

2023 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列单项式中， xy^2 的同类项是（ ）

- A. x^3y^2 B. x^2y C. $2xy^2$ D. $2x^2y^3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同类项：所含字母相同，相同字母的指数相同进行判断即可.

【详解】解：A. x^3y^2 与 xy^2 所含字母相同，但相同字母的指数不同，不是同类项，故此选项不符合题意；

B. x^2y 与 xy^2 所含字母相同，但相同字母的指数不同，不是同类项，故此选项不符合题意；

C. $2xy^2$ 与 xy^2 所含字母相同，相同字母的指数相同，是同类项，故此选项符合题意；

D. $2x^2y^3$ 与 $-3xy^2$ 所含字母相同，但相同字母的指数不同，不是同类项，故此选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了同类项的知识，属于基础题，理解同类项的定义是解题关键

2. 下列正确的是（ ）

- A. $\sqrt{4+9} = 2+3$ B. $\sqrt{4 \times 9} = 2 \times 3$ C. $\sqrt{9^4} = 3^2$ D. $\sqrt{4.9} = 0.7$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ 判断 A 选项；根据 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 判断 B 选项；根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 判断 C 选项；根据算术平方根的定义判断 D 选项.

【详解】解：A、原式 $= \sqrt{13}$ ，故该选项不符合题意；

B、原式 $= \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3$ ，故该选项符合题意；

C、原式 $= \sqrt{(9^2)^2} = 9^2$ ，故该选项不符合题意；

D、 $0.7^2 = 0.49$ ，故该选项不符合题意；

故选：B

【点睛】本题考查了二次根式的性质与化简，掌握 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 是解题的关键.

3. 下列检测中，适宜采用普查方式的是（ ）

- A. 检测一批充电宝的使用寿命
B. 检测一批电灯的使用寿命

- C. 检测一批家用汽车的抗撞击能力
D. 检测“神舟十六号”载人飞船零件的质量

【答案】D

【解析】

【分析】根据普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似判断即可.

- 【详解】解：A. 检测一批充电宝的使用寿命，适宜采用抽样调查，故本选项不符合题意；
B. 检测一批电灯的使用寿命，适宜采用抽样调查，故本选项不符合题意；
C. 检测一批家用汽车的抗撞击能力，适宜采用抽样调查，故本选项不符合题意；
D. 检测“神舟十六号”载人飞船零件的质量，适宜普查方式，故本选项符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查的是抽样调查和全面调查的区别，熟练掌握选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象特征灵活选用是解题的关键. 一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查.

4. 下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是（ ）

- A. $y = \frac{x}{2}$ B. $y = -\frac{x}{2}$ C. $y = \frac{2}{x}$ D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】分别对各项的函数解析式进行分析判断即可.

【详解】A: $y = \frac{x}{2}$ 为一次函数， x 取所有实数， $\therefore \frac{1}{2} > 0$ ， $\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，故选项正确；

B: $y = -\frac{x}{2}$ 为一次函数， x 取所有实数， $\therefore -\frac{1}{2} < 0$ ， $\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，故选项错误；

C: $y = \frac{2}{x}$ 为反比例函数， $x \neq 0$ ，在 $x < 0$ 内，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，并且在 $x > 0$ 内，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，故选项错误；

D: $y = -\frac{2}{x}$ 为反比例函数， $x \neq 0$ ，在 $x < 0$ 内，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，并且在 $x > 0$ 内，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，但在 x 从 $x = 0$ 左侧到 $x = 0$ 右侧时不满足条件“函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大”，故选项错误；

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一次函数图像与反比例函数图像的性质，熟练掌握相关概念是解题关键.

5. 已知两圆相交，它们的圆心距为 3，一个圆的半径是 2，那么另一个圆的半径长可以是（ ）

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

【答案】 B

【解析】

【详解】 两圆相交时，两半径之差<圆心距<两半径之和，故选 B.

6. 下列命题中，正确的是（ ）

- A. 对角线相等的四边形是平行四边形
B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
C. 对角线相等的平行四边形是矩形
D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形以及正方形的判定方法，对选项逐个判断即可.

【详解】 A. 对角线互相平分的四边形是平行四边形，原命题是假命题，不符合题意；

B. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形，原命题是假命题，不符合题意；

C. 对角线相等的平行四边形是矩形，是真命题，符合题意；

D. 对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形，原命题是假命题，不符合题意；

故选： C.

【点睛】 此题考查了平行四边形、矩形、菱形以及正方形的判定，掌握它们的判定方法是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. $-|-2| = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 -2 .

【解析】

【分析】 计算绝对值要根据绝对值的定义求解 $|-2|$ ，然后根据相反数的性质得出结果.

【详解】 $-|-2|$ 表示 -2 的绝对值的相反数， $|-2| = 2$ ，所以 $-|-2| = -2$.

