

2022 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷初三数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列互为倒数的是 ()

A. 3 和 $\frac{1}{3}$

B. -2 和 2

C. 3 和 $-\frac{1}{3}$

D. -2 和 $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据互为倒数的意义, 找出乘积为 1 的两个数即可.

【详解】解: A. 因为 $3 \times \frac{1}{3} = 1$, 所以 3 和 $\frac{1}{3}$ 是互为倒数, 因此选项符合题意;

B. 因为 $-2 \times 2 = -4$, 所以 -2 与 2 不是互为倒数, 因此选项不符合题意;

C. 因为 $3 \times (-\frac{1}{3}) = -1$, 所以 3 和 $-\frac{1}{3}$ 不是互为倒数, 因此选项不符合题意;

D. 因为 $-2 \times \frac{1}{2} = -1$, 所以 -2 和 $\frac{1}{2}$ 不是互为倒数, 因此选项不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题考查了倒数, 解题的关键是理解互为倒数的意义是正确判断的前提, 掌握“乘积为 1 的两个数互为倒数”.

2. 下列运算结果错误的是 ()

A. $m^2 \div m^3 = m^{-1}$

B. $(m^2)^3 = m^6$

C. $m^2 \cdot m^3 = m^5$

D. $m^2 + m^3 = m^5$

【答案】D

【解析】

【分析】由同底数幂的除法运算可判断 A, 由幂的乘方运算可判断 B, 由同底数幂的乘法运算可判断 C, 由合并同类项可判断 D, 从而可得答案.

【详解】解: $m^2 \div m^3 = m^{-1}$, 故 A 不符合题意;

$(m^2)^3 = m^6$, 故 B 不符合题意;

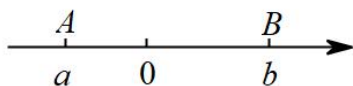
$m^2 \cdot m^3 = m^5$, 故 C 不符合题意;

m^2 , m^3 不是同类项, 不能合并, 故 D 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查的是同底数幂的除法, 负整数指数幂的含义, 幂的乘方, 同底数幂的乘法, 合并同类项, 熟记幂的运算的运算法则是解本题的关键.

3. 如图，数轴上的点 A 和点 B 分别在原点的左侧和右侧，点 A 、 B 对应的实数分别是 a 、 b ，下列结论一定成立的是（ ）



- A. $a+b < 0$ B. $b-a < 0$ C. $-2a > -2b$ D. $|a| > |b|$

【答案】C

【解析】

【分析】由数轴可得 $a < 0 < b$ ， $|a| < |b|$ ，再结合有理数的加法与减法法则及不等式的性质，绝对值的含义逐一分析即可.

【详解】解：∵ $a < 0 < b$ ， $|a| < |b|$ ，故 D 不符合题意；

∴ $a+b > 0$ ， $b-a > 0$ ，故 A，B 不符合题意；

∴ $a < b$ ，

∴ $-2a > -2b$ ，故 C 符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查的是利用数轴比较实数的大小，有理数的加法与减法法则的应用，绝对值的含义，不等式的性质，掌握基础知识是解本题的关键.

4. 如果点 $(-2, y_1)$ 、 $(-1, y_2)$ 、 $(2, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图像上，那么（ ）

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_3 > y_2 > y_1$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可知函数的图象在二、四象限，由三点的横坐标可知 $(-2, y_1)$ 、 $(-1, y_2)$ 在第二象限， $(2, y_3)$ 在第四象限，根据反比例函数的增减性及各象限内点的坐标特点即可解答.

【详解】解：∵ 反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)，

∴ 反比例函数图象经过第二、四象限，在每个象限内 y 随 x 增大而增大，

∴ 点 $(-2, y_1)$ 、 $(-1, y_2)$ 、 $(2, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图像上， $-2 < -1 < 0 < 2$ ，

∴ $y_2 > y_1 > y_3$ ，

故选 B.

【点睛】 本题考查比较反比例函数值的大小，解题的关键是熟练掌握反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的性质：当 $k > 0$ 时，图象在一、三象限，在每一象限内， y 随 x 的增大而减小；当 $k < 0$ 时，图象在二、四象限，在每一象限内， y 随 x 的增大而增大.

5. 某校足球社团有 50 名成员，下表是社团成员的年龄分布统计表，对于不同的 m (m 为 0~14 的整数)，下列关于年龄的统计量不会发生改变的是 ()

年龄 (单位: 岁)	13	14	15	16	17
频数 (单位: 名)	12	15	m	$14 - m$	9

- A. 平均数、中位数 B. 平均数、方差 C. 众数、中位数 D. 众数、方差

【答案】 C

【解析】

【分析】 分别求解平均数，众数与中位数，再根据方差受到平均数的影响，从而可得答案.

