

杨浦区 2022 学年度第二学期初三质量调研 (二)

数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;

2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;

3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列各数中, 无理数是 ()

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{22}{7}$

C. $\sqrt{4}$

D. 0.101001000

【答案】A

【解析】

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【详解】解: A、 $\frac{\pi}{2}$ 是无理数, 故此选项符合题意;

B、 $\frac{22}{7}$ 是分数, 属于有理数, 故此选项不符合题意;

C、 $\sqrt{4} = 2$ 是有理数, 故此选项不符合题意;

D、0.101001000 是有限小数, 属于有理数, 故此选项不符合题意.

故选: A.

【点睛】此题主要考查了无理数的定义, 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 0.1010010001..., 等有这样规律的数, 熟练掌握无理数的定义是解题关键.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

A. $a^3 + a^3 = 2a^6$

B. $(a^3)^3 = a^6$

C. $a^3 \cdot a = a^4$

D. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法、幂的乘方、合并同类项以及完全平方公式逐项计算即可.

【详解】解: A. $a^3 + a^3 = 2a^3$, 故选项 A 不符合题意;

B. $(a^3)^3 = a^9$, 故选项 B 不符合题意;

C. $a^3 \cdot a = a^4$, 故选项 C 符合题意;

D. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故选项 D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘法、幂的乘方、合并同类项以及完全平方公式等知识, 熟练掌握相关运算是解答本题的关键.

3. 下列各统计量中, 表示一组数据波动程度的量是 ()

A. 方差

B. 众数

C. 平均数

D. 频数

【答案】A

【解析】

【分析】根据方差、众数、平均数、频数的意义即可求解.

【详解】解: 方差是表示一组数据波动程度的量, 众数、平均数是表示一组数据集中趋势的量, 频数是表示数据出现的次数,

故选 A.

【点睛】本题考查了方差、众数、平均数、频数的意义, 掌握以上知识是解题的关键.

4. 平面直角坐标系 xOy 中, 若点 $A(x_1, 2)$ 和 $B(x_2, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图像上, 则下列关系式正确的是 ()

A. $x_1 > x_2 > 0$

B. $x_2 > x_1 > 0$

C. $x_1 < x_2 < 0$

D. $x_2 < x_1 < 0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据反比例函数图像的特点即可求解.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$,

$\therefore$ 反比例函数图像经过第一、三象限, 在第一象限中, 函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 点 $A(x_1, 2)$ 和 $B(x_2, 4)$ 中, $2 < 4$,

$\therefore 0 < x_2 < x_1$, 即 $x_1 > x_2 > 0$,

故选: A.

【点睛】本题主要考查反比例函数图像的特点，掌握反比例函数图像的增减性是解题的关键.

5. 下列图形中，是中心对称但不是轴对称的图形是（ ）

- A. 角 B. 平行四边形 C. 等腰梯形 D. 正五边形

【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念，轴对称图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是图形沿对称中心旋转 180 度后与原图重合，根据两个定义即可作出判断.

【详解】A. 角是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

B. 平行四边形是中心对称图形，不是轴对称图形，故符合题意；

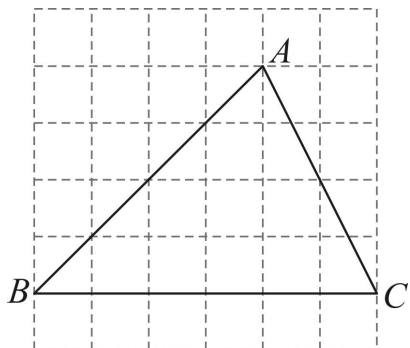
C. 等腰梯形是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

D. 正五边形是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合题意；

故选 B.

【点睛】题目主要考查轴对称图形、中心对称图形的判断，熟练掌握两种图形的定义是解题关键.

6. 新定义：由边长为 1 的小正方形构成的网格图中，每个小正方形的顶点称为格点，顶点都在格点上的三角形称为格点三角形. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是 6×6 的网格图中的格点三角形，那么该网格中所有与 $\triangle ABC$ 相似且有一个公共角的格点三角形的个数是（ ）



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】连接格点 DF, EF ，根据两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似解答即可.

【详解】如图，连接格点 DF, EF .

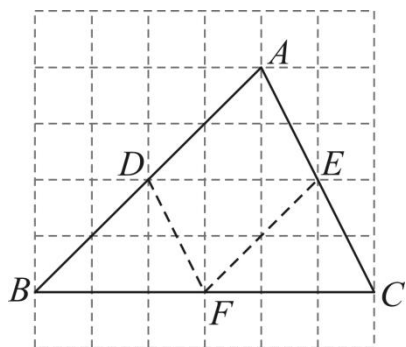
$$AD = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$$AE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AD}{AB} &= \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \angle DAE &= \angle BAC, \\ \therefore \triangle ADE &\sim \triangle ABC.\end{aligned}$$

同理可证: $\triangle BDF \sim \triangle BAC, \triangle CEF \sim \triangle CAB$.

故选 C.