【点睛】 相反数的定义：只有符号不同的两个数互为相反数，0 的相反数是 0；

绝对值规律总结：一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0.

8. 分解因式： $a^2 - 4a = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $a(a - 4)$

【解析】

【分析】根据提公因式法进行因式分解即可.

【详解】解: 原式 $=a^2-4a=a(a-4)$;

故答案为: $a(a-4)$.

【点睛】本题主要考查提公因式进行因式分解, 找出多项式中各项的公因式是解题的关键.

9. 方程 $\sqrt{x}=-x$ 的根是_____.

【答案】 $x=0$

【解析】

【分析】根据算术平方根的性质进行解答即可.

【详解】解: $\because \sqrt{x}=-x$, 即 x 的算术平方根等于它的相反数,

又 $\because 0$ 的算术平方根等于它的相反数,

$\therefore x=0$.

故答案为: $x=0$.

【点睛】本题考查了算术平方根的性质, 掌握算术平方根的性质是解题的关键.

10. 掷一枚材质均匀的骰子, 掷得的点数为素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据概率的求法, 找准两点: ①全部情况的总数; ②符合条件的情况数目; 二者的比值就是其发生的概率.

【详解】掷一枚质地均匀的骰子, 掷得的点数可能是1、2、3、4、5、6中的任意一个数, 共有六种可能, 其中2、3、5是素数,

所以概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题主要考查概率的求法, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

11. 如果抛物线 $y=ax^2-3$ 的顶点是它的最高点, 那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a<0$

【解析】

【分析】根据题意可得抛物线开口向下, 即可求解.

【详解】解: $\because$ 顶点是抛物线 $y=ax^2-3$ 的最高点,

∴ 抛物线开口向下,

∴ $a < 0$.

故答案为: $a < 0$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图象和性质, 熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

12. 如果关于 x 的二次三项式 $x^2 - 5x + k$ 在实数范围内不能因式分解, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k > \frac{25}{4}$

【解析】

【分析】 关于 x 的二次三项式 $x^2 - 5x + k$ 在实数范围内不能分解因式, 就是对应的二次方程 $x^2 - 5x + k = 0$ 无实数根, 根据判别式 $\Delta < 0$, 计算求解即可.

【详解】 解: 由题意知, $\Delta = (-5)^2 - 4k = 25 - 4k < 0$,

解得 $k > \frac{25}{4}$.

故答案为: $k > \frac{25}{4}$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的判别式, 解题的关键在于理解题意.

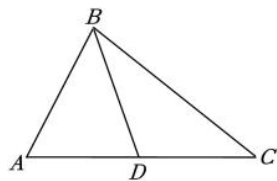
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, 那么 $\overrightarrow{BD} =$ _____. (用 $\vec{\pi}$ 、 $\vec{n}$ 表示).

【答案】 $\frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\pi})$

【解析】

【分析】 根据 $\overrightarrow{AB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, 可得 $\overrightarrow{AC} = \vec{\pi} + \vec{n}$, 从而得到 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{\pi} + \vec{n})$, 即可求解.

【详解】 解: 在 $\triangle ABC$ 中,



∵ $\overrightarrow{AB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$,

∴ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{\pi} + \vec{n}$.

∵ 点 D 是 AC 的中点,

∴ $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{\pi} + \vec{n})$.

∴ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{\pi} + \vec{n}) - \vec{\pi} = \frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\pi})$.

故答案为: $\frac{1}{2}(\vec{n}-\vec{\pi})$.

【点睛】本题主要考查了平面向量, 熟练掌握三角形法则是解题的关键.

14. 某校初三 (1) 班 40 名同学的体育成绩如表所示, 则这 40 名同学成绩的中位数是__.

成绩 (分)	25	26	27	28	29	30
人数	2	5	6	8	12	7

【答案】28 分

【解析】

【分析】根据中位数的定义求解即可.

【详解】将这组数据从小到大的顺序排列后, 处于中间位置的数是 28 分, 28 分, 它们的平均数是 28 分, 那么由中位数的定义可知, 这组数据的中位数是 28 分.

故答案为: 28 分.

【点睛】本题考查了确定一组数据的中位数的能力. 注意找中位数的时候一定要先排好顺序, 然后再根据奇数和偶数个来确定中位数, 如果数据有奇数个, 则正中间的数字即为所求. 如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

15. 《孙子算经》中记载: “凡大数之法, 万万曰亿, 万万亿曰兆.” 说明了大数之间的关系: 1 亿 = 1 万 $\times$ 1 万, 1 兆 = 1 万 $\times$ 1 万 $\times$ 1 亿, 那么 2 兆 = _____. (用科学记数法表示)

【答案】 2×10^{16}

【解析】

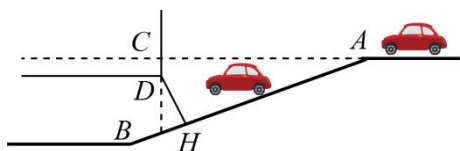
【分析】2 兆 = $2 \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 亿} = 2 \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万}$, 根据同底数幂的乘法法则计算, 结果表示成 $a \times 10^n$ 的形式即可.

