

九年级第二学期数学自适应练习

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 中国是最早认识正数和负数的国家, 魏晋时期的数学家刘徽就提出了负数的概念, 如果将零下 2°C 记作 -2°C , 那么 3°C 表示 ()

A. 零上 3°C B. 零下 3°C C. 零上 5°C D. 零下 5°C

【答案】A

【解析】

【分析】根据正负数的意义即可求解.

【详解】解: 如果将零下 2°C 记作 -2°C , 那么 3°C 表示零上 3°C

故选: A.

【点睛】本题考查了正负数的意义, 熟练掌握正负数的意义是解题的关键.

2. 下列算式中, 计算结果为 a^6 的是 ()

A. $a^3 + a^3$ B. $a^2 \cdot a^3$ C. $(a^2)^3$ D. $a^{12} \div a^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法, 同底数幂的除法, 幂的乘方, 合并同类项逐项计算即可求解.

【详解】解: A. $a^3 + a^3 = 2a^3$, 故该选项不符合题意;

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故该选项不符合题意;

C. $(a^2)^3 = a^6$, 故该选项符合题意;

D. $a^{12} \div a^2 = a^{10}$, 故该选项不符合题意;

故选：C.

【点睛】 本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项是解题的关键.

3. 已知函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像经过第一、三象限, 下列说法中正确的是 ()

- A. $k < 0$
- B. 图像一定经过点 $(1, k)$
- C. 图像是双曲线
- D. y 的值随 x 的值增大而减小

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据正比例函数的图象与性质, 逐项分析判断即可求解.

【详解】 解: 函数 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像经过第一、三象限,

- A. $k > 0$, 故该选项不正确, 不符合题意;
- B. 当 $x = 1$ 时, $y = k$, 则图像一定经过点 $(1, k)$, 故该选项正确, 符合题意;
- C. 图像是直线, 故该选项不正确, 不符合题意;
- D. $k > 0$, y 的值随 x 的值增大而增大, $k < 0$ 时, y 的值随 x 的值增大而减小故该选项不正确, 不符合题意;

故选：B.

【点睛】 本题考查了正比例函数的图象与性质, 熟练掌握正比例函数的图象与性质是解题的关键.

4. 某城市 30 天的空气质量状况统计如下:

空气质量指数 (W)	40	60	90	110	120	140
天数	2	5	10	a	b	1

根据表中的信息, 下列有关该城市这 30 天的空气质量指数的统计量中, 可以确定的量是 ()

- A. 平均数
- B. 众数
- C. 中位数
- D. 方差

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平均数, 众数, 中位数, 方差的定义即可求解.

【详解】 解: $\because$ 共有 30 个数据, $2 + 5 + 10 > 16$, 可以确定中位数第 15 个和第 16 个数, 为 90, 而表格中 a, b 未知, 不能确定平均数、众数、方差

故选：C.

【点睛】 本题考查了平均数, 众数, 中位数, 方差的定义, 熟练掌握平均数, 众数, 中位数, 方差的定义

是解题的关键. 平均数: 是指一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 中位数: 把一组数据按从小到大的顺序排列, 在中间的一个数字(或者两个数字的平均值)叫做这组数据的中位数. 众数: 在一组数据中出现次数最多的数. 方差: 一般地, 各数据与平均数的差的平方的平均数叫做这组数据的方差.

5. 如果用两根长度相同的细竹签作对角线, 制作一个四边形的风筝, 那么做成的风筝形状不可能是 ()

- A. 矩形 B. 正方形 C. 等腰梯形 D. 直角梯形

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形、正方形, 等腰梯形的对角线相等, 即可求解.

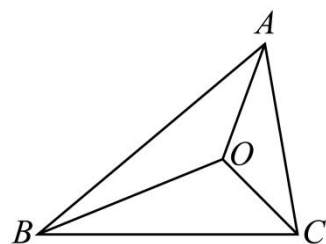
【详解】解: $\because$ 矩形、正方形, 等腰梯形的对角线相等

$\therefore$ 如果用两根长度相同的细竹签作对角线, 制作一个四边形的风筝, 那么做成的风筝形状不可能是直角梯形,

故选: D.

【点睛】本题考查了矩形、正方形, 等腰梯形的性质, 熟练掌握矩形、正方形, 等腰梯形的性质是解题的关键.

6. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, BO 、 CO 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$, $AO = 2$, 下面结论中不一定正确的是 ()



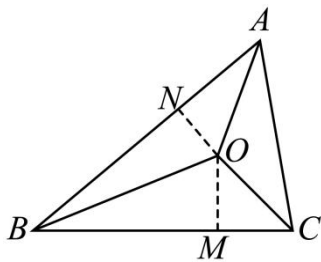
- A. $\angle BOC = 120^\circ$ B. $\angle BAO = 30^\circ$
C. $OB = 3$ D. 点 O 到直线 BC 的距离是 1

【答案】C

【解析】

【分析】由角平分线的定义求出 $\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 60^\circ$, 由三角形内角和定理求出 $\angle BOC$ 的度数, 由三角形内心的性质求出 $\angle BAO$ 的度数是 30° , OB 的长在变化不一定等于 3, 由直角三角形的性质得到 $ON = 1$, 由角平分线的性质得到 $OM = ON = 1$, 得到 O 到 BC 的距离是 1, 据此即可求解.