【点睛】本题考查了勾股定理，相似三角形的判定，熟练掌握两边对应

成比例且夹角相等的两个三角形相似是解答本题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $-3-2=$ _____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】根据有理数的减法进行计算即可求解.

【详解】解: $-3-2 = -3+(-2) = -5$.

故答案为: -5.

【点睛】本题考查了有理数的减法运算, 掌握有理数的减法法则是解题的关键.

8. 函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \neq 1$

【解析】

【分析】求函数的定义域就是找使函数有意义的自变量的取值范围.

【详解】解: 函数要有意义, 则 $x-1 \neq 0$,

解得: $x \neq 1$,

故答案为: $x \neq 1$.

【点睛】本题考查的知识点是函数的定义域, 关键要知道函数有意义的自变量的取值范围.

9. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义：两个根式相乘的积不含根号，可得答案.

【详解】 $a-b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$,

故 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

故答案为 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

【点睛】 考查了分母有理化，正确选择两个二次根式，使它们的积符合平方差公式是解答问题的关键.

10. 不等式组 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 2x+3 > 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-1 < x < 2$

【解析】

【分析】 分别解出不等式组中的每一个不等式，然后根据大小小大中间找得出原不等式组的解集即可.

【详解】 解： $\begin{cases} 2-x > 0 \text{①} \\ 2x+3 > 1 \text{②} \end{cases}$,

解不等式①，得： $x < 2$,

解不等式②，得： $x > -1$,

所以不等式组的解集为 $-1 < x < 2$,

故答案为： $-1 < x < 2$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握解一元一次不等式组的解集的确定方法“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找”是解题的关键.

11. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m = 0,$$

解得 $m = 1$

故答案为：1.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根.

12. 如果抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧呈上升趋势，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 0$

【解析】

【分析】 利用二次函数的性质得到抛物线开口向下，则可得 a 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧呈上升趋势，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore a < 0$ ，

故答案为： $a < 0$.

【点睛】 本本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下.

13. 一个不透明的盒子中装有 3 个红球，2 个黄球，这些球除了颜色外无其他差别，从中随机摸出一个小球，则摸到黄球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 先算出总的球的个数，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】 解： 总的球数为： $3+2=5$ 个，

$\therefore$ 从中随机摸出一个球，恰好是黄球的概率为： $P = \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题主要考查了概率公式：随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

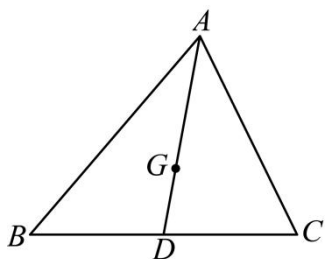
14. 已知一个 40 个数据的样本，把它分成 6 组，第一组到第四组的频数分别是 10、5、7、6，第五组的频率是 0.1，那么第六组的频数是_____.

【答案】 8

【解析】

【详解】解：根据题意，得：第一组到第四组的频率和是 $\frac{28}{40}=0.7$ ．又 $\because$ 第五组的频率是 0.10， $\therefore$ 第六组的频率为 $1 - (0.7+0.10) = 0.2$ ， $\therefore$ 第六组的频数为： $40 \times 0.2=8$ ．故答案为 8．

15. 如图，已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AG}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为_____．



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】根据三角形重心的性质得出 D 点是 BC 边的中点，求出 $\overrightarrow{CD}$ ，再由向量的加法法则求出 $\overrightarrow{AD}$ ，然后根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心即可求出 $\overrightarrow{AG}$ ．

【详解】如图， D 点是 AB 边的中点， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\because \overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ， D 点是 AB 边的中点，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ ．

【点睛】本题考查三角形的重心，向量的计算等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

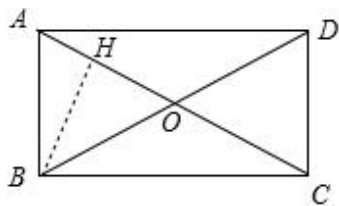
16. 如果一个矩形的面积是 40，两条对角线夹角的余切值是 $\frac{3}{4}$ ，那么它的一条对角线长是_____．

【答案】 10

【解析】

【分析】作 $BH \perp AC$ 于 H ．由四边形 $ABCD$ 是矩形，推出 $OA = OC = OD = OB$ ，设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，由余切函数，可得 $BH = 4a$ ， $OH = 3a$ ，由题意： $2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40$ ，求出 a 即可解决问题．

【详解】解：如图，作 $BH \perp AC$ 于 H 。



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore OA = OC = OD = OB,$$

设 $OA = OC = OD = OB = 5a$ ，则 $AC = 10a$ 。

$$\because \text{根据题意得：} \cot \angle BOH = \frac{3}{4} = \frac{OH}{BH},$$

$$\therefore BH = 4a, OH = 3a,$$

$$\text{由题意：} 2 \times \frac{1}{2} \times 10a \times 4a = 40,$$

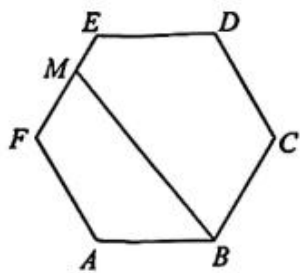
$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore AC = 10.$$

故答案为 10.