【详解】解: 2 兆 = $2 \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 亿} = 2 \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} \times 1 \text{ 万} = 2 \times 10^4 \times 10^4 \times 10^4 \times 10^4 = 2 \times 10^{16}$,

故答案为: 2×10^{16} .

【点睛】本题考查科学记数法、同底数幂的乘法, 解题的关键是掌握同底数幂的乘法法则, 以及科学记数法的表示方法.

16. 如图, 某地下停车库入口的设计示意图, 已知 $AC \perp CD$, 坡道 AB 的坡比 $i = 1:2.4$, AC 的长为 7.2 米, CD 的长为 0.4 米. 按规定, 车库坡道口上方需张贴限高标志, 以便告知停车人车辆是否能安全驶入, 根据所给数据, 确定该车库入口的限高, 即点 D 到 AB 的距离 DH 的值为_____米.

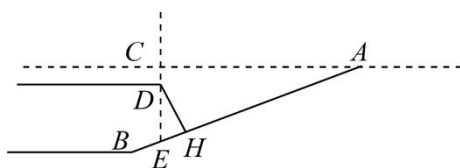


【答案】 $2.4 \times \frac{12}{5}$

【解析】

【分析】由题意延长 CD 交 AB 于 E , 并根据坡度和坡角可得 $CE = 3$, $DE = 2.6$, 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H , 根据锐角三角函数即可求出 DH 的长.

【详解】解: 如图:



延长 CD 交 AB 于 E ,

$$\because i = 1:2.4,$$

$$\therefore \tan \angle CAE = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{5}{12},$$

$$\because AC = 7.2,$$

$$\therefore CE = 3,$$

$$\because CD = 0.4,$$

$$\therefore DE = 2.6,$$

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H ,

$$\therefore \angle EDH = \angle CAB,$$

$$\because \tan \angle CAB = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \cos \angle EDH = \cos \angle CAB = \frac{12}{13},$$

$$\therefore DH = DE \times \cos \angle EDA = 2.6 \times \frac{12}{13} = 2.4 \text{ (米)}.$$

答: 点 D 到 AB 的距离 DH 的值为 2.4 米.

故答案为: 2.4.

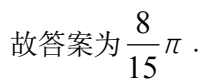
【点睛】本题考查解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 解决本题的关键是掌握坡度坡角定义.

17. 如图, 正五边形 $ABCDE$ 的边长为 2, 分别以点 C 、 D 为圆心, CD 长为半径画弧, 两弧交于点 F , 则

$\widehat{BF}$ 的长为___. (结果保留 π)



【分析】连接 CF, DF, 则 $\triangle CFD$ 是等边三角形, 求出 $\angle BCF$, 根据弧长公式计算即可.

$$\therefore \widehat{BF} \text{ 的长} = \frac{48 \times \pi \times 2}{180} = \frac{8}{15} \pi .$$


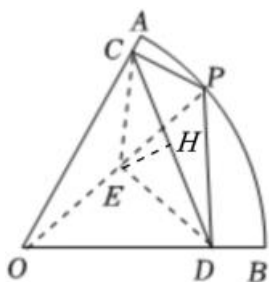
18. 如图, 已知在扇形 AOB 中, $\angle AOB = 60^\circ$, 半径 $OA = 8$, 点 P 在弧 AB 上, 过点 P 作 $PC \perp OA$ 于点 C , $PD \perp OB$ 于点 D , 那么线段 CD 的长为_____.



【分析】作辅助线：接 PO ，取 PO 的中点 E ，连接 CE 、 DE ，通过 COPD 共圆求出等腰三角形 CDE 的钝

角为 120° ，从而求出 CD 的长度.

【详解】解：如图，连接 PO ，取 PO 的中点 E ，连接 CE, DE ，



在 $Rt\triangle PCO$ 和 $Rt\triangle PDO$ 中，点 E 是斜边 PO 的中点，

$$\therefore CE = DE = PE = OE = \frac{1}{2}PO = 4,$$

根据圆的定义可知，点 P, C, O, D 四点均在同一个圆，即 $\odot E$ 上，

$$\text{又} \because \angle COD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle DCE = 30^\circ,$$

过点 H 作 $EH \perp CD$ ，垂足为点 H ，

$$\text{由垂径定理得，} CH = DH = \frac{1}{2}CD,$$

$$\text{在 } Rt\triangle DEH \text{ 中，} EH = \frac{1}{2}DE = 2, DH = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 2DH = 4\sqrt{3}.$$

故答案为： $4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查辅助线的添加、直角三角形斜边上的中线、对角互补的四边形共圆；掌握这些是本题关键.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 先化简再求值： $\left(\frac{a+1}{a^2-4} - \frac{1}{a+2}\right) \div \frac{3}{a-2}$ ，其中 $a = \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{1}{a+2}, 2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先根据分式的乘除法法则进行化简，最后把 a 的值代入计算即可.