【详解】解: 作 $OM \perp BC$ 于 M , $ON \perp AB$ 于 N ,



$\because BO$ 、 CO 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle BAC) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 120^\circ,$$

故 A 正确;

$\because BO$ 、 CO 分别平分 $\angle ABC$,

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$,

$\because \angle BAC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

故 B 正确;

OB 的长在变化不一定等于 3,

故 C 不一定正确;

$\because \angle ANO = 90^\circ$, $\angle NAO = 30^\circ$,

$$\therefore ON = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore OM = ON = 1,$$

$\therefore O$ 到 BC 的距离是 1,

故 D 正确.

故选: C.

【点睛】 本题考查角平分线的性质, 解题的关键是掌握角平分线的性质.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 因式分解: $x^2 - 4 =$ _____.

【答案】 $(x+2)(x-2)$

【解析】

【详解】解： $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$ ；

故答案为 $(x + 2)(x - 2)$

8. 已知 $f(x) = 2x - 3$ ，那么 $f(3) =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】将 $x = 3$ 代入即可求解.

【详解】解： $\because f(x) = 2x - 3$ ，

$$\therefore f(3) = 2 \times 3 - 3 = 3,$$

故答案为： 3 .

【点睛】本题考查了求函数值，将自变量的值代入是解题的关键.

9. 方程 $\sqrt{x + 2} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先把方程两边平方，使原方程化为整式方程 $x + 2 = x^2$ ，解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，结合二次根式的性质，去掉增根，即可得到答案.

【详解】方程两边平方得： $x + 2 = x^2$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

$$\because \sqrt{x + 2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{x + 2} = x \geq 0$$

$\therefore x_2 = -1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$

故答案为： $x = 2$.

【点睛】本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，那么 $m =$ _____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，即可得出关于 k 的一元一次方程，解之即可得出 k 的值.

【详解】解：∵ 关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times m = 0,$$

$$\text{解得： } m = \frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为： } \frac{9}{4}.$$

【点睛】本题考查了根的判别式，牢记“当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根”是解题的关键.

11. 近视眼镜的度数 y （度）与镜片焦距 x （米）成反比例，已知 400 度的近视眼镜镜片的焦距为 0.25 米，那么眼镜度数 y 关于镜片焦距 x 的函数解析式是_____.

$$\text{【答案】 } y = \frac{100}{x}$$

【解析】

【分析】设 $y = \frac{k}{x}$ ，根据已知 400 度的近视眼镜镜片的焦距是 0.25 米，求出 k 的值即可.

【详解】解：设 $y = \frac{k}{x}$ ，

∵ 400 度的近视眼镜镜片的焦距是 0.25 米，

$$\therefore 400 = \frac{k}{0.25}, \quad k = 100,$$

$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数表达式是： } y = \frac{100}{x},$$

$$\text{故答案为： } y = \frac{100}{x}.$$

【点睛】本题考查了反比例函数的实际应用，根据题意特意求出 k 的值是解题的关键.

12. 一个三角形的两边长分别是 2 和 3，若它的第三边长为奇数，则这个三角形的周长为_____.

$$\text{【答案】 } 8$$

【解析】

【分析】首先设第三边长为 x ，根据三角形的三边关系可得 $3-2 < x < 3+2$ ，然后再确定 x 的值，进而可得周长.

【详解】解：设第三边长为 x ，

∵ 两边长分别是 2 和 3，

$$\therefore 3-2 < x < 3+2,$$

$$\text{即: } 1 < x < 5,$$

$\therefore$ 第三边长为奇数,

$$\therefore x=3,$$

$$\therefore \text{这个三角形的周长为 } 2+3+3=8,$$

故答案为: 8.

【点睛】此题主要考查了三角形的三边关系, 关键是掌握三角形两边之和大于第三边, 三角形的两边差小于第三边.

13. 不透明的布袋中装有除颜色外完全相同的10个球, 其中红色球有 m 个, 如果从布袋中任意摸出一个球恰好为红色球的概率是 $\frac{1}{5}$, 那么 $m =$ _____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据概率公式直接计算即可.

【详解】根据题意可得 $\frac{m}{10} = \frac{1}{5}$

$$\therefore m = 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了概率公式, 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

14. 学校为了解本校初三年级学生上学的交通方式, 随机抽取了本校20名初三学生进行调查, 其中有2名学生是乘私家车上学, 如图是收集数据后绘制的扇形图. 如果该校初三年级有200名学生, 那么骑自行车上学的学生大约有_____人.



【答案】30

【解析】

【分析】根据扇形统计图求得步行与公交车方式上学的学生人数, 进而即可求解.