【点睛】本题考查了矩形的性质、解直角三角形等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题。

17. 如图，已知点 M 在正六边形 $ABCDEF$ 的边 EF 上运动，如果 $AB = 1$ ，那么线段 BM 的长度的取值范围是_____。

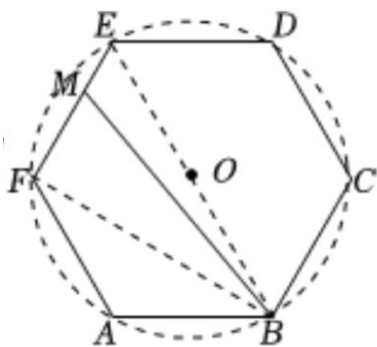


【答案】 $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$

【解析】

【分析】根据题意，作出正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆为圆 O ，连接 BE, BF ，则点 O 在 BE 上，根据正多边形的性质及内角和得出 $\angle A = \angle AFE = 120^\circ$ 。再由各角之间的关系得出 $\angle BFE = 90^\circ$ ，然后在 $Rt\triangle BEF$ 中，利用含 30° 度角的直角三角形的性质求解即可。

【详解】解：如图，正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆为圆 O ，连接 BE, BF ，则点 O 在 BE 上，



$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$

$$\therefore AB = AF = EF = 1, \angle A = \angle AFE = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BEF \text{ 中, } BE = 2AB = 2, \angle EBF = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

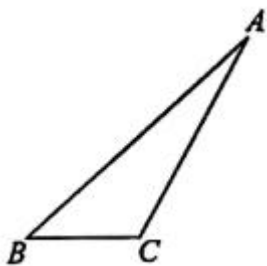
$$\therefore BF = \cos \angle EBF \cdot EB = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 M 在正六边形 $ABCDEF$ 的边 EF 上运动时线段 BM 的长度的取值范围是 $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$,

故答案为: $\sqrt{3} \leq BM \leq 2$.

【点睛】 本题主要考查了正多边形的性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质及解三角形, 理解题意, 作出临界图形是解题关键.

18. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 7, \angle ACB = 120^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° , 点 A, C 分别落在点 D, E 处, 联结 DC , 如果 $DC \perp AC$, 那么边 BC 的长_____.



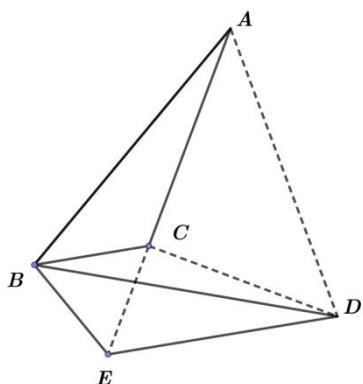
【答案】 $\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 由旋转变换易证 $DE = AC$, $DE = AC$, $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$, $\angle DEC = 60^\circ$, 由 $DC \perp AC$, 得 $\angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$; 设 $CE = x$, 由三角函数得 $DE = 2x$, $CD = \sqrt{3}x$; 在 $Rt\triangle ACD$

中，运用勾股定理求解得 $x = \sqrt{7}$ ，所以 $BC = \sqrt{7}$ 。

【详解】如图，由旋转知， $DE = AC$ ， $\angle BED = \angle BCA = 120^\circ$ ， $\triangle ABD$ ， $\triangle BCE$ 为等边三角形，
 $\therefore \angle BEC = \angle BCE = 60^\circ$ ， $CE = BC$ ， $AD = AB = 7$ ，



$$\therefore \angle ACE = 180^\circ, \angle DEC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore DC \perp AC$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } DE = 2x, CD = \sqrt{3}x$$

$$\text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD^2 = AC^2 + CD^2$$

$$\therefore 7^2 = (2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2, \text{ 解得 } x = \sqrt{7} \text{ (负值舍去),}$$

故答案为： $\sqrt{7}$

【点睛】 本题主要考查旋转变换、全等三角形的性质、等边三角形的性质、勾股定理及特殊角三角函数；能够灵活运用相关知识导出线段间的数量关系是解题的关键。

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } 8^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - \sqrt{3})^0$$

【答案】 $3\sqrt{2} - 2$

【解析】

【分析】 先计算分数指数幂及零指数与负整数指数幂，绝对值化简，然后进行二次根式的加减法即可。

$$\text{【详解】 解: } 8^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (\pi - \sqrt{3})^0$$

$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 - 2 + 1$$

$$= 3\sqrt{2} - 2.$$

【点睛】题目主要考查分数指数幂及零指数与负整数指数幂，绝对值化简，二次根式的加减法等，熟练掌握各个运算法则是解题关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \textcircled{1} \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先将②式因式分解为 $(x + 3y)(x - y) = 0$ ，则可得 $(x + 3y) = 0$ 或 $(x - y) = 0$ ，再分别与①式联立求解即可.