【详解】解：原式 = $\frac{a+1-(a-2)}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-2}{3}$

$$= \frac{3}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a-2}{3}$$

$$= \frac{1}{a+2},$$

当 $a = \sqrt{3}$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了分式的化简求值, 解题的关键是通分、约分, 以及分子、分母的因式分解.

20. 解不等式组 $\begin{cases} 1 - \frac{x-2}{3} \geq \frac{1}{6}x \\ \frac{1-x}{2} < x \end{cases}$, 并求出它的正整数解.

【答案】 $\frac{1}{3} < x \leq \frac{10}{3}$, 不等式组的正整数解为 1, 2, 3

【解析】

【分析】 分别求出不等式的解集, 从而得到整个不等式组的解集, 进而求出正整数解.

【详解】 解: 解不等式①得: $x \leq \frac{10}{3}$,

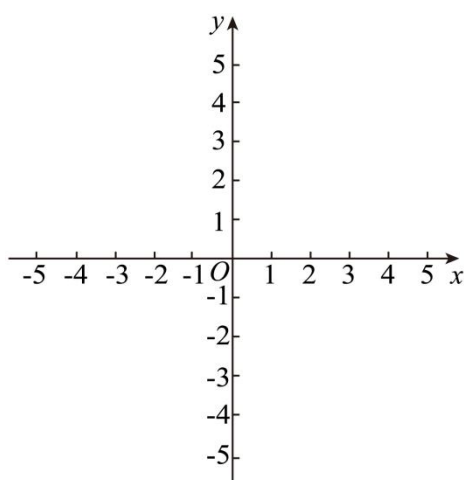
解不等式②得: $x > \frac{1}{3}$,

所以不等式组的解集为 $\frac{1}{3} < x \leq 3$,

则不等式组的正整数解为 1, 2, 3.

【点睛】 本题考查解不等式组的解集及正整数解. 正确求出不等式组的解集是解题的关键.

21. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象相交于点 $A(1, m)$, $B(n, 2)$.



(1) 求一次函数的解析式;

(2) 过点 A 作直线 AC , 交 y 轴于点 D , 交第三象限内的反比例函数图象于点 C , 连接 BC , 如果 $CD = 2AD$, 求线段 BC 的长.

【答案】(1) $y = -2x + 6$

(2) $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 先求出点 A 、 B 的坐标，再用待定系数法求出一函数解析式；

(2) 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于 E ，过点 C 作 $CF \perp y$ 轴于 F ，得到 $\triangle AED \sim \triangle CFD$ ，从而得到 $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{CD} = \frac{ED}{FD}$ ，由 $CD = 2AD$ 得到 $CF = 2AE = 2$ ，进而得到点 C 的坐标，利用两点间的距离公式可得线段 BC 的长。

【小问 1 详解】

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象过点 $A(1, m)$ ， $B(n, 2)$

$$\therefore m = 2n = 4,$$

解得 $m = 4$ ， $n = 2$

$\therefore A(1, 4)$ ， $B(2, 2)$ ，

$\because$ 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象过 A 点和 B 点，

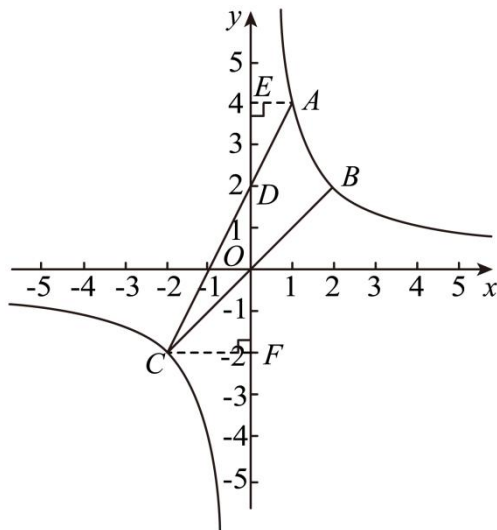
$$\therefore \begin{cases} k + b = 4 \\ 2k + b = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -2x + 6$ ；

