形, 约分计算后利用同分母分式的加法法则计算得到最简结果, 将 m 的值代入计算并进行分母有理化即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: 原式} &= \frac{m^2}{(m+2)^2} \cdot \frac{m+2}{m} - \frac{m-1}{m+2} \\ &= \frac{m}{m+2} - \frac{m-1}{m+2} \\ &= \frac{1}{m+2} \end{aligned}$$

当 $m = \sqrt{3} - 3$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{\sqrt{3}-3+2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

【点睛】此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握分式的运算法则及二次根式的分母有理化是解本题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 = 4 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 先将 $x+6xy+9y^2$ 分解因式为: $(x+3y)^2$, 则 $x+3y = \pm 2$, 与 $x-3y = 8$ 组合成两个方程组, 解出即可.

【详解】 解: 由 $x+6xy+9y^2 = 4$, 得 $(x+3y)^2 = 4$,

$$\therefore x+3y = \pm 2,$$

$$\therefore \text{原方程组可转化为: } \begin{cases} x+3y = 2 \\ x-3y = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+3y = -2 \\ x-3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

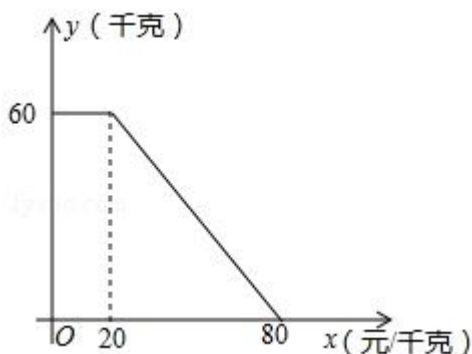
$$\therefore \text{原方程组的解为: } \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查二元二次方程组的解, 解题关键在于掌握运算法则, 准确计算.

21. 某商店以 20 元/千克的单价新进一批商品, 经调查发现, 在一段时间内, 销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 之间为一次函数关系, 如图所示.

(1) 求 y 与 x 的函数表达式;

(2) 要使销售利润达到 800 元, 销售单价应定为每千克多少元?



【答案】 (1) $y = \begin{cases} 60(0 < x < 20) \\ -x + 80(20 \leq x \leq 80) \end{cases}$; (2) 40 元或 60 元.

【解析】

【详解】试题分析：(1) 当 $20 \leq x \leq 80$ 时，利用待定系数法即可得到 y 与 x 的函数表达式；

(2) 根据销售利润达到 800 元，可得方程 $(x-20)(-x+80)=800$ ，解方程即可得到销售单价.

试题解析：解：(1) 当 $0 < x < 20$ 时， $y=60$ ；

当 $20 \leq x \leq 80$ 时，设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b$ ，把 $(20, 60)$ ， $(80, 0)$ 代入，可得：
$$\begin{cases} 60 = 20k + b \\ 0 = 80k + b \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 80 \end{cases}$$
， $\therefore y = -x + 80$ ， $\therefore y$ 与 x 的函数表达式为 $y = \begin{cases} 60 (0 < x < 20) \\ -x + 80 (20 \leq x \leq 80) \end{cases}$ ；

(2) 若销售利润达到 800 元，则 $(x-20)(-x+80)=800$ ，解得 $x_1=40$ ， $x_2=60$ ， $\therefore$ 要使销售利润达到 800 元，销售单价应定为每千克 40 元或 60 元.

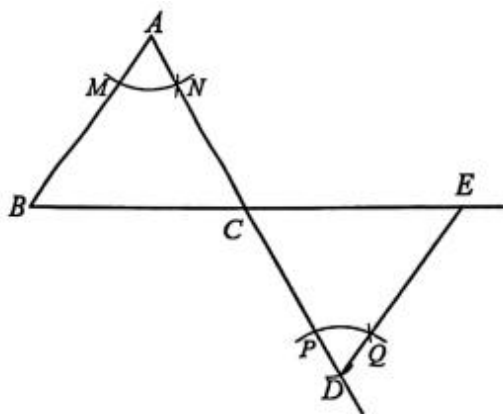
22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle BAC=2$. 小明根据下列步骤作图：

①以点 C 为圆心， AC 的长为半径作弧，交 AC 的延长线于点 D ；

②以点 A 为圆心，取定长 a 为半径作弧分别交 $\angle BAC$ 的两边于点 M 、 N ；

③以点 D 为圆心， a 为半径作弧，交 CD 于点 P ；

④以点 P 为圆心， MN 的长为半径作弧，交前弧于点 Q ，连接 DQ 并延长交 BC 的延长线于点 E .