【详解】解：由②得: $(x + 3y)(x - y) = 0$,

$$\therefore \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 原方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -5 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查了解二元二次方程组，解题的关键是将②式进行因式分解，把原方程组转化为两个二元一次方程组.

21. 某商店购进了一种生活用品，进价为每件 8 元，销售过程中发现，该商品每天的销售量 y (件) 与每件售价 x (元) 之间存在一次函数关系 (其中 $8 \leq x \leq 15$ ，且 x 为整数)，部分对应值如下表:

每件售价 x (元)	9	11	13
每天的销售量 y (件)	105	95	85

(1) 求 y 与 x 的函数解析式;

(2) 如果该商店打算销售这种生活用品每天获得 425 元的利润，那么每件生活用品的售价应定为多少元?

【答案】 (1) $y = -5x + 150$ ($8 \leq x \leq 15$) (2) 13 元

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解即可;

(2) 由题意知, 利润 $w = (x-8)(-5x+150) = -5(x-19)^2 + 605$, 令 $w = 425$, 则 $-5(x-19)^2 + 605 = 425$, 计算求解满足要求的 x 值即可.

【小问 1 详解】

解: 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = kx + b$, ($8 \leq x \leq 15$),

将 $(9, 105)$, $(11, 95)$ 代入得 $\begin{cases} 105 = 9k + b \\ 95 = 11k + b \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -5 \\ b = 150 \end{cases}$,

$\therefore y = -5x + 150$,

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y = -5x + 150$ ($8 \leq x \leq 15$);

【小问 2 详解】

解: 由题意知, 利润 $w = (x-8)(-5x+150) = -5(x-19)^2 + 605$,

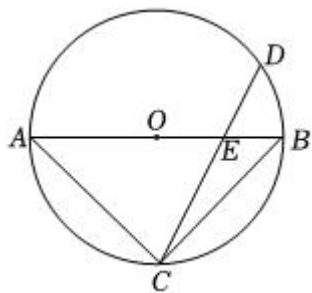
令 $w = 425$, 则 $-5(x-19)^2 + 605 = 425$,

解得 $x = 13$ 或 $x = 25$ (不合题意, 舍去),

$\therefore$ 每件消毒用品的售价为 13 元;

【点睛】 本题考查了一次函数的应用, 二次函数的应用, 二次函数图象与性质. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

22. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E , $AC = BC$, $AB = 4\sqrt{5}$, $CD = 8$.



(1) 求 $\sin \angle AEC$ 的值;

(2) 求点 A 到弦 CD 的距离.

【答案】 (1) $\sin \angle AEC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2) 6

【解析】

(2) 过点 A 作 $AH \perp CE$, 利用相似三角形的判定和性质即可求解.

解: 如图, 连接 OC 、 OD , 过点 O 作 $OF \perp CE$,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $AB = BC$,

$$\therefore \angle ACB = \angle BOC = 90^\circ, \quad AO = BO = CO = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{5},$$

$$\because OF \perp CE,$$

$$\therefore CF = DF = \frac{1}{2}CD = 4,$$

$$\therefore OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = 2,$$

$$\because \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ, \quad \angle OEF + \angle OCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = \angle OCE \text{ ,}$$

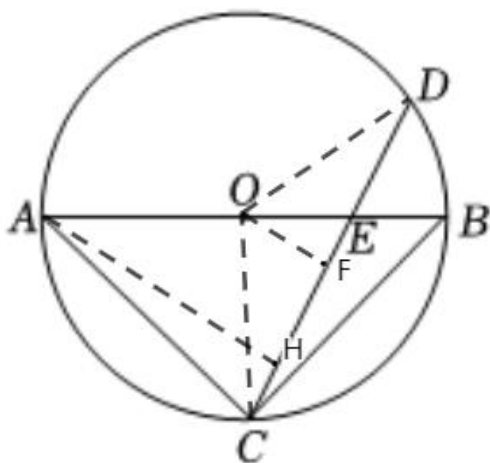
$$\therefore \angle OFE = \angle OFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle COF,$$

$$\therefore \frac{OF}{CF} = \frac{EF}{OF} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{4},$$

$$\therefore EF = 1, \quad OE = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle AEC = \frac{OF}{OE} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$



过点 A 作 $AH \perp CE$.

$$\therefore AH \parallel OF,$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle AEH,$$

$$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{OF}{AH},$$

$$\text{由 (1) 得 } OE = \sqrt{5}, \quad AE = 3\sqrt{5},$$

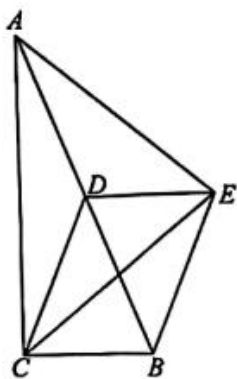
$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{AH},$$

$$\therefore AH = 6,$$

$\therefore$ 求点 A 到弦 CD 的距离为 6.