【小问 2 详解】

如图，过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于 E ，过点 C 作 $CF \perp y$ 轴于 F ，



$$\therefore AE \parallel CF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{AE}{CF} = \frac{AD}{CD} = \frac{ED}{FD},$$

$$\therefore CD = 2AD,$$

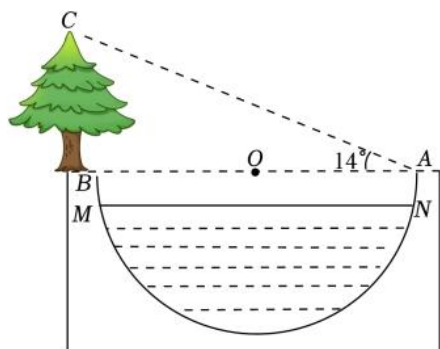
$$\therefore CF = 2AE = 2,$$

$$\therefore \text{点 } C(-2, -2),$$

$$\therefore BC = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查待定系数法求函数解析式，通过相似求边长，两点间的距离公式，掌握数形结合的思想是解题的关键.

22. 如图，某水渠的横断面是以 AB 为直径的半圆 O ，其中水面截线 $MN \parallel AB$ ，小明在 A 处测得点 B 处小树的顶端 C 的仰角为 14° ，已知小树的高为 1.75 米.



(1) 求直径 AB 的长;

(2) 如果要使最大水深为 2.8 米，那么此时水面的宽度 MN 约为多少米. (结果精确到 0.1 米，参考数据:

$$\tan 76^\circ = 4, \sqrt{6} = 2.4)$$

【答案】 (1) 7 米 (2) 6.7 米

【解析】

【分析】 (1) 由题意知 $\angle ACB = 90^\circ - \angle CAB = 76^\circ$ ，根据 $AB = BC \cdot \tan \angle ACB$ ，求 AB 的值即可;

(2) 如图，过点 O 作 $OD \perp MN$ 于 D ，并延长 OD 交 $\odot O$ 于 H ，连接 OM ，则 $MD = DN$ ， $DH = 2.8$ 米， $OM = OH = 3.5$ 米， $OD = OH - DH = 0.7$ 米，在 $\text{Rt}\triangle ODM$ 中，由勾股定理求 MD 的值，根据 $MN = 2MD$ ，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意知， $\angle CAB = 14^\circ$ ， $\angle CBA = 90^\circ$ ，

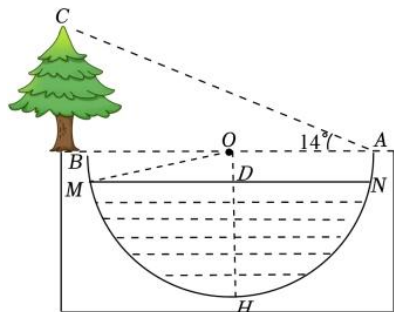
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - \angle CAB = 76^\circ,$$

$$\therefore AB = BC \cdot \tan \angle ACB = 1.75 \times 4 = 7,$$

答：直径 AB 的长为 7 米；

【小问 2 详解】

解：如图，过点 O 作 $OD \perp MN$ 于 D ，并延长 OD 交 $\odot O$ 于 H ，连接 OM ，



$$\therefore MD = DN, \quad DH = 2.8 \text{ 米},$$

$$\because \odot O \text{ 的直径为 } 7 \text{ 米},$$

$$\therefore OM = OH = 3.5 \text{ 米}$$

$$\therefore OD = OH - DH = 0.7 \text{ 米},$$

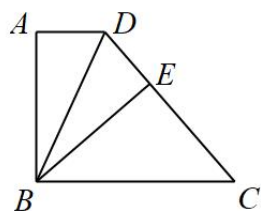
$$\text{在 Rt}\triangle ODM \text{ 中, 由勾股定理得 } MD = \sqrt{OM^2 - OD^2} = 1.4\sqrt{6} = 3.36,$$

$$\therefore MN = 2MD = 2 \times 3.36 = 6.72 \approx 6.7,$$

答：水面的宽度 MN 约为 6.7 米.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，垂径定理，勾股定理等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

23. 已知：在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折，点 A 恰好落在腰 CD 上的点 E 处．



(1) 如图，当点 E 是腰 CD 的中点时，求证： $\triangle BCD$ 是等边三角形；

(2) 延长 BE 交线段 AD 的延长线于点 F ，联结 CF ，如果 $CE^2 = DE \cdot DC$ ，求证：四边形 $ABCF$ 是矩形．

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由垂直平分线的性质得到 $DB = BC$ ，通过折叠、等边对等角、平行线的性质得到

$\angle BDE = \angle C = \angle ADB = 60^\circ$ ，从而证明 $\triangle BCD$ 是等边三角形；

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H ，得到四边形 $ABHD$ 是矩形，从而 $AD = BH$ ， $AB = DH$ ，再由折叠得到角之间的关系从而证明 $\triangle BCE \cong \triangle DCH$ ，得到 $DC = BC$ ， $CE = CH$ ；由 $AD \parallel BC$ 得到 $\triangle FDE \sim \triangle BCE$ ，进而 $\frac{CE}{DE} = \frac{BC}{DF}$ ，结合已知条件 $CE^2 = DE \cdot DC$ 得到 $DF = CE = CH$ ，进一步得到 $AF = BC$ ，所以四边形 $ABCF$ 是平行四边形，又 $\angle A = 90^\circ$ ，所以证明得到四边形 $ABCF$ 是矩形。