【详解】 解：总人数为：50 人，

$$\text{平均数为: } \frac{1}{50} [12 \times 13 + 14 \times 15 + 15m + 16(14 - m) + 17 \times 9]$$

$$= \frac{1}{50} \times (743 - m),$$

$\therefore m$ 变化，平均数变化，

$\therefore 50$ 个数据，排在最中间的两个数据分别为第 25 个，第 26 个，都为 14 岁，

$$\therefore \text{中位数为: } \frac{1}{2} (14 + 14) = 14,$$

$\therefore$ 中位数不会变化；

$$\therefore 0 \leq m \leq 14,$$

$\therefore$ 出现次数最多的数据是 14 岁，则众数是 14 岁，

$\therefore$ 众数不会变化；

$\therefore$ 方差受到平均数的影响，平均数变化，

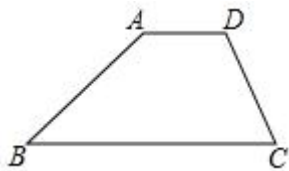
$\therefore$ 方差会变化，

故 A, B, D 不符合题意；C 符合题意；

故选 C.

【点睛】 本题考查的是平均数，众数，中位数，方差的含义与计算，理解题意，熟记概念是解本题的关键.

6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$ ， $AD = 3$ ， $BC = 9$ ， $AB = 6$ ， $CD = 4$ ，分别以 AB 、 CD 为直径作圆，这两圆的位置关系是 ()



- A. 内切 B. 外切 C. 相交 D. 外离

【答案】 D

【解析】

【分析】 先求出两圆的圆心距， AB 和 CD 的一半为两圆的半径，利用半径之和和两圆的圆心距的大小关系求解.

【详解】 解： $\because$ 分别以 AB 、 CD 为直径作圆，

$\therefore$ 两圆的圆心分别是 AB 、 CD 的中点，

$\therefore$ 两圆心的连线是梯形的中位线.

$\because AD = 3$ ， $BC = 9$ ，

$\therefore$ 两圆的圆心距为 $\frac{3+9}{2} = 6$ ，

$\because AB = 6$ ， $CD = 4$ ，

$\therefore$ 两圆的半径分别为 3 和 2，

$\because 3+2 < 6$ ，

$\therefore$ 两圆外离，

故选： D.

【点睛】 本题考查了梯形的中位线，以及圆与圆的位置关系，解题的关键是分别求得两圆的圆心距和两圆的半径.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $4^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据算术平方根的计算法则进行计算，即可得到答案.

【详解】 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ ，故答案为 2.

【点睛】 本题考查求算术平方根，解题的关键是掌握求算术平方根的方法.

8. 已知 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ，则 $f(\sqrt{3}) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】将 $x=\sqrt{3}$ 代入 $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ，再化简即可得.

【详解】解：当 $x=\sqrt{3}$ 时， $f(\sqrt{3})=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$ ，

故答案为： $\sqrt{3}+1$.

【点睛】本题考查了求函数值的能力，当已知函数解析式时，求函数值就是求代数式的值.

9. 根据电影发行方的数据，电影《满江红》截至 2023 年 3 月 17 日，以 4535000000 元的票房高居春节档前列，数据 4535000000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 4.535×10^9

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leq |a|<10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数.

【详解】解： $4535000000=4.535\times 10^9$ ，

故答案为： 4.535×10^9 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a\times 10^n$ 的形式，其中 $1\leq |a|<10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. 方程组 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

【解析】

【分析】先把原方程组化为 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ ，再解二元一次方程组即可.

【详解】解： $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \textcircled{1} \\ x+y=3 \textcircled{2} \end{cases}$

由①得： $(x-y)(x-2y)=0$ ，

$$\therefore x - y = 0 \text{ 或 } x - 2y = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases},$$

$$\text{解} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ 可得: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\text{解} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \text{ 可得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原方程组的解为: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查的是二元二次方程组的解法，熟练的把二元二次方程组化为二元一次方程组是解本题的关键.

11. 妈妈煮了 4 个汤圆，分别是 2 个花生味和 2 个芝麻味，小明随意吃两个恰好都是花生味的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】列表（用 A, B 表示花生味的汤圆， C, D 表示芝麻味的汤圆）展示所有 12 种等可能的结果，找出两个恰好都是花生味的结果数，然后根据概率公式计算.