(1) 填空：

由作图步骤①可得 $CD = AC$ ；

由作图步骤②③④可得 $\angle BAC = \angle CDE$ ；

又因为 $\angle ACB = \angle DCE$ ；

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，理由是 ASA 。

(2) 连接 AE ，求 $\tan \angle EAD$ 的值。

【答案】(1) $\angle BAC, \angle CDE$ ， ASA

(2) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据基本作图可知 $\angle BAC = \angle CDE$ ，以及全等三角形的判定完成填空即可求解；

(2) 连接 BD, AE ，过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G ， $AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle BAC = 2$ ，设 $AG = x$ ，则 $BG = 2x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，求得 $x = \sqrt{5}$ ，进而得出 $CG = AC - AG = \sqrt{5}$ ， $BG = 2\sqrt{5}$ ，根据 (1) 证明四边形 $ABDE$ 是平行四边形，得出 $\angle EAD = \angle BDE$ ，进而根据正切的定义即可求解。

【小问 1 详解】

由作图步骤①可得 $CD = AC$ ；

由作图步骤②③④可得 $\angle BAC = \angle CDE$ ；

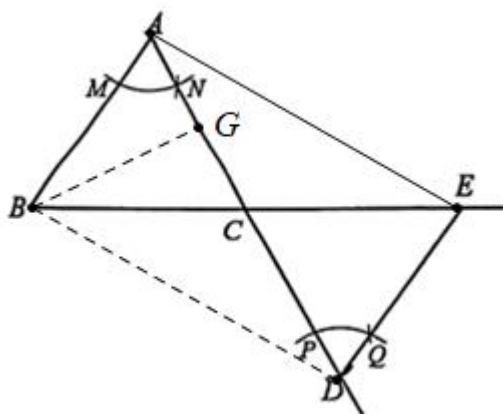
又因为 $\angle ACB = \angle DCE$ ；

所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，理由是 ASA。

故答案为： $\angle BAC, \angle CDE$ ，ASA。

【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 BD, AE ，过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G ，



$\because AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle BAC = 2$ ，设 $AG = x$ ，则 $BG = 2x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中， $BG^2 = AB^2 - AG^2$ ，

$$\therefore (2x)^2 = 5^2 - x^2,$$

解得： $x = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore CG = AC - AG = \sqrt{5}, \quad BG = 2\sqrt{5},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ ，

$$\therefore BC = CE, AC = CD, \quad GD = AD - AG = 2AC - AG = 4\sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5},$$

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形,

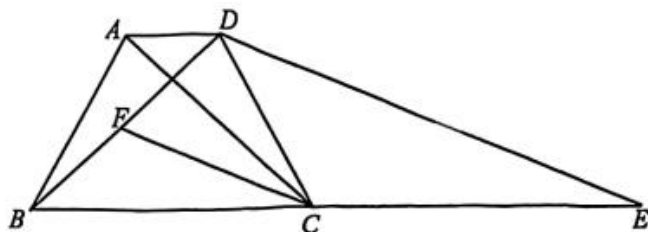
$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BDE,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BGD \text{ 中, } \tan \angle EAD = \tan \angle ADB = \tan \angle GDB = \frac{BG}{GD} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}.$$

【点睛】 本题考查了作角平分线，全等三角形的判定，平行四边形的性质与判定，勾股定理，求角的正切，熟练掌握以上知识是解题的关键.

23. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，点 E 为 BC 延长线上一点， $\angle ADB = \angle CDE$ ，点 F 在 BD 上，联结 CF .



(1) 求证: $AD \cdot DE = AC \cdot DC$;

(2) 如果 $AD \cdot CE = DF \cdot DB$ ，求证: 四边形 $DFCE$ 为梯形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，由等腰梯形的性质和已知条件可证明 $\triangle DAB \sim \triangle DCE$ ，根据相似比及等量替换即可求解；

(2) 由 (1) 中相似三角形可得对应边的相似比，根据给定条件和等腰梯形的性质，可证明 $\triangle DBC \sim \triangle DCF$ ，可得对应角相等，根据平行的性质和相似的性质，对相关角度进行等量替换，即可证明 $FC \parallel DE$ ，即可证明结论成立.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC, AB = CD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形

$$\therefore \angle DAB = \angle ADC, AC = DB$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ADC$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DCE$$

$$\text{又} \because \angle ADB = \angle CDE$$

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{DB}{DE}, \text{ 即 } AD \cdot DE = DB \cdot DC$$

$$\text{又} \because AC = DB$$

$$\therefore AD \cdot DE = AC \cdot DC$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CE}, \text{ 即 } AD \cdot CE = AB \cdot DC$$