【小问 1 详解】

由折叠得： $\angle ADB = \angle BDE$ ， $\angle A = \angle DEB = 90^\circ$

$\therefore$ 点 E 是腰 CD 的中点

$\therefore BE$ 是 DC 的垂直平分线

$\therefore DB = BC$

$\therefore \angle BDE = \angle C$

$\therefore \angle BDE = \angle C = \angle ADB$

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle ADC + \angle C = 180^\circ$

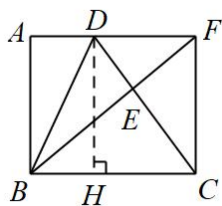
$\therefore \angle BDE + \angle C + \angle ADB = 180^\circ$

$\therefore \angle BDE = \angle C = \angle ADB = 60^\circ$

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形

【小问 2 详解】

过点 D 作 $DH \perp BC$ ，垂足为 H ，



$\therefore \angle DHB = \angle DHC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，

$\angle ABC = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形，

$\therefore AD = BH$ ， $AB = DH$ ，

由折叠得： $\angle A = \angle DEB = 90^\circ$ ， $AB = BE$ ，

$$\angle BEC = 180^\circ - \angle DEB = 90^\circ, \quad DH = BE,$$

$$\because \angle BEC = \angle DHC = 90^\circ, \quad \angle BCE = \angle DCH,$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCH (\text{AAS}),$$

$$\therefore DC = BC, \quad CE = CH,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle EBC, \quad \angle FDE = \angle ECB,$$

$$\therefore \triangle FDE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{BC}{DF},$$

$$\because CE^2 = DE \cdot DC,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{DC}{CE},$$

$$\therefore \frac{BC}{DF} = \frac{DC}{CE},$$

$$\therefore DF = CE,$$

$$\therefore CH = DF,$$

$$\therefore AD + DF = BH + CH,$$

$$\therefore AF = BC,$$

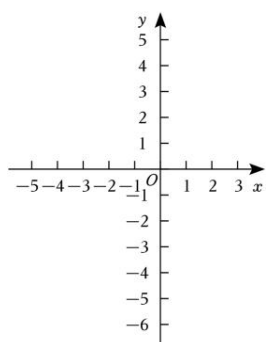
$$\therefore \text{四边形 } ABCF \text{ 是平行四边形},$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCF \text{ 是矩形}.$$

【点睛】 本题考查垂直平分线的性质，等边三角形的判定，矩形的判定．相似三角形的判定与性质，图中角和线段的转化是解题的关键．

24. 已知抛物线 $C_1: y = ax^2 + b$ 与 x 轴相交于点 $A(-2,0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0,2)$ ．



(1) 求抛物线 C_1 的表达式；

(2) 把抛物线 C_1 沿射线 CA 方向平移得到抛物线 C_2 ，此时点 A 、 C 分别平移到点 D 、 E 处，且都在直线 AC 上，设点 F 在抛物线 C_1 上，如果 $\triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形，求点 F 的坐标；

(3) 在第 (2) 小题的条件下，设点 M 为线段 BC 上的一点， $EN \perp EM$ ，交直线 BF 于点 N ，求 $\tan \angle ENM$ 的值.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

(2) $F(-4, -6)$

(3) 2

【解析】

【分析】 (1) 用待定系数法求抛物线的解析式即可；

(2) 理由待定系数法求出直线 AC 的解析式为 $y = x + 2$ ，根据 $\triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形，得出 $\angle DEF = 45^\circ$ ，求出 $EF = \sqrt{2}DE = 4$ ，设 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2\right)$ ，则 $E(m, m+2)$ ，得出 $(m+2) - \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2\right) = 4$ ，求出 m 的值即可；

(3) 根据抛物线解析式求出点 $B(2, 0)$ ，作 $EG \perp AC$ ，交 BF 于 G ，证明 $\triangle ENG \sim \triangle EMC$ ，得出 $\frac{EM}{EN} = \frac{EC}{EG}$ ，求出 $EC = \sqrt{4^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$ ，得出 $\frac{EM}{EN} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2$ ，即可得出答案.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $C_1: y = ax^2 + b$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $C(0, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases},$