【详解】解：如下表：用 A, B 表示花生味的汤圆， C, D 表示芝麻味的汤圆

	A	B	C	D
A		AB	AC	AD
B	BA		BC	BD
C	CA	CB		CD
D	DA	DB	DC	

共有 12 种等可能的结果，其中两个恰好都是花生味的结果数为 2，所以小明从中任意吃两个，恰好吃到两个都是花生味汤圆的概率 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

故答案为： $\frac{1}{6}$ 。

【点睛】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图展示所有可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式求出事件 A 或 B 的概率。

12. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m > -1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程有两个不相等的实数根，则 $\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 4 + 4m > 0$ ，即可解出 m 的范围。

【详解】 解：关于 x 的方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相等的实数根

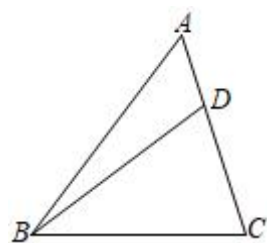
$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 4 + 4m > 0$$

$$\therefore m > -1.$$

【点睛】 本题考查一元二次方程根的情况， $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根； $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根； $\Delta < 0$ ，方程没有实数根。

13. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AC 上一点，且 $CD = 2AD$ 。设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量

$\overrightarrow{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ 的形式表示，其中 x, y 为实数）



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 先求解 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ ，再根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ 可得答案。

【详解】 解： $\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

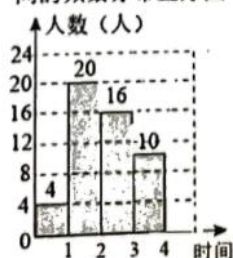
故答案为: $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查的是平面向量的线性运算, 熟练的掌握运算法则是解本题的关键.

14. 为了了解学生在家做家务情况, 某校对部分学生进行抽样调查, 并绘制了如图所示的频数分布直方图 (每组数据含最小值, 不含最大值). 如果该校有 1500 名学生, 估计该校平均每周做家务的时间少于 2 小时的学生人数约是_____人.

部分学生平均每周做家务时

间的频数分布直方图



【答案】 720

【解析】

【分析】 根据样本估计总体, 用 1500 乘以做家务的时间少于 2 小时的学生人数的占比即可求解.

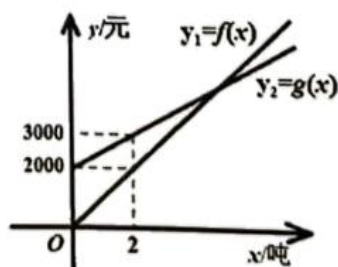
【详解】 解: 如果该校有 1500 名学生, 估计该校平均每周做家务的时间少于 2 小时的学生人数约是

$$1500 \times \frac{4+20}{4+20+16+10} = 720,$$

故答案为: 720.

【点睛】 本题考查了样本估计总体, 频数分布直方图, 熟练掌握样本估计总体是解题的关键.

15. 某公司产品的销售收入 y_1 元与销售量 x 吨的函数关系记为 $y_1 = f(x)$, 销售成本 y_2 与销售量 x 的函数关系记为 $y_2 = g(x)$, 两个函数的图像如图所示. 当销售收入与销售成本相等时, 销售量 x 为_____吨.



【答案】4

【解析】

【分析】分别求出 $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ 的函数关系式, 然后联立两关系式即可求出答案.

【详解】解: 设 $y_1 = kx$, $y_2 = k'x + b$,

$$\therefore 2k = 2000, \begin{cases} 2k' + b = 3000 \\ b = 2000 \end{cases},$$

$$\therefore k = 1000, \begin{cases} k' = 500 \\ b = 2000 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = 1000x, y_2 = 500x + 2000,$$

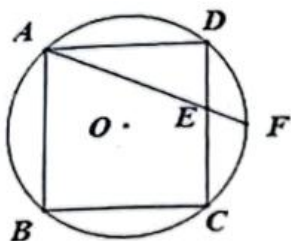
$$\text{联立} \begin{cases} y_1 = 1000x \\ y_2 = 500x + 2000 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 4 \\ y = 4000 \end{cases},$$

$\therefore$ 当销售收入与销售成本相等时, 销售量 x 为 4 吨,

故答案为: 4.

【点睛】本题主要考查了一次函数的实际应用, 正确求出对应的函数关系式是解题的关键.

16. 如图, 已知 $\odot O$ 的内接正方形 $ABCD$, 点 F 是 $\widehat{CD}$ 的中点, AF 与边 DC 交于点 E , 那么 $\frac{EF}{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$.