$$\because AD \cdot CE = DF \cdot DB$$

$$\therefore AB \cdot DC = DF \cdot DB$$

$$\because AB = CD$$

$$\therefore CD \cdot CD = DF \cdot DB, \text{ 即 } \frac{DC}{DB} = \frac{DF}{DC},$$

$$\text{又} \because \angle CDF = \angle BDC$$

$$\therefore \triangle DBC \sim \triangle DCF$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCF$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ADB$$

$$\because \angle ADB = \angle EDC$$

$$\therefore \angle DCF = \angle EDC$$

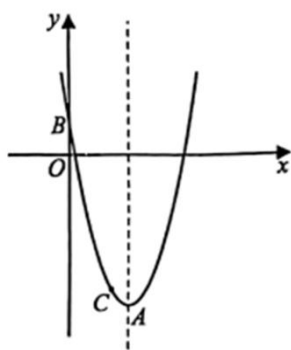
$$\therefore FC \parallel DE$$

$$\because FC \neq DE$$

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 为梯形.

【点睛】 本题主要考查等腰梯形的判定和性质、相似三角形的判定和性质，解题的关键是根据等腰梯形的性质证明三角形相似，得出对应边成比例，由对应边成比例及夹角相等亦可得出三角形相似.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3$ 的顶点为 A ，与 y 轴相交于点 B ，异于顶点 A 的点 $C(2, n)$ 在该抛物线上.



(1) 如图, 点 B 的坐标为 $(0,1)$

①求点 A 的坐标和 n 的值;

②将抛物线向上平移后的新抛物线与 x 轴的一个交点为 D , 顶点 A 移至点 A_1 , 如果四边形 $DCAA_1$ 为平行四边形, 求平移后新抛物线的表达式;

(2) 直线 AC 与 y 轴相交于点 E , 如果 $BC \parallel AO$ 且点 B 在线段 OE 上, 求 m 的值.

【答案】 (1) ① $A(3, -8)$, $n = -7$; ② $y = x^2 - 6x + 8$

(2) $m = -1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 (1) ①把 $B(0,1)$ 代入 $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3$ 得 $m = 2$, 即可求出答案; ②根据平行四边形的性质得出 $AA_1 = CD = 7$, 可知抛物线向上平移了 7 个单位, 即可直接写出平移后的新抛物线的解析式;

(2) 先求出 $A(m+1, -m^2 - 4)$, $B(0, 2m - 3)$, $C(2, -2m - 3)$, 然后利用待定系数法求出直线 OA 的解析式, 根据 $BC \parallel AO$ 表示出直线 BC 的解析式, 将 $C(2, -2m - 3)$ 代入, 求出 m 的值, 再检验点 B 是否在线段 OE 上即可.

【小问 1 详解】

解: ①把 $B(0,1)$ 代入 $y = x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3$, 得: $2m - 3 = 1$,

$\therefore m = 2$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8$,

$\therefore A(3, -8)$,

把 $C(2, n)$ 代入 $y = x^2 - 6x + 1$, 得: $n = -7$,

故答案是 $A(3, -8)$, $n = -7$;

②如图 1,

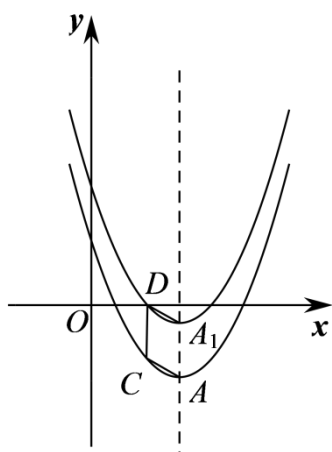


图 1

$\because$ 四边形 $DCAA_1$ 为平行四边形, $C(2, -7)$, 新抛物线与 x 轴的一个交点为 D ,

$\therefore D(2, 0)$,

$\therefore AA_1 = CD = 7$,

又 $\because A(3, -8)$,

$\therefore A_1(3, -1)$,

$\therefore$ 抛物线向上平移后的新抛物线的解析式为 $y = (x - 3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$;