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ；

【小问 2 详解】

解：如图 1，

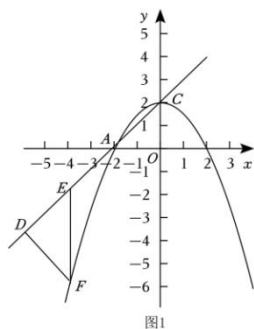


图1

$$\therefore A(-2,0)、C(0,2),$$

$$\therefore AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + c$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + c = 0 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 2$,

$\therefore \triangle DEF$ 是以 EF 为底的等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DEF = 45^\circ,$$

由平移得 $DE = AC = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore EF = \sqrt{2}DE = 4,$$

设 $F\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2\right)$, 则 $E(m, m + 2)$,

$$\therefore (m + 2) - \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2\right) = 4,$$

解得 $m = 2$ (舍) 或 $m = -4$,

$$\therefore F(-4, -6);$$

【小问 3 详解】

解: 如图 2,

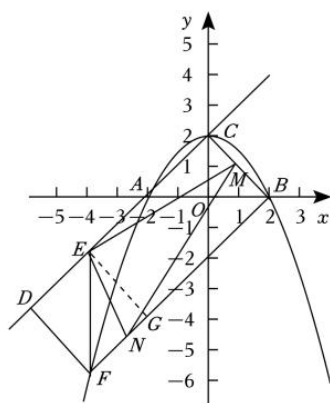


图2

$\therefore$ 抛物线 C_1 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, 令 $y = 0$, 则 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 2$,

解得 $x = 2$ 或 -2 ,

$\therefore B(2, 0)$,

$\therefore$ 点 $A(-2, 0)$ 和 $C(0, 2)$,

$\therefore \angle BCA = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore BC \perp AC$,

$\therefore DF \perp AC$,

$\therefore DF \parallel BC$,

$\therefore DF = DE = BC = AC$,

$\therefore$ 四边形 $DFBC$ 是矩形,

作 $EG \perp AC$, 交 BF 于 G ,

$\therefore EG = BC = AC = 2\sqrt{2}$,

$\therefore EN \perp EM$,

$\therefore \angle MEN = 90^\circ$,

$\therefore \angle CEG = 90^\circ$,

$\therefore \angle CEM = \angle NEG$,

$\therefore \triangle ENG \sim \triangle EMC$,

$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{EC}{EG}$,

$\therefore F(-4, -6)$, $EF = 4$,

$\therefore E(-4, -2)$,

$$\therefore C(0,2),$$

$$\therefore EC = \sqrt{4^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{EM}{EN} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ENM = \frac{EM}{EN} = 2.$$

【点睛】 本题主要考查了二次函数的综合应用，求二次函数解析式，求一次函数解析式，等腰直角三角形的性质，三角形相似的判定和性质，求角的正切值，勾股定理，矩形的判定和性质，解题的关键是作出辅助线，数形结合.

25. 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ，垂足为点 H ，点 E 在直径 AB 上 (与 A 、 B 不重合)， $EH = AH$ ，连接 CE 并延长与 $\odot O$ 交于点 F 。

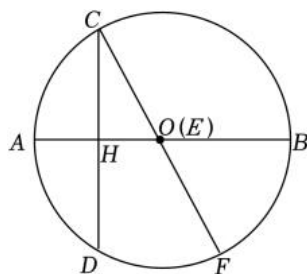
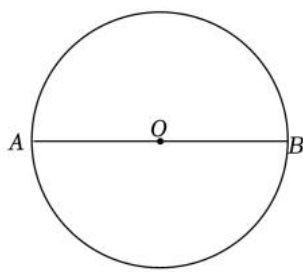


图1



备用图

- (1) 如图 1，当点 E 与点 O 重合时，求 $\angle AOC$ 的度数；
- (2) 连接 AF 交弦 CD 于点 P ，如果 $\frac{CE}{EF} = \frac{4}{3}$ ，求 $\frac{DP}{CP}$ 的值；
- (3) 当四边形 $ACOF$ 是梯形时，且 $AB = 6$ ，求 AE 的长。

【答案】 (1) 60°

(2) $\frac{4}{7}$

(3) $6 - 3\sqrt{2}$ 或 $\frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 如图 1，连接 AC 、 AD 、 OD ，先证四边形 $ACOD$ 是菱形，再证 $\triangle OAC$ 是等边三角形，即可得解；

(2) 先证 $\triangle ECH \cong \triangle ADH$ (SAS)，得 $CE = AD$ ， $\angle C = \angle D$ ，进而证明 $\triangle APD \sim \triangle FPC$ ， $CE = 4a$ ，则 $AD = 4a$ ， $EF = 3a$ ，利用相似三角形的性质即可得解；