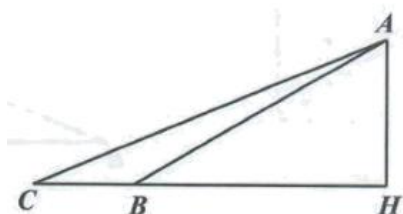
【详解】解: $\therefore$ 步行的人数为 $20 \times 50\% = 10$, $20 \times 25\% = 5$, 有2名学生是乘私家车上学,

$$\therefore \text{骑自行车上学的学生大约有 } 200 \times \frac{20-10-5-2}{20} = 30,$$

故答案为：30.

【点睛】本题考查了扇形统计图，样本估计总体，熟练掌握扇形统计图是解题的关键.

15. 如图，斜坡 AB 的坡度 $i_1 = 1:\sqrt{3}$ ，现需要在不改变坡高 AH 的情况下将坡度变缓，调整后的斜坡 AC 的坡度 $i_2 = 1:2.4$ ，已知斜坡 $AB = 10$ 米，那么斜坡 $AC =$ _____ 米.



【答案】13

【解析】

【分析】根据斜坡 AB 的坡度 $i_1 = 1:\sqrt{3}$ 与 AB 的值先求出 AH ，再根据斜坡 AC 的坡度 $i_2 = 1:2.4$ ，求得 AC ，即可求解.

【详解】解： $\because i_1 = 1:\sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle ABH = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ABH = 30^\circ,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\because i_2 = 1:2.4,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AH}{CH} = \frac{1}{2.4},$$

$$\therefore AH = 5,$$

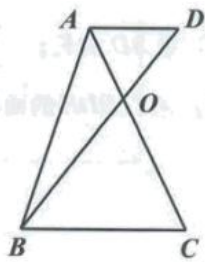
$$\therefore CH = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

故答案为：13.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用，坡度问题，熟知锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

16. 如图， $AD \parallel BC$ ， AC 、 BD 交于点 O ， $BO = 2OD$ ，设 $AD = \vec{a}$ ， $AB = \vec{b}$ ，那么向量 OC 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】根据 $AD \parallel BC$ ，证明 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ ，根据相似三角形的性质得出 $OC = \frac{2}{3}AC$ ，根据三角形法则得出 $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + 2\vec{a}$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC}$$

$\because BO = 2OD$ ，

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore OC = \frac{2}{3}AC$$

$\because AD = \vec{a}$ ， $AB = \vec{b}$ ，

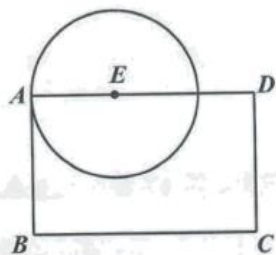
$$\therefore BC = 2\vec{a}$$
， $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + 2\vec{a}$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\vec{b} + 2\vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{a}$$
，

故答案为： $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{a}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定，平面向量的线性运算，熟练掌握以上知识是解题的关键.

17. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $AD = 8$ ， 点 E 在边 AD 上， $AE = 3$ ， 以点 E 为圆心、 AE 为半径作 $\odot E$ (如图)， 点 F 在边 BC 上， 以点 F 为圆心、 CF 为半径作 $\odot F$. 如果 $\odot F$ 与 $\odot E$ 外切， 那么 CF 的长是_____.

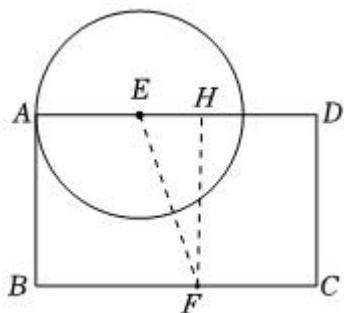


【答案】 $\frac{41}{16}$

【解析】

【分析】连接 EF ，作 $FH \perp AD$ 于 H ，设 $\odot F$ 的半径是 r ，得到 $EF = r + 3$ ， $FH = DC = 5$ ， $EH = 5 - r$ ，由勾股定理得到 $(r + 3)^2 = (5 - r)^2 + 5^2$ ，求出 r ，即可解决问题.

【详解】解：连接 EF ，作 $FH \perp AD$ 于 H ， $\because AB = 5$ ， $AD = 8$ ，点 E 在边 AD 上， $AE = 3$ ，



设 $\odot F$ 的半径是 r ，

$\because$ 两圆外切，

$$\therefore EF = r + 3,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DHF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DHFC$ 是矩形，

$$\therefore FH = DC = 5, \quad DH = r,$$

$$\therefore EH = 5 - r,$$

$$\therefore EF^2 = EH^2 + FH^2,$$

$$\therefore (r + 3)^2 = (5 - r)^2 + 5^2,$$

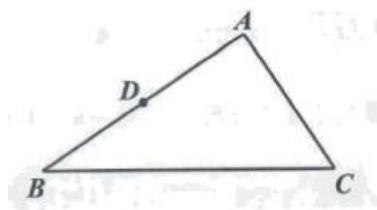
$$\therefore x = \frac{41}{16},$$

$$\therefore FC \text{ 的长是 } \frac{41}{16},$$

$$\text{故答案为: } \frac{41}{16}.$$

【点睛】本题考查圆与圆的位置关系，矩形的性质，勾股定理，关键是通过作辅助线，构造直角三角形，应用勾股定理列出关于 $\odot F$ 半径 r 的方程.

18. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $AC = 4$ ， D 为 AB 中点 (如图)， E 为射线 CA 上一点，将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折得到 $\triangle A'DE$ ，点 A 的对应点为 A' ，如果 $\angle EA'C = 90^\circ$ ，那么 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 6

【解析】

【分析】当点 E 在线段 CA 上时，根据已知条件得出 D, A', C 三点共线，在 $\text{Rt}\triangle A'EC$ 中，勾股定理求得 AE 的长，当 E 在 CA 的延长线上时，证明 $\triangle ECA' \sim \triangle E_1CA'_1$ ，利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】解：如图所示，当点 E 在线段 CA 上时，

$\therefore$ 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折得到 $\triangle A'DE$ ， $\angle EA'C = 90^\circ$ ，

$\therefore AD = A'D$ ， $\angle DA'E = \angle EA'C = 90^\circ$ ，

$\therefore D, A', C$ 三点共线，

设 $AE = x$ ，则 $CE = AC - AE = 4 - x$ ， $EA' = EA = x$ ，

$\therefore AB = 6$ ， D 为 AB 中点，

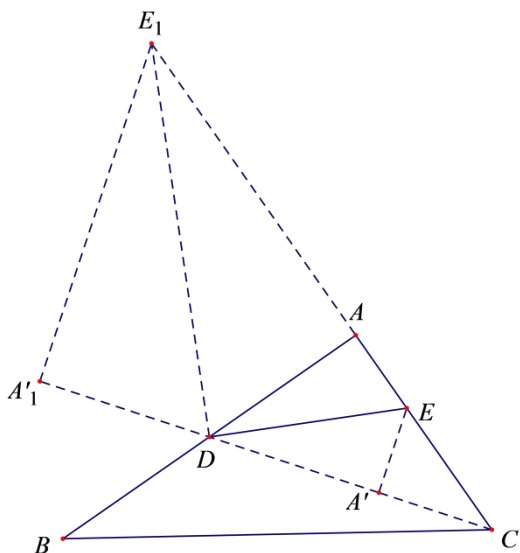
$\therefore AC = 3$ ，

$\therefore CA' = CD - DA' = 5 - DA = 5 - 3 = 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle A'EC$ 中， $A'E^2 + A'C^2 = EC^2$ ，

$\therefore x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$ ，

解得： $x = \frac{3}{2}$ ；



当 E 在 CA 的延长线上时, 如图所示,

$$\because \angle E_1A'D = \angle EA'C = 90^\circ, \quad \angle ECA' = \angle E_1CA'_1$$

$$\therefore \triangle ECA' \sim \triangle E_1CA'_1$$

$$\therefore \frac{EA'}{E_1A'_1} = \frac{CE}{CE_1},$$

$$\text{又} \because CE = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \quad EA = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{2}}{A'_1E_1} = \frac{\frac{5}{2}}{4 + A'_1E_1},$$

$$\text{解得: } A'_1E_1 = 6,$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2} \text{ 或 } 6.$$

【点睛】 本题考查了折叠的性质, 勾股定理, 相似三角形的性质与判定, 分论讨论是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + (\pi - 2023)^0 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 18^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{【答案】 } 16 - 2\sqrt{2}$$

【解析】

【分析】 根据负整数指数幂, 零指数幂, 分母有理化, 分数指数幂进行计算即可求解.

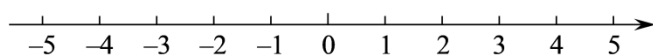
【详解】解： $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + (\pi - 2023)^0 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} - 18^{\frac{1}{2}}$

$$= 16 + 1 + \sqrt{2} - 1 - 3\sqrt{2}$$

$$= 16 - 2\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，熟练掌握负整数指数幂，零指数幂，分母有理化，分数指数幂是解题的关键.

20. 解不等式组： $\begin{cases} 3x-2 \leq \frac{x+6}{2}, \\ 2(x+1) < 5x+11, \end{cases}$ 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-3 < x \leq 2$ ，数轴见解析

【解析】

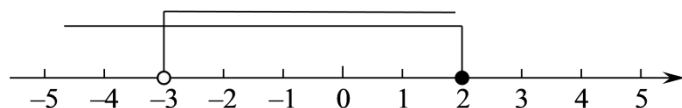
【分析】 分别求出每一个不等式的解集，然后把解集表示在数轴上，根据数轴即可确定不等式的解集.