【小问 2 详解】

如图 2,

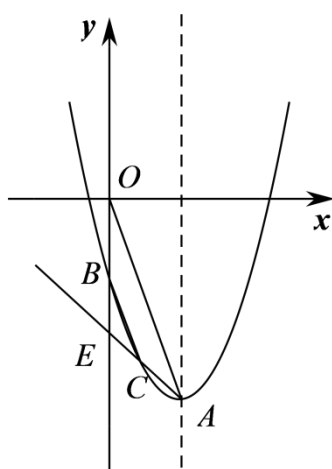


图 2

$\because y = x^2 - 2(m+1)x + 2m - 3 = (x - m - 1)^2 - m^2 - 4$,

$$\therefore A(m+1, -m^2-4), B(0, 2m-3), C(2, -2m-3),$$

设直线 OA 的解析式为 $y = kx$ ，把 $A(m+1, -m^2-4)$ 代入，得：

$$k = \frac{-m^2-4}{m+1} (m \neq -1),$$

$$\because BC \parallel AO, B(0, 2m-3)$$

$\therefore$ 可设直线 BC 的解析式为 $y = \frac{-m^2-4}{m+1}x + 2m-3$ ，把 $C(2, -2m-3)$ 代入，得：

$$\frac{-m^2-4}{m+1} \times 2 + 2m-3 = -2m-3,$$

$$\text{解得: } m = -1 \pm \sqrt{5},$$

$$\text{当 } m = -1 + \sqrt{5} \text{ 时, } B(0, 2\sqrt{5}-5), A(\sqrt{5}, -10+2\sqrt{5}), C(2, -1-2\sqrt{5}),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = k_1x + b_1$ ，把 $A(\sqrt{5}, -10+2\sqrt{5})$ ， $C(2, -1-2\sqrt{5})$ 代入，得：

$$\begin{cases} \sqrt{5}k_1 + b_1 = -10 + 2\sqrt{5} \\ 2k_1 + b_1 = -1 - 2\sqrt{5} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = 2 - \sqrt{5} \\ b_1 = -5 \end{cases},$$

$$\therefore y = (2 - \sqrt{5})x - 5,$$

$$\therefore E(0, -5),$$

$$\because B(0, 2\sqrt{5}-5),$$

$\therefore$ 点 B 在线段 OE 上，符合题意；

$$\text{当 } m = -1 - \sqrt{5} \text{ 时, } B(0, -2\sqrt{5}-5), A(-\sqrt{5}, -10-2\sqrt{5}), C(2, -1+2\sqrt{5}),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = k_2x + b_2$ ，把 $A(-\sqrt{5}, -10-2\sqrt{5})$ ， $C(2, -1+2\sqrt{5})$ 代入，得：

$$\begin{cases} -\sqrt{5}k_2 + b_2 = -10 - 2\sqrt{5} \\ 2k_2 + b_2 = -1 + 2\sqrt{5} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_2 = 2 + \sqrt{5} \\ b_2 = -5 \end{cases},$$

$$\therefore y = (2 + \sqrt{5})x - 5,$$

$$\therefore E(0, -5),$$

$$\therefore B(0, -2\sqrt{5} - 5),$$

$\therefore$ 点 B 不在线段 OE 上, 不符合题意, 舍去;

$$\text{故 } m = -1 + \sqrt{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了二次函数与一次函数的综合应用, 熟练掌握二次函数的图象平移, 互相平行的两条一次函数图象间的关系是解题的关键, 对求出的值进行检验是解题的难点和易错点.

25. 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{5}$, 点 P 在对角线 BD 上, $\tan \angle DBC = \frac{1}{2}$, $\odot O$ 是 $\triangle PAB$ 的外接圆, 点 B 与点 P 之间的距离记为 m .

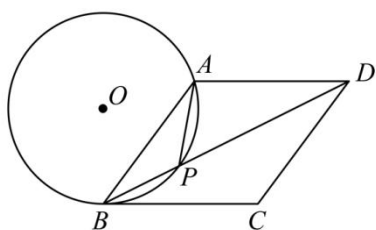


图1

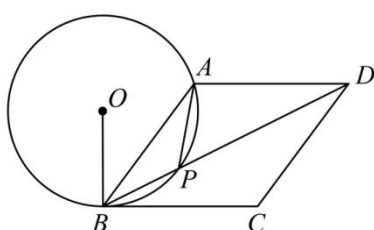
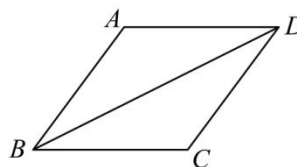