【点睛】 本题考查圆周角定理、垂径定理、相似三角形的判定与性质、勾股定理，熟练掌握圆周角定理和垂径定理，会利用相似三角形的判定与性质求线段长是解答的关键.

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点, $DE \parallel BC$, $BE \parallel CD$, 联结 AE 、 CE .



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CDE$;

(2) 如果 CE 平分 $\angle ACB$, 求证: $AC = 3BC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据直角三角形斜边上的中线的性质得出 $CD = AD = BD$, 再由平行线的性质及各角之间的关系得出 $\angle CDE = \angle ADE$, 利用全等三角形的判定证明即可;

(2) 延长 CB 交 AE 的延长线于点 F , 根据角平分线的性质及全等三角形的性质得出 $\angle DAE = \angle DCE$, 再由等边对等角及等腰三角形的判定和性质得出 $\angle DAC = \angle DCA$, 由全等三角形的判定和性质得出 $AE = FE$, $AC = FC$, 最后由中位线的性质及平行四边形的判定和性质即可证明

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点,

$$\therefore CD = AD = BD,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DBC, \angle CDE + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\because CD = BD,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DCB,$$

$$\because \angle ADE + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ADE,$$

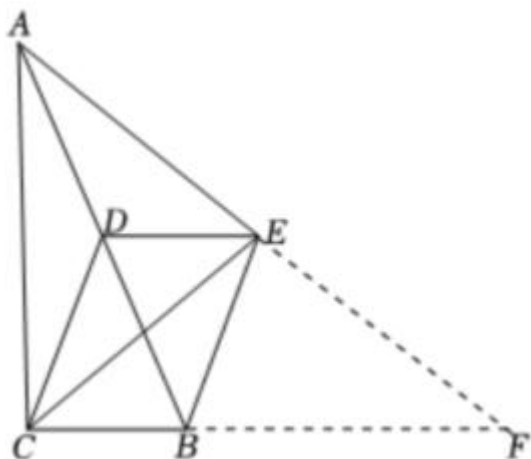
在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle CDE \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDE (\text{SAS});$$

【小问2详解】

延长 CB 交 AE 的延长线于点 F ,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, CE \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCE = 45^\circ$$

$$\because \triangle ADE \cong \triangle CDE$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE$$

$$\because AD = CD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle FEC = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle BCE \\ CE = CE \\ \angle AEC = \angle FEC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle FCE (\text{ASA})$$

$$\therefore AE = FE, AC = FC,$$

$\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABF$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BF,$$

$$\because DE \parallel BC, BE \parallel CD$$

$\therefore$ 四边形 $DCBE$ 是平行四边形,

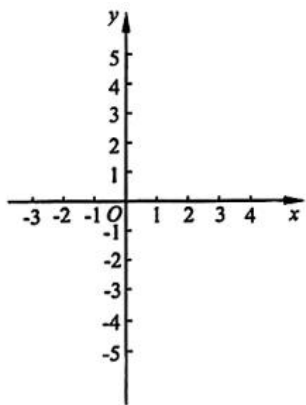
$$\therefore DE = BC,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}BF,$$

$$\therefore AC = CF = 3BC.$$

【点睛】题目主要考查直角三角形斜边中线的性质，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质及中位线的性质，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.

24. 已知抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(3, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ ，顶点为点 D .



(1) 求抛物线的表达式和顶点 D 的坐标;

(2) 点 P 是线段 AB 上的一个动点，过点 P 作 x 轴的垂线交抛物线于点 E ，如果 $PE = PB$ ，求点 P 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下，点 F 在 y 轴上，且点 F 到直线 EC 、 ED 的距离相等，求线段 EF 的长.

【答案】(1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2; \left(1, \frac{8}{3}\right)$

$$(2) P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$(3) \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 将点 A 和点 B 的坐标代入抛物线，即可得出其表达式；

(2) 令 $y=0$ ，确定 $B(-1,0)$ ，设点 $P(x,0)$ ， $(-1 < x < 3)$ ，则 $E(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2)$ ，根据题意得出一元二次方程求解即可；

(3) 由(2)得： $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ，确定 $E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ，利用待定系数法确定直线 EC 、 ED 的解析式分别为： $y = \frac{1}{3}x + 2$ ，
 $y = -\frac{1}{3}x + 3$ ，再由等腰三角形的判定和性质及一次函数的性质确定点 F 的坐标，即可求解。

【小问 1 详解】

将点 $C(0,2)$ 代入抛物线，得 $c=2$

将点 $A(3,0)$ 代入抛物线，得 $b = \frac{4}{3}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为： $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ ；

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{8}{3},$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{8}{3}\right)$ ；