【详解】解： $\begin{cases} 3x-2 \leq \frac{x+6}{2} \text{ ①} \\ 2(x+1) < 5x+11 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得： $x \leq 2$ ，

解不等式②得： $x > -3$ ，

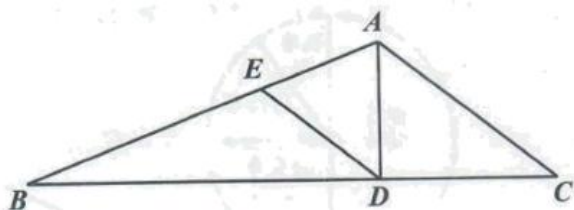
在数轴上表示不等式的解集如图，



∴ 不等式组的解集为： $-3 < x \leq 2$ ，

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ， $DE \parallel AC$ ， $\cos C = \frac{4}{5}$ ， $AC = 10$ ， $BE = 2AE$.



(1) 求 BD 的长；

(2) 求 $\triangle BDE$ 的面积.

【答案】(1) $BD = 16$

(2) 32

【解析】

【分析】(1) 根据 $\cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$ 求得 $CD = 8$, 根据 $DE \parallel AC$, 得出 $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{AE}$, 代入数据即可求解;

(2) 勾股定理求得 AD , 根据 $BE = 2AE$, 可得 $S_{\triangle BDE} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABD}$, 根据三角形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \perp BC$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5},$$

$\therefore AC = 10$,

$\therefore CD = 8$,

$\because DE \parallel AC$,

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{BE}{AE},$$

又 $\because BE = 2AE$,

$$\therefore \frac{BD}{8} = \frac{2}{1},$$

$\therefore BD = 16$;

【小问 2 详解】

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 勾股定理得,

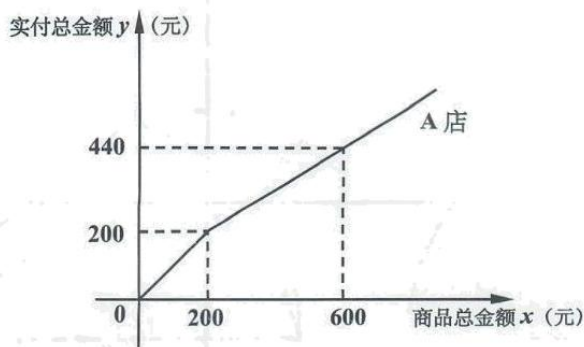
$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$\because BE = 2AE$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle BDE} &= \frac{2}{3}S_{\triangle ABD} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}AD \cdot BD \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 16 = 32,\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例, 勾股定理, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

22. 购物节期间, A、B 两家网店分别推出了促销活动, A 店活动: 当购买的商品总金额在 200 元及以内, 不享受折扣, 当购买的商品总金额超过 200 元, 超过 200 元的金额打 a 折, A 店购物的实付总金额 y (元) 与商品总金额 x (元) 之间的函数关系如图所示; B 店活动: 所有商品直接打七折.



- (1) 当 A 店购买的商品总金额超过 200 元时, 求出 y 与 x 之间的函数解析式;
- (2) A 店推出的促销活动中: $a =$ _____;
- (3) 某公司计划购买某种型号的优盘, 采购员发现 A 店的单价要比 B 店的单价贵 1 元, 如果购买相同数量的优盘, 在 A 店的实付总金额是 800 元, 而在 B 店的实付总金额是 819 元. 请求出 A 店这种型号优盘的单价.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{5}x + 80 (x > 200)$

(2) 6

(3) 40 元

【解析】

【分析】 (1) 根据图象, 用待定系数法求出函数解析式即可;

(2) 根据图象可以求出 a 的值;

(3) 先求出两个商店的商店金额, 再作差, 根据 A 店的单价要比 B 店的单价贵 1 元, 购买优盘的数量相同, 得出两个商店商店总金额的差额即为购买的优盘数, 再求出 A 商店优盘单价即可.

【小问 1 详解】

据图象设当 $x > 0$ 时, y 与 x 之间的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

把 $(200, 200)$, $(600, 440)$ 代入解析式得:

$$\begin{cases} 200k + b = 200 \\ 600k + b = 440 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{5} \\ b = 80 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{3}{5}x + 80 (x > 200);$$

【小问 2 详解】

根据题意得: $(600-200)\frac{a}{10}=440-200$,

解得 $a=6$,

故答案为: 6;

【小问 3 详解】

在 A 店购买: 当 $y=800$ 时, $\frac{3}{5}x+80=800$,

解得 $x=1200$,

$\therefore$ 商品总金额为 1200 元;

在 B 店购买商品总金额为: $\frac{819}{0.7}=1170$ (元),

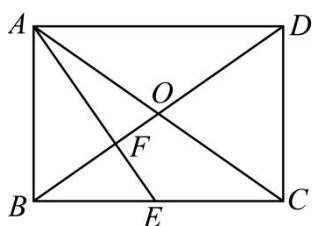
$\therefore$ 两个商店商品总金额的差为 $1200-1170=30$ (元),

$\because$ A 店的单价要比 B 店的单价贵 1 元, 购买优盘的数量相同,

$\therefore$ A 店的单价为 $\frac{1200}{30}=40$ (元).