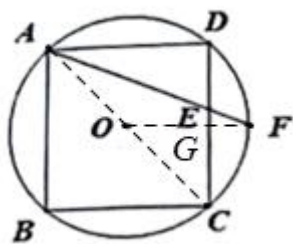


【答案】 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

【解析】

【分析】连接 OF , 交 CD 于点 G , 连接 AC , 根据题意得出 $GF \parallel AD$, 设 $AD = a$, 则 $AC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}a$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle FGE$, 根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】解: 如图所示, 连接 OF , 交 CD 于点 G , 连接 AC ,



$\because \odot O$ 的内接正方形 $ABCD$,

$\therefore AC$ 经过点 O ,

$\because$ 点 F 是 $\widehat{CD}$ 的中点,

$\therefore OF \perp CD$, $GD = GC$

$\therefore GF \parallel AD$

设 $AD = a$, 则 $AC = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}a$

$$\therefore OF = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\because OG = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore FG = OF - OG = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a$$

$\because GF \parallel AD$,

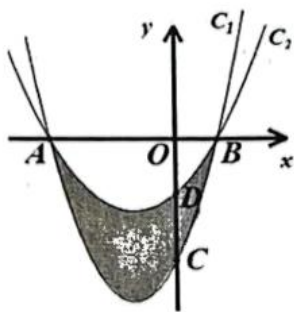
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FGE$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{GF}{AD} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a}{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

【点睛】 本题考查了正多边形与圆, 垂径定理, 正方形的性质, 相似三角形的性质, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle FGE$ 是解题的关键.

17. 如图, 抛物线 $C_1: y = x^2 + 2x - 3$ 与抛物线 $C_2: y = ax^2 + bx + c$ 组成一个开口向上的“月牙线”, 抛物线 C_1 和抛物线 C_2 与 x 轴有着相同的交点 A 、 B (点 B 在点 A 右侧), 与 y 轴的交点分别为 C 、 D . 如果 $BD = CD$, 那么抛物线 C_2 的表达式是_____.



【答案】 $y = \frac{4}{9}(x+3)(x-1)$

【解析】

【分析】先求出 A 、 B 、 C 的坐标，设点 D 的坐标为 $(0, m)$ ，则 $OD = -m$ ，利用勾股定理结合 $BD = CD$ 得到 $m^2 + 1 = (3 + m)^2$ ，解得 $m = -\frac{4}{3}$ ，则 $D\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ，可设抛物线 C_2 的解析式为 $y = a(x+3)(x-1)$ ，

利用待定系数法求出 $a = \frac{4}{9}$ 。

【详解】解：在 $y = x^2 + 2x - 3$ 中，令 $x = 0$ ，则 $y = -3$ ，

$$\therefore C(0, -3),$$

在 $y = x^2 + 2x - 3$ 中，令 $y = 0$ ，则 $x^2 + 2x - 3 = 0$ ，解得 $x = 1$ 或 $x = -3$ ，

$$\therefore A(-3, 0), B(1, 0),$$

$$\therefore OB = 1,$$

设点 D 的坐标为 $(0, m)$ ，则 $OD = -m$

$$\therefore CD = 3 + m, BD = \sqrt{OD^2 + OB^2} = \sqrt{m^2 + 1},$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore m^2 + 1 = (3 + m)^2,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore D\left(0, -\frac{4}{3}\right),$$

$\therefore$ 抛物线 C_2 经过 A 、 B ，

$\therefore$ 可设抛物线 C_2 的解析式为 $y = a(x+3)(x-1)$ ，

$$\therefore a(0+3)(0-1) = -\frac{4}{3},$$

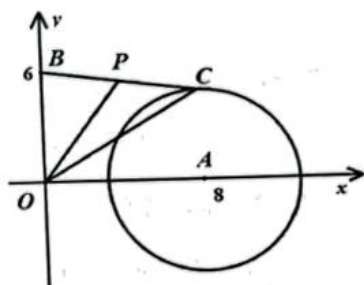
$$\text{解得 } a = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \text{抛物线 } C_2 \text{ 的解析式为 } y = \frac{4}{9}(x+3)(x-1),$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{4}{9}(x+3)(x-1).$$

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式，勾股定理，求二次函数与坐标轴的交点，正确求出点 D 的坐标是解题的关键.

18. 如图，在直角坐标系中，已知点 $A(8,0)$ 、点 $B(0,6)$ ， $\odot A$ 的半径为 5，点 C 是 $\odot A$ 上的动点，点 P 是线段 BC 的中点，那么 OP 长的取值范围是_____.