图2



备用图

- (1) 如图 2, 当 $PA = PB$ 时, 联结 OB , 求证: $OB \perp BC$;
- (2) 延长 AP 交射线 BC 于点 Q , 如果 $\triangle ABQ$ 是直角三角形, 求 PQ 的长;
- (3) 当圆心 O 在菱形 $ABCD$ 外部时, 用含 m 的代数式表示 $\odot O$ 的半径, 并直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) 见解析 (2) $PQ = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$;

$$(3) \sqrt{5} < m < 5$$

【解析】

【分析】 (1) 连接 OP 、 OB , OP 交 AB 于 E , 由 $PA = PB$, 得出 $\widehat{AP} = \widehat{BP}$, 根据垂径定理得出 $OP \perp AB$, $AE = BE$, 则 $\angle 1 + \angle OPB = 90^\circ$. 由 $\angle OBP = \angle OPB$, 得出 $\angle 1 + \angle OBP = 90^\circ$. 根据菱形的性质得出 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\angle 2 + \angle OBP = 90^\circ$,

(2) 分当 $\angle AQB = 90^\circ$ 时, 当 $\angle BAQ = 90^\circ$ 时, 如图所示, 设 CD, AQ 交于点 G , 分别画出图形, 解直角三角形, 即可求解;

(3) 分点 O 在 AB , BC 上, 以及 P 与点 D 重合时, 与点 B 重合时, 分别求得 m 的值, 结合图形即可求解.

【小问 1 详解】

解: 连接 OP 、 OB , OP 交 AB 于 E , 如图,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AD = \sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle PBQ = \frac{PQ}{BQ} = \frac{1}{2},$$

设 $PQ = x$, 则 $AQ = \sqrt{5} + x$, $BQ = 2x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB^2 = BQ^2 + AQ^2$,

$$\therefore (2\sqrt{5})^2 = (2x)^2 + (x + \sqrt{5})^2,$$

解得: $x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $x = -\sqrt{5}$ (舍去),

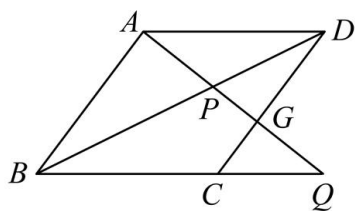
$$\therefore PQ = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BQ = 2PQ = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AQ = AP + PQ = \sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \tan \angle ABQ = \frac{AQ}{BQ} = \frac{4}{3},$$

当 $\angle BAQ = 90^\circ$ 时, 如图所示, 设 CD, AQ 交于点 G



$$\therefore \tan \angle ABC = \tan \angle ABQ = \frac{AQ}{AB} = \frac{4}{3}, \quad AB = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AQ = \frac{4}{3}AB = \frac{8\sqrt{5}}{3},$$

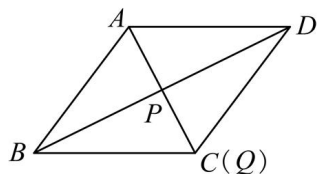
又 $\therefore \tan \angle ABP = \frac{1}{2}$, 则 $AP = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$

$$\therefore PQ = AQ - AP = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

综上所述, $PQ = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\frac{5\sqrt{5}}{3}$;

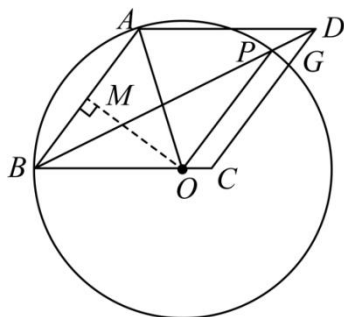
【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知, 当 $\angle APB = 90^\circ$ 时,



此时点 O 在 AB 上, 则 $m = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5}$

当 O 在 BC 上时, 如图所示, 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M ,



$$\because OA = OB,$$

$$\therefore AM = BM = \sqrt{5},$$

$$\because \tan \angle ABO = \frac{4}{3}$$

$$\text{设 } OM = 4k, BM = 3k$$

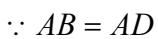
$$\text{则 } BO = 5k$$

$$\therefore \sqrt{5} = 3k$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore BO = \frac{5}{3}\sqrt{5},$$

当 P 与 D 重合时, 如图所示,



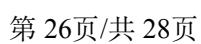
$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle BOM$$

即 $BM:MO:BO=1:2:\sqrt{5}$

$$\therefore BO = \sqrt{5}MB$$

$$\therefore BO = 5,$$

当点 P 与 B 点重合时, 同理可得 $m = 5$,



则 $\frac{5}{3}\sqrt{5} < m < 5$ 时，圆心 O 在菱形 $ABCD$ 外部时，

综上所述，当 $\sqrt{5} < m < 5$ 时或 $\frac{5}{3}\sqrt{5} < m < 5$ 时，即 $\sqrt{5} < m < 5$ 圆心 O 在菱形 $ABCD$ 外部.

【点睛】 本题考查了菱形的性质，解直角三角形，垂径定理，圆周角定理，熟练掌握解直角三角形，与圆的相关性质是解题的关键.