【点睛】 本题考查一次函数的应用, 关键是求出函数解析式.

23. 已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle BAD=90^\circ$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 点 E 在边 BC 上, $AE \perp BD$, 垂足为点 F , $AB \cdot DC = BF \cdot BD$.



(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 为矩形;

(2) 过点 O 作 $OG \perp AC$ 交 AD 于点 G , 求证: $EC = 2DG$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题意证明 $\triangle ABF \sim \triangle DBA$, 得出 $AB^2 = BF \cdot BD$, 又 $AB \cdot CD = BF \cdot BD$, 则 $AB = CD$, 进而即可得证;

(2) 证明 $\triangle GOD \sim \triangle EAC$, 根据相似三角形的性质即可得证.

【小问 1 详解】

$\because \angle BAD=90^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle DAE = 90^\circ$,

又 $\because AE \perp BD$,

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{BD}{AB},$$

$$\therefore AB^2 = BF \cdot BD,$$

$$\text{又} \because AB \cdot CD = BF \cdot BD,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD, \text{ 且 } \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形;

【小问 2 详解】

$$\because OG \perp AC,$$

$$\therefore \angle GOD + \angle DOC = 90^\circ,$$

在矩形 $ABCD$ 中, $\angle DOC = \angle ADF$,

$$\text{又} \because AE \perp BE,$$

$$\therefore \angle AOF + \angle EAC = 90^\circ,$$

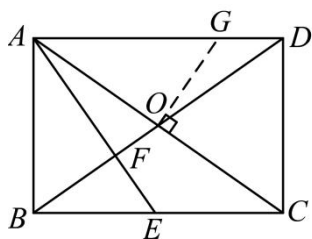
$$\therefore \angle EAC = \angle GOD,$$

在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADB = \angle DBC = \angle ACB$,

$$\therefore \triangle GOD \sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \frac{GD}{EC} = \frac{DO}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EC = 2GD.$$

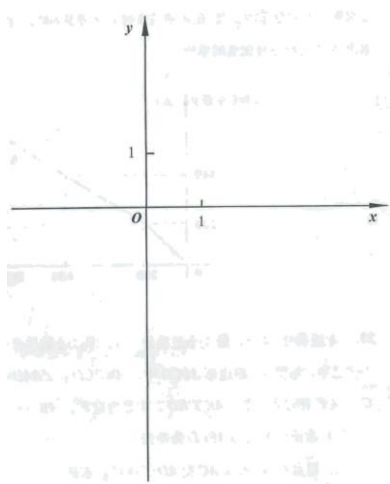


【点睛】 本题考查了三角形的性质与判定, 矩形的性质与判定, 熟练掌握相似

三角形的性质与判定是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 - 2x + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和

$B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 抛物线的顶点为点 D .



(1) 求抛物线的表达式，并写出点 D 的坐标；

(2) 将直线 BC 绕点 B 顺时针旋转，交 y 轴于点 E 。此时旋转角 $\angle EBC$ 等于 $\angle ABD$ 。

①求点 E 的坐标；

②二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图象始终有一部分落在 $\triangle ECB$ 的内部，求实数 b 的取值范围。

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ ， $D(1, -4)$

(2) ① $E(0, 1)$ ；② $-4 < b < \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求解析式，进而化为顶点式，即可求解。

(2) ①根据题意画出函数图象，过点 D 作 $DH \perp y$ 于点 H ，则 $CH = DH = 1$ ， $CD = \sqrt{2}$ ，证明 $\triangle EOB \sim \triangle DCB$ ，即可求解；

②将点 E, B 的坐标分别代入 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ ，结合图形即可求解。

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-1, 0)$ 和 $B(3, 0)$ ，代入 $y = ax^2 - 2x + c$ ，得，

$$\begin{cases} a + 2 + c = 0 \\ 9a - 6 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为： $y = x^2 - 2x - 3$ ，