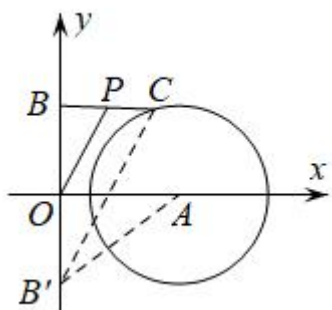


【答案】 $2.5 \leq OP \leq 7.5$

【解析】

【分析】 如图，在 y 轴上取一点 $B'(0,-6)$ ，连接 $B'A$ ， $B'C$ ，由勾股定理求出 $B'A = 10$ ，由三角形中位线定理求 $B'C = 2OP$ ，当 C 在线段 $B'A$ 上时， $B'C$ 的长度最小值 $10 - 5 = 5$ ，当 C 在线段 $B'A$ 延长线上时， $B'C$ 的长度最大值 $10 + 5 = 15$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，在 y 轴上取一点 $B'(0,-6)$ ，连接 $B'A$ ， $B'C$ ，



$$\therefore B'(0,-6), A(8,0),$$

$$\therefore OB' = OB = 6, OA = 8,$$

$$\therefore B'A = \sqrt{OB'^2 + OA^2} = 10,$$

$\therefore$ 点 P 是 BC 的中点,

$$\therefore BP = PC,$$

$$\therefore OB = OB', \quad BP = PC,$$

$\therefore OP$ 是 $\triangle BB'C$ 的中位线,

$$\therefore B'C = 2OP,$$

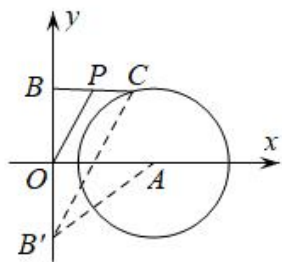
当 C 在线段 $B'A$ 上时, $B'C$ 的长度最小值为: $10 - 5 = 5$,

当 C 在线段 $B'A$ 延长线上时, $B'C$ 的长度最大值为: $10 + 5 = 15$,

$$\therefore 5 \leq B'C \leq 15,$$

$$\therefore 2.5 \leq OP \leq 7.5,$$

故答案为: $2.5 \leq OP \leq 7.5$.



【点睛】 本题考查的是圆外一点到圆上点距离的最值, 三角形中位线定理, 勾股定理等知识, 添加恰当的辅助线是解答本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简: $\left(\frac{1}{x+3} - 1\right) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x + 9}$, 然后从 -3 、 -2 、 0 、 2 、 3 中选一个数代入求值.

【答案】 $-\frac{x+3}{x-2}$, 当 $x=0$ 时, 原式 $= \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 先计算括号内分式的减法运算, 再把除法运算化为乘法运算, 约分后得到化简的结果, 再选 $x=0$ 或 $x=3$ 代入求值即可.

【详解】 解: $\left(\frac{1}{x+3} - 1\right) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 6x + 9}$

$$= \frac{1-x-3}{x+3} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{-(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= -\frac{x+3}{x-2};$$

∵ 原分式有意义，则 $x \neq -3$ ， $x \neq \pm 2$ ，

∴ 当 $x=0$ 时，原式 $= \frac{3}{2}$ 。

【点睛】 本题考查的是分式的化简求值，分式有意义的条件，掌握分式的混合运算的运算法则与运算顺序是解本题的关键。

$$20. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 3x+6 \geq 5(x-2) \\ 1-\frac{x-2}{3} \leq \frac{2x-1}{2} \end{cases}$$

【答案】 $\frac{13}{8} \leq x \leq 8$

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集。

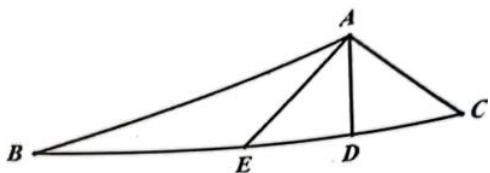
【详解】 解：由 $3x+6 \geq 5(x-2)$ ，得： $x \leq 8$ ，

$$\text{由 } 1-\frac{x-2}{3} \leq \frac{2x-1}{2}, \text{ 得: } x \geq \frac{13}{8},$$

则不等式组的解集为 $\frac{13}{8} \leq x \leq 8$ 。

【点睛】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键。

21. 如图， AD 、 AE 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高和中线，已知 $BC=8$ ， $\tan B = \frac{1}{3}$ ， $\angle C = 45^\circ$ 。



(1) 求 AD 的长；

(2) 求 $\sin \angle BAE$ 的值.