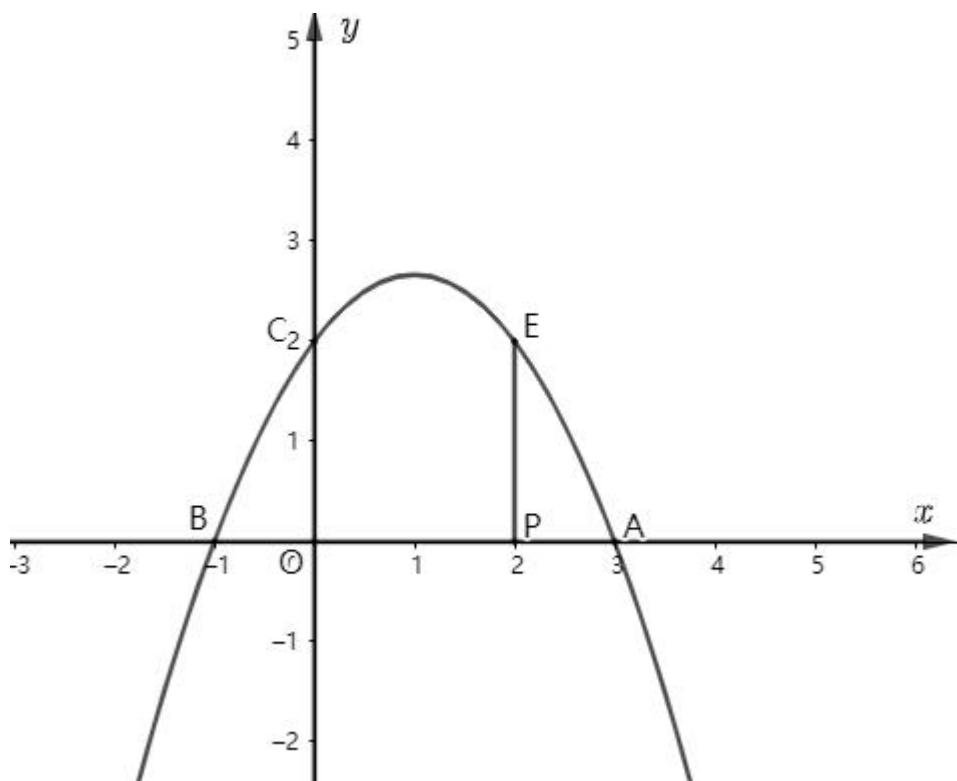
【小问 2 详解】

解：令 $y=0$ 得 $0 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$ ，

$\therefore x=3$ 或 $x=-1$

$\therefore B(-1,0)$ ，

设点 $P(x,0)$ ， $(-1 < x < 3)$ ，则 $E(x, -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2)$ ，如图所示：



$$\therefore PE = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2, \quad PB = x - (-1) = x + 1,$$

$$\because PE = PB,$$

$$\therefore -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = x + 1,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1 \text{ (舍去) 或 } x_2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right);$$

【小问3 详解】

$$\text{由 (2) 得: } P\left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = \frac{5}{2},$$

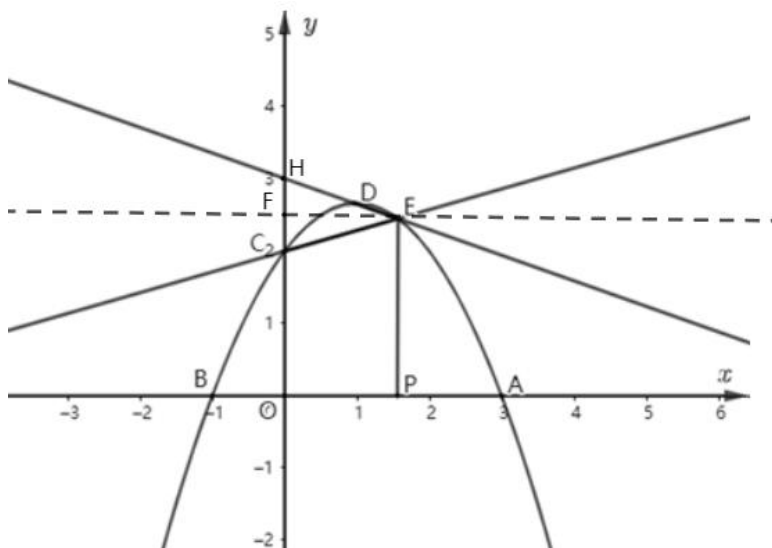
$$\therefore E\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

设直线 EC、ED 的解析式分别为: $y = kx + b$, $y = mx + n$,

$$\text{将点代入得: } \begin{cases} \frac{3}{2}k + b = \frac{5}{2}, \\ b = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{3}{2}m + n = \frac{5}{2}, \\ m + n = \frac{8}{3} \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} k = \frac{1}{3}, \\ b = 2 \end{cases}, \begin{cases} m = -\frac{1}{3}, \\ n = 3 \end{cases},$

$\therefore$ 直线 EC 、 ED 的解析式分别为: $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 3$,



$\therefore$ 直线 EC 、 ED 与 y 轴的交点分别为 $C(0, 2)$, $H(0, 3)$,

$$\therefore EC = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad EH = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$\therefore EC = EH$,

$\therefore \triangle ECH$ 为等腰三角形,

$\therefore$ 点 F 到直线 EC 、 ED 的距离相等, 且点 F 在 y 轴上,

$\therefore$ 点 F 为 $\triangle ECH$ 的角平分线及高线, 即直线 $y = \frac{5}{2}$ 与 y 轴的交点,

$$\therefore F\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

$$\therefore EF = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}.$$

【点睛】 此题主要考查二次函数的综合应用, 包括待定系数确定函数解析式, 线段相等问题及一次函数的性质, 理解题意, 作出相应图象, 综合运用这些知识点是解题关键.