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore D(1, -4)$ ；

【小问 2 详解】

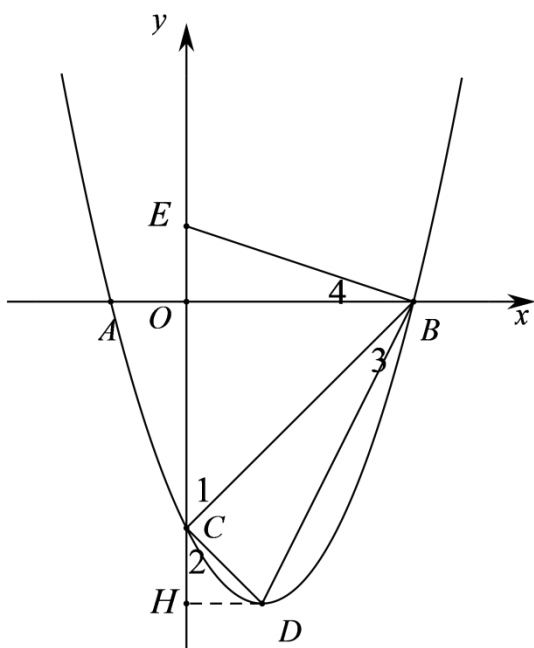
把 $x=0$ 代入 $y=x^2-2x-3$ 得 $y=-3$

$$\therefore C(0,3),$$

$$\therefore B(3,0),$$

$$\therefore OB=OC=3, \text{ 则 } BC=3\sqrt{2},$$

如图所示, 过点 D 作 $DH \perp y$ 于点 H , 则 $CH=DH=1$, $CD=\sqrt{2}$,



$\therefore \triangle OCB, CHD$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CBE = \angle ABD$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4$$

$$\text{又} \angle BCD = \angle BOE,$$

$$\therefore \triangle EOB \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{EO}{CD} = \frac{OB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore EO = 1,$$

$$\therefore E(0,1);$$

$$\textcircled{2} \because y = x^2 + 2bx + b^2 - 1 = (x+b)^2 - 1,$$

顶点坐标为 $(-b, -1)$

将 $E(0, 1)$ 代入 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$

解得 $b = \pm\sqrt{2}$,

依题意, 二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像始终有一部分落在 $\triangle ECB$ 的内部,

$$\therefore -\sqrt{2} < b < \sqrt{2},$$

将点 $B(3, 0)$ 代入 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$,

$$\therefore (3+b)^2 - 1 = 0,$$

解得: $b = -4$ 或 $b = -2$,

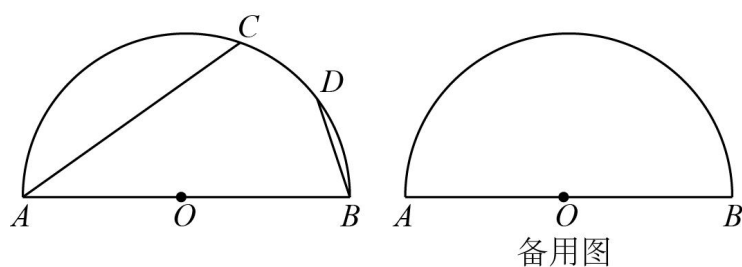
依题意, 二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像始终有一部分落在 $\triangle ECB$ 的内部,

$$\therefore -4 < b < -2,$$

综上所述, 当二次函数 $y = x^2 + 2bx + b^2 - 1$ 的图像始终有一部分落在 $\triangle ECB$ 的内部时, $-4 < b < \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求解析式, 相似三角形的性质与判定, 二次函数的平移, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

25. 如图, 半圆 O 的直径 $AB = 4$, 点 C 是 $\widehat{AB}$ 上一点 (不与点 A 、 B 重合), 点 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点, 分别连接 AC 、 BD .



(1) 当 AC 是圆 O 的内接正六边形的一边时, 求 BD 的长;

(2) 设 $AC = x$, $BD = y$, 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 定义: 三角形一边上的中线把这个三角形分成两个小三角形, 如果其中有一个小三角形是等腰三角形, 且这条中线是这个等腰三角形的腰, 那么这条中线就称为这个三角形的中腰线. 分别延长 AC 、 BD 相交于点 P , 连接 PO . PO 是 $\triangle PAB$ 的中腰线, 求 AC 的长.

【答案】 (1) $BD = 2$

$$(2) y = \sqrt{8-2x} \quad (0 < x < 4)$$

(3) AC 的长为1或3

【解析】

【分析】(1) 连接 OD , CO , AC 是圆 O 的内接正六边形的一边时, 进而判断 $\triangle COD$ 是等边三角形, 即可求解;

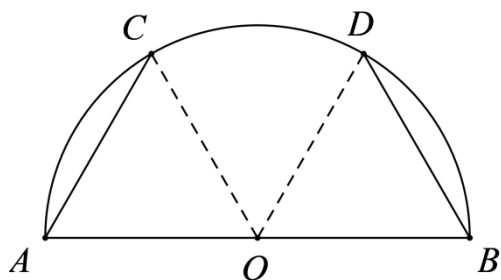
(2) 根据题意证明 $\triangle OBE \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{OE}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2}$ 则 $OE = \frac{1}{2}x$, $DE = OD - OE = 2 - \frac{1}{2}x$, 在

$\text{Rt}\triangle ABC$, $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 勾股定理即可求解;

(3) 分情况讨论, ①当 $PO = PB$ 时, 如图所示, 过点 P 作 $PF \perp AB$ 于点 F , 则 $OF = FB = 1$, ②当 $PA = PO$ 时, 分别画出图形, 根据 $PB = 2BD = 2\sqrt{8-2x}$, 解方程即可求解.