【答案】 (1) 2

(2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由 AD 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高得到 $\angle ADC = \angle ADB = 90^\circ$, 由 $\tan B = \frac{1}{3}$, $\angle C = 45^\circ$, 得到 $BD = 3AD, CD = AD$, 则 $BC = BD + CD = 4AD = 8$, 即可得到答案;

(2) 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F , 由 AE 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中线, 得到 $CE = BE = \frac{1}{2}BC = 4$, 由 $\tan B = \frac{1}{3}$ 得到 $BF = 3EF$, 勾股定理求出 $EF = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, 再由勾股定理得到 $AE = 2\sqrt{2}$, 即可得到 $\sin \angle BAE$ 的值.

【小问 1 详解】

解: $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的高,

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \tan B = \frac{1}{3}, \quad \angle C = 45^\circ,$$

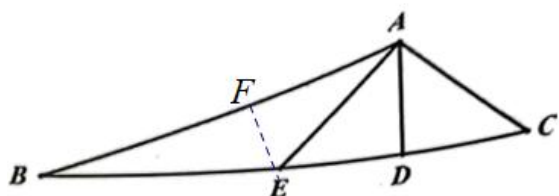
$$\therefore BD = 3AD, CD = AD,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 4AD = 8,$$

$$\therefore AD = 2;$$

【小问 2 详解】

解: 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ,



$\because AE$ 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中线,

$$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\because \tan B = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BF = 3EF,$$

$$\because BF^2 + EF^2 = BE^2,$$

$$\therefore 10EF^2 = BE^2 = 16,$$

$$\therefore EF = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore CD = AD = 2,$$

$$\therefore DE = CE - CD = 2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \sin \angle BAE = \frac{EF}{AE} = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】此题考查了解直角三角形、勾股定理等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

22. 小明家的花洒的实景图及其侧面示意图分别如图 1、图 2 所示，花洒安装在离地面高度 160 厘米的 A 处，花洒 AD 的长度为 20 厘米.



图1

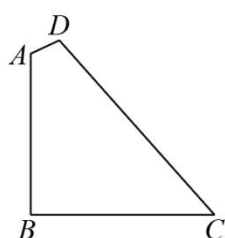


图2

(1) 已知花洒与墙面所成的角 $\angle BAD = 120^\circ$ ，求当花洒喷射出的水流 CD 与花洒 AD 成 90° 的角时，水流喷射到地面的位置点 C 与墙面的距离. (结果保留根号)

(2) 某店铺代理销售这种花洒，上个月的销售额为 2400 元，这个月由于店铺举行促销活动，每个花洒的价格比上个月便宜 20 元，因此比上个月多卖出 8 个的同时销售额也上涨了 400 元，求这个此款花洒的原价是多少元？

【答案】(1) $\frac{200}{3}\sqrt{3}\text{cm}$

(2) 120 元

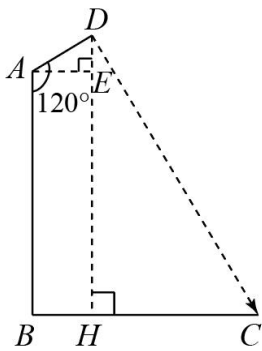
【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AH \perp CD$ 于点 H ，过点 B 作 $BE \perp AH$ 于点 E ，构造出矩形 $ABHE$ ， $Rt\triangle AED$ ， $Rt\triangle CHD$ 然后解直角三角形求解，

(2) 设此款花洒的原价是 x 元，根据比上个月多卖出 8 个的同时销售额也上涨了 400 元列分式方程即可求解.

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DH \perp BC$ ，垂足为点 H ，过 A 作 $AE \perp DH$ ，垂足为点 E ，



$\therefore$ 四边形 $ABHE$ 为矩形,

$\therefore AE = BH, AB = EH,$

$\therefore \angle BAD = 120^\circ,$

$\therefore \angle DAE = 30^\circ,$

又 $\therefore \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ,$

$\therefore \angle DCB = 60^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$$DE = AD \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10(\text{cm}),$$

$$BH = AE = AD \cos 30^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$\therefore DH = DE + EH = DE + AB = 10 + 160 = 170(\text{cm}),$

在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中, $CH = \frac{DH}{\tan \angle DCB} = 170 \div \tan 60^\circ = \frac{170}{3}\sqrt{3}(\text{cm}),$