25. 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 3$, 点 O 是边 AB 上的一点 (不与点 A 重合), 以点 O 为圆心, OA 长为半径作圆, 交射线 AB 于点 G .

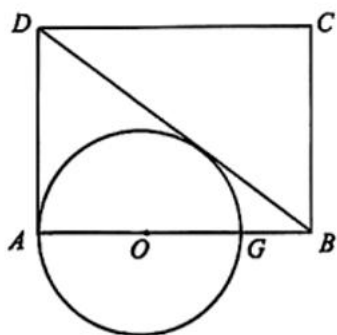


图 1

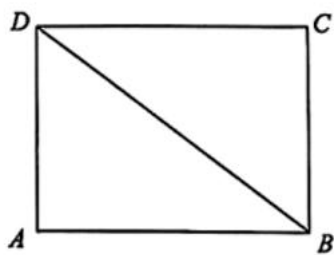


图 2

- (1) 如图 1, 当 $\odot O$ 与直线 BD 相切时, 求半径 OA 的长;
- (2) 当 $\odot O$ 与 $\triangle BCD$ 的三边有且只有两个交点时, 求半径 OA 的取值范围;
- (3) 连接 OD , 过点 A 作 $AH \perp OD$, 垂足为点 H , 延长 AH 交射线 BC 于点 F , 如果以点 B 为圆心, BF 长为半径的圆与 $\odot O$ 相切, 求 $\angle ADO$ 的正切值.

【答案】(1) $\frac{3}{2}$

(2) $\frac{3}{2} < OA < 3$ 或 $\frac{25}{8} < OA \leq 4$

(3) $\frac{2}{5}$ 或 1

【解析】

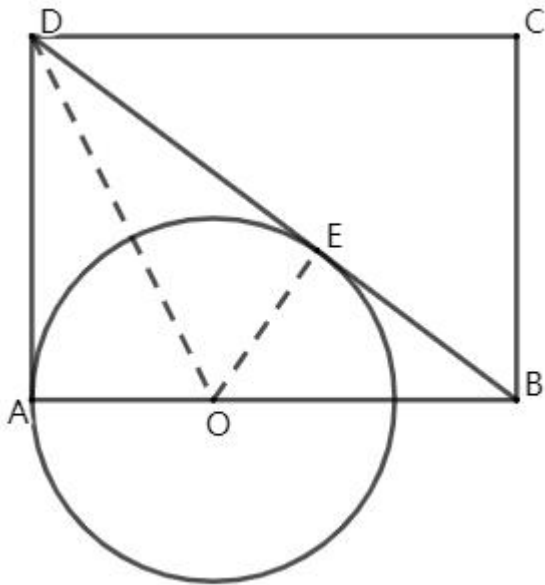
【分析】(1) 设 $\odot O$ 与直线 BD 的切点为点 E , 连接 OE, OD , 根据全等三角形的判定和性质及勾股定理求解即可;

(2) 分三种临界情况: ①当 $\odot O$ 与边 CD 的切点为点 E , 连接 OE , 此时恰好有三个交点, ②当 $\odot O$ 恰好经过点 C 时, 连接 OC , ③当点 O 与点 B 重合时, 作出相应图形求解即可;

(3) 根据题意, 分两种情况: ①两个圆外切时, ②两个圆内切时, 作出图形, 然后利用相似三角形的判定和性质及正切函数的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解: 设 $\odot O$ 与直线 BD 的切点为点 E , 连接 OE, OD , 如图所示:



$$\therefore OE \perp BD, OA = OE,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DEO = 90^\circ,$$

$$\because OD = OD,$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle EDO (\text{HL}),$$

$$\therefore DE = AD = 3,$$

$$\because AB = 4, AD = 3,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5,$$

$$\therefore BE = 5 - 3 = 2,$$

设 $AO = OE = r$, 则 $BO = 4 - r$,

$$\because OE^2 + BE^2 = OB^2,$$

$$\therefore r^2 + 2^2 = (4 - r)^2,$$

$$\text{解得: } r = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{半径 } OA \text{ 的长为 } \frac{3}{2};$$