【小问1 详解】

解: 如图所示, 连接 OD , CO ,



$\because$ 半圆 O 的直径 $AB = 4$,

$\therefore AO = BO = 2$,

$\because AC$ 是圆 O 的内接正六边形的一边时,

$$\therefore \angle AOC = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 180^\circ - \angle AOC = 120^\circ,$$

$\because D$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \angle COD = \angle BOD = \frac{1}{2} \angle COB = 60^\circ,$$

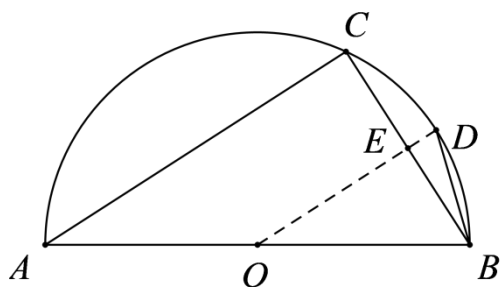
$$\therefore OD = OB = 2,$$

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形,

$$\therefore BD = OB = 2;$$

【小问2 详解】

解：如图所示，连接 OD 交 BC 于点 E ，



$\because D$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$\therefore DE \perp BC$,

$\because AB$ 是直径,

$\therefore AC \perp BC$,

$\therefore AC \parallel OD$,

$\therefore \triangle OBE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{OE}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{1}{2},$$

$\because AC = x, BD = y$,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore DE = OD - OE = 2 - \frac{1}{2}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16 - x^2}$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2},$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $BD = \sqrt{BE^2 + DE^2}$,

$$\therefore y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(16 - x^2) + \left(4 - 2x + \frac{1}{4}x^2\right)}$$

$$= \sqrt{-2x + 8},$$

$$\therefore y = \sqrt{8 - 2x},$$

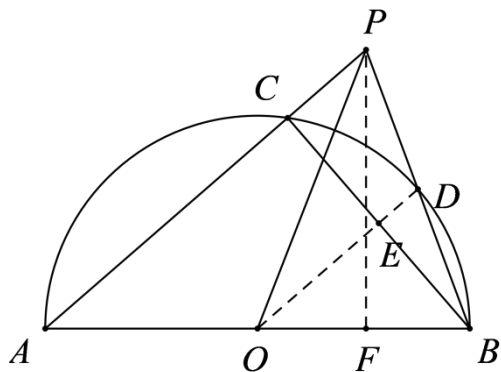
$$\therefore -2x + 8 > 0, x > 0,$$

$$\therefore 0 < x < 4,$$

$$\therefore y = \sqrt{8-2x} \quad (0 < x < 4);$$

【小问3详解】

解：①当 $PO = PB$ 时，如图所示，过点 P 作 $PF \perp AB$ 于点 F ，则 $OF = FB = 1$ ，



设 $AC = x$ ，由 (2) 可得 $OE = \frac{1}{2}x$ ， $DE = OD - OE = 2 - \frac{1}{2}x$ ，

$\therefore DE \parallel PC$ ， E 为 BC 的中点，

$$\therefore CP = 2DE = 4 - x,$$

$$\therefore AP = AC + PC = 4 - x + x = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle APF$ 中， $AF = AO + OF = 2 + 1 = 3$ ，

$$\therefore PF = \sqrt{AP^2 - AF^2} = \sqrt{7},$$

在 $\text{Rt}\triangle OPF$ 中， $PO = \sqrt{PF^2 + OF^2} = 2\sqrt{2}$ ，

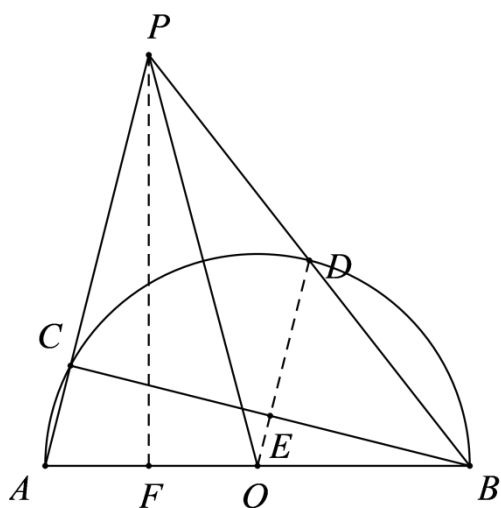
$$\text{又} \because PB = 2BD = 2\sqrt{8-2x}$$

$$\therefore 2\sqrt{8-2x} = 2\sqrt{2},$$

解得： $x = 3$ ，

$$\therefore AC = 3;$$

②如图所示，当 $PA = PO$ 时，



同理可得 $PA = AB = PO = 4$ ，则 $AF = OF = 1$ ， $BF = 3$ ， $PF = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$

$$\therefore BP = \sqrt{3^2 + 15} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} = 2BD = 2\sqrt{-2x + 8} ,$$

解得： $x = 1$ ，

$$\therefore AC = 1 ,$$

综上所述， AC 的长为1或3 .

【点睛】 本题考查了正多边形与圆，垂径定理，函数关系式，等边三角形的性质与判定，勾股定理，等腰三角形的性质与判定，熟练掌握是解题的关键.