$\therefore$ 流喷射到地面的位置点 C 与墙面的距离 $BC = BH + CH = 10\sqrt{3} + \frac{170}{3}\sqrt{3} = \frac{200}{3}\sqrt{3}(\text{cm}),$

【小问 2 详解】

设此款花洒的原价是 x 元, 根据比上个月多卖出 8 个的同时销售额也上涨了 400 元, 列方程得:

$$\frac{2400 + 400}{x - 20} - \frac{2400}{x} = 8,$$

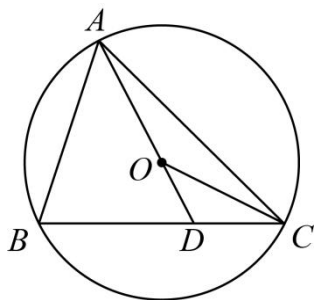
解得: $x = 120,$

经检验: $x = 120$ 是方程的解,

答: 这个此款花洒的原价是 120 元.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用和分式方程的应用, 熟记理解题意, 明确每一个量的意义是解题的关键.

23. 如图, 已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 连接 AO 并延长交边 BC 于点 D , 连接 OC , 且 $DC^2 = OD \cdot AD$.



(1) 求证: $AC = BC$;

(2) 当 $AB = AD$ 时, 过点 A 作边 BC 的平行线, 交 $\odot O$ 于点 E , 连接 OE 交 AC 于点 F . 请画出相应的图形, 并证明: $AD \cdot AE = BC \cdot EF$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle DOC \sim \triangle DCA$, 再证明 $\angle ACO = \angle DCO$, 如图, 延长 CO 交 $\widehat{AB}$ 于 H , 结合垂径定理与等腰三角形的判定可得结论;

(2) 如图, 补全图形如下: 结合 (1) 设 $\angle ACO = \angle DCO = \angle OAC = x$, 再证明 $\angle EAF = \angle ACB = 2x$, $\angle EAO = \angle ADB$, $\angle AEF = \angle ABC$, 可得 $\triangle AEF \sim \triangle CBA$, 结合相似三角形的性质可得结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because DC^2 = OD \cdot AD$,

$$\therefore \frac{DC}{OD} = \frac{AD}{DC},$$

$$\because \angle ODC = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle DCA,$$

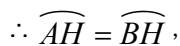
$$\therefore \angle DOC = \angle ACD, \quad \angle DCO = \angle DAC,$$

$$\because \angle DOC = \angle OAC + \angle OCA, \quad OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle DCO,$$

如图, 延长 CO 交 $\widehat{AB}$ 于 H ,



∴ 结合三角形的内角和定理可得: $\angle CBA = \angle CAB$,

【小问 2 详解】

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\because AC = BC, \quad AB = AD,$$

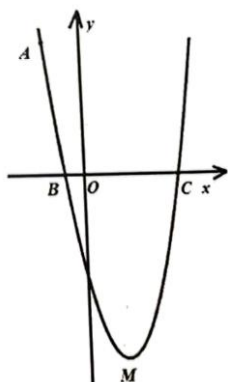
$$\therefore OA = OE,$$

$\therefore \angle AEF = \angle ABC$, 而 $\angle EAF = \angle ACB$,

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{EF}{AB}, \text{ 而 } AB = AD,$$

$$\therefore AE \cdot AD = BC \cdot EF \text{ .}$$

24. 如图, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 7)$, 与 x 轴交于点 B 、 $C(5, 0)$.



- (1) 求抛物线的顶点 M 的坐标;
- (2) 点 E 在抛物线的对称轴上, 且位于 x 轴的上方, 将 $\triangle BCE$ 沿直线 BE 翻折, 如果点 C 的对应点 F 恰好落在抛物线的对称轴上, 求点 E 的坐标;
- (3) 点 P 在抛物线的对称轴上, 点 Q 是抛物线上位于第四象限内的点, 当 $\triangle CPQ$ 为等边三角形时, 求直线 BQ 的表达式.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x - 5$, 顶点坐标为: $M(2, -9)$.