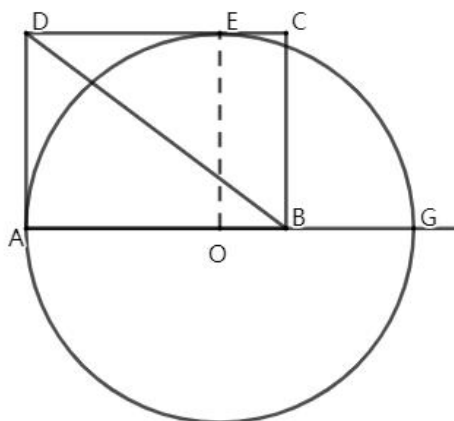
【小问 2 详解】

①如图所示: 当 $\odot O$ 与边 CD 的切点为点 E , 连接 OE , 此时恰好有三个交点,

$$\therefore OE \perp AB,$$

∴ 四边形 $BOEC$ 为矩形,

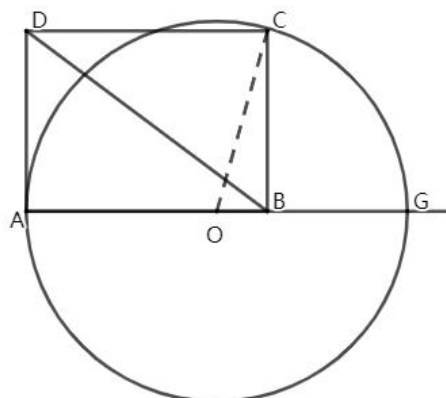
∴ $OE = BC = AO = 3$,



∴ 由 (1) 得半径 OA 的长为 $\frac{3}{2}$, 恰好有一个交点,

∴ 当 $\frac{3}{2} < OA < 3$ 时, 满足条件;

② 当 $\odot O$ 恰好经过点 C 时, 连接 OC , 如图所示:



设 $AO = OC = r$, 则 $BO = 4 - r$,

$$\because OB^2 + BC^2 = OC^2,$$

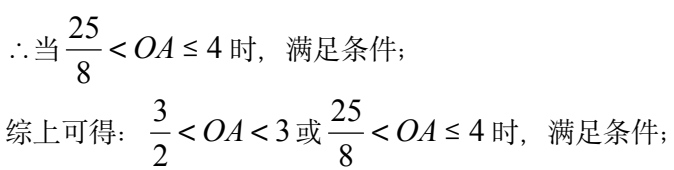
$$\therefore (4 - r)^2 + 3^2 = r^2,$$

$$\text{解得: } r = \frac{25}{8},$$

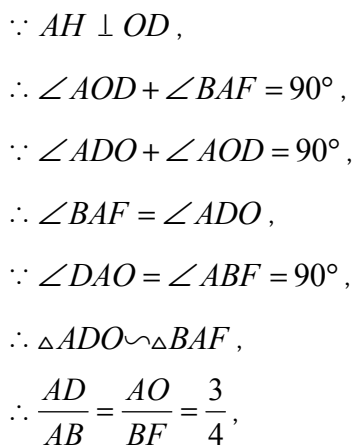
∴ 半径 OA 的长为 $\frac{25}{8}$;

∴ 当 $3 \leq OA < \frac{25}{8}$ 时, $\odot O$ 与 $\triangle BCD$ 的三边的交点多于 2 个, 不满足条件;

③ 当点 O 与点 B 重合时, 如图所示, 满足条件,



①当两个圆外切时, 如图所示:



设 $AO = r$, $BF = r_1$,

$$\therefore \frac{r}{r_1} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } r_1 = \frac{4r}{3},$$

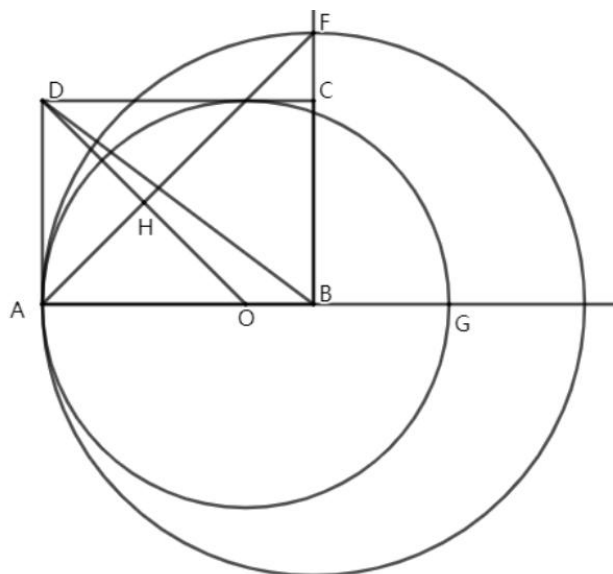
$\because$ 两个圆相切,

$$\therefore r_1 + 2r = 4, \text{ 即 } \frac{4r}{3} + 2r = 4,$$

$$\text{解得: } r = \frac{6}{5} = OA,$$

$$\therefore \tan \angle ADO = \frac{AO}{AD} = \frac{2}{5};$$

②当两个圆内切时, 如图所示:



$$\therefore BF = BA = 4,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AFB = 45^\circ,$$

$$\because AH \perp OD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AOH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle AOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle ADO = \tan 45^\circ = 1;$$

综上所述: $\angle ADO$ 的正切值为 $\frac{2}{5}$ 或 1.

【点睛】题目主要考查切线的性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 矩形的性质及勾股定理, 理解三角形, 正切函数的定义等, 理解题意, 作出辅助线, 综合运用这些知识点是解题关键.