(3) 分 $OC \parallel AF$ 与 $AC \parallel OF$ 两种情况讨论求解即可。

【小问 1 详解】

解: 如图1, 连接 AC 、 AD 、 OD ,

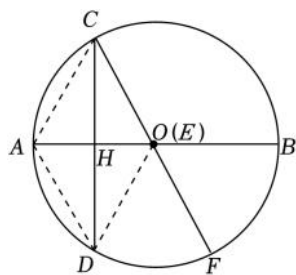


图1

$\because CD \perp AB$, 垂足为点 H , $OC = OD$,

$\therefore CH = DH$,

$\because EH = AH$,

$\therefore$ 四边形 $ACOD$ 是平行四边形,

$\because CD \perp AO$,

$\therefore$ 四边形 $ACOD$ 是菱形,

$\therefore AC = OC$,

$\because OA = OC$,

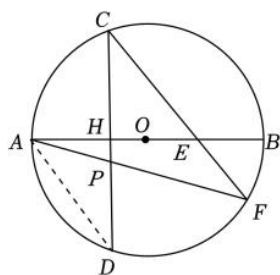
$\therefore OA = OC = AC$,

$\therefore \triangle OAC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AOC = 60^\circ$;

【小问 2 详解】

解: 如图,



$\because EH = AH$, $CH = DH$, $\angle AHD = \angle EHC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ECH \cong \triangle ADH$ (SAS),

$\therefore CE = AD$, $\angle C = \angle D$,

$\therefore CE \parallel AD$,

$\therefore \angle PAD = \angle F$,

$\therefore \triangle APD \sim \triangle FPC$,

$$\therefore \frac{DP}{CP} = \frac{AD}{CF},$$

$$\therefore \frac{CE}{EF} = \frac{4}{3},$$

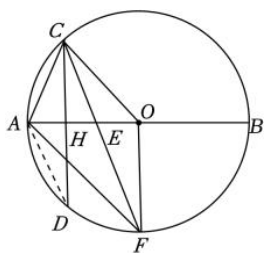
设 $CE = 4a$ ，则 $AD = 4a$ ， $EF = 3a$ ，

$$\therefore CF = CE + EF = 7a,$$

$$\therefore \frac{DP}{CP} = \frac{AD}{CF} = \frac{4a}{7a} = \frac{4}{7};$$

【小问3详解】

解：当 $OC \parallel AF$ ，如图，连接 AD ，



由 (2) 知， $\triangle ECH \cong \triangle ADH$ ，

$$\therefore \angle D = \angle DCE,$$

在梯形 $ACOF$ 中， $OC \parallel AF$ ，

$$\therefore \angle OCF = \angle AFC,$$

$$\because OC = OF,$$

$$\therefore \angle OCF = \angle OFC,$$

$$\therefore \angle OCF = \angle AFC = \angle OFC,$$

$$\because \angle D = \angle AFC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle OFC,$$

$$\therefore CD \parallel OF,$$

$$\therefore \angle FOE = \angle CHE,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle CHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FOE = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中， $OA = OF = \frac{1}{2} AB = 3$ ，

$$\therefore AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle OCF = \angle AFC, \quad \angle CEO = \angle FEA,$$

$$\therefore \triangle CEO \sim \triangle FEA,$$

$$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{OC}{AF},$$

$$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

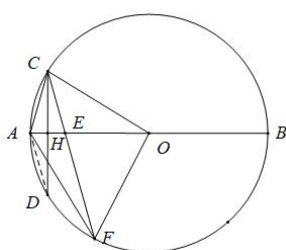
设 $OE = \sqrt{2}x$, 则 $AE = 2x$,

$$\therefore OA = \sqrt{2}x + 2x = 3,$$

$$\therefore x = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = 2x = 6 - 3\sqrt{2};$$

当 $AC \parallel OF$ 时, 如下图, 连接 AD ,



$$\because CD \perp AB, EH = EA,$$

$$\therefore AC = CE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CEA,$$

$$\because OC = OA,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle CEA = \angle OAC = \angle CEA = \angle OCA,$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle OAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{OA} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = OA \cdot AE = 3AE,$$

$$\because AC \parallel OF,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle FOE, \angle ACE = \angle OFE,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle OFE,$$

$$\therefore \frac{AC}{OF} = \frac{AE}{OE} \text{ 即 } \frac{AC}{3} = \frac{AE}{3-AE},$$

$$\therefore AC = \frac{3AE}{3-AE},$$

$$\therefore AC^2 = 3AE,$$

$$\therefore \left(\frac{3AE}{3-AE} \right)^2 = 3AE,$$

$$\text{解得 } AE = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去) 或 } AE = \frac{9-3\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{综上 } AE \text{ 的长为 } 6-3\sqrt{2} \text{ 或 } \frac{9-3\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了菱形的判定及性质、全等三角形的判定及性质、等边三角形的判定及性质、平行线的性质、相似三角形的判定及性质、线段垂直平分线的性质以及圆周角定理，熟练掌握菱形的判定及性质、全等三角形的判定及性质、等边三角形的判定及性质是解题的关键.