(2) 点 E 的坐标为 $(2, \sqrt{3})$;

(3) 直线 BP 的函数表达式为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解抛物线的解析式, 再化为顶点式, 即可得到顶点坐标;

(2) 先求解抛物线与 x 轴交于 $B(-1, 0)$, $C(5, 0)$, 可得 $BC = 6$, 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$, 设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 H , 则 H 点的坐标为 $(2, 0)$, $BH = 3$, 由翻折得 $CB = FB = 6$, 由勾股定理, 得 $FH = \sqrt{FB^2 - BH^2} = 3\sqrt{3}$, 求解 $\angle FBH = 60^\circ$, 由翻折得 $\angle EBH = \frac{1}{2}\angle FBH = 30^\circ$, 再利用三角函数可得答案;

(3) 连接 CF , 证明 $\triangle FCB$ 为等边三角形, 证明 $\triangle BCQ \cong \triangle FCP$, 可得 $\angle CFH = 30^\circ = \angle CBQ$, 设 BP 与 x 轴相交于点 K , 可得点 K 的坐标为 $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. 再利用待定系数法求解函数解析式即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-2, 7)$, 与 x 轴交于点 B 、 $C(5, 0)$.

$$\therefore \begin{cases} 4-2b+c=7 \\ 25+5b+c=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b=-4 \\ c=-5 \end{cases},$$

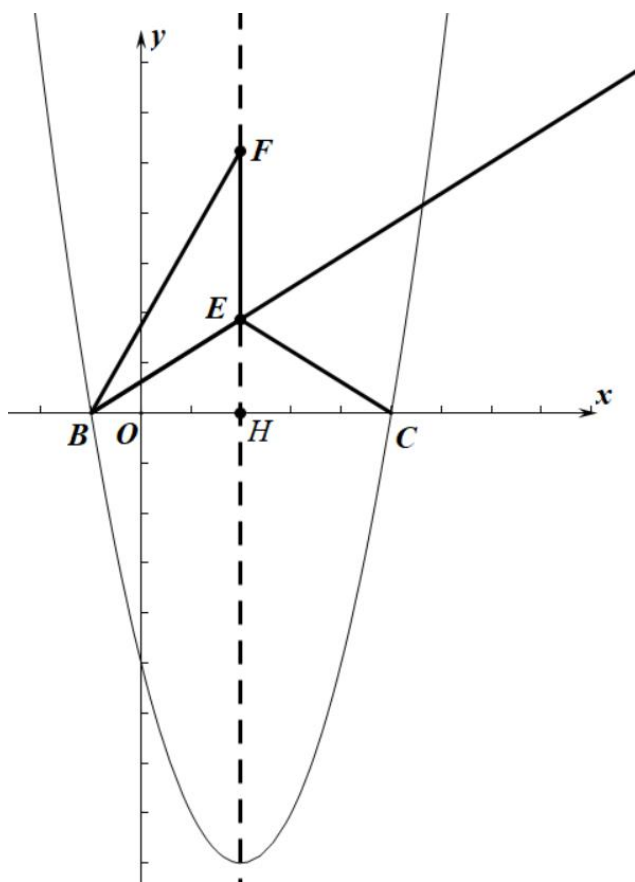
$$\therefore \text{ 抛物线为: } y = x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9,$$

$$\therefore \text{ 顶点坐标为: } M(2, -9).$$

【小问 2 详解】

$$\text{如图, 令 } y = x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, \quad x_2 = 5,$$



$$\therefore \text{ 抛物线与 } x \text{ 轴交于 } B(-1, 0), \quad C(5, 0),$$

$$\therefore BC = 6, \text{ 抛物线的对称轴为直线 } x = 2,$$

$$\text{设抛物线的对称轴与 } x \text{ 轴交于点 } H, \text{ 则 } H \text{ 点的坐标为 } (2, 0), \quad BH = 3,$$

$$\text{由翻折得 } CB = FB = 6,$$

$$\text{由勾股定理, 得 } FH = \sqrt{FB^2 - BH^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{ 点 } F \text{ 的坐标为 } (2, 3\sqrt{3}), \quad \tan \angle FBH = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

$CPx = CAx - CA \cdot CP$ ，可得 $AP = x$ ，即 F ， B 重合，再建立方程求解即可；②当 $BE = DF$ 时，则 F 在线段 AB 的延长线上，如图，延长 AD 交 FE 于 T ，连接 SD ，证明四边形 $DSCT$ 是菱形， $\angle SCD = \angle SDC$ ，设 $BS = m$ ， $SC = n$ ， $AD = AB = CD = x$ ，则 $DT = n$ ，由 $\triangle FBS \sim \triangle FAT$ ，可得 $DT = SC = n = 3m - x$ ，过 F 作 $FI \perp SF$ ，交 CB 的延长线于 I ，证明 $\triangle FBI \sim \triangle SDC$ ， $FB = FI = \frac{1}{2}x$ ，可得 $\frac{BI}{CD} = \frac{FI}{SC}$ ， $DE = CE = FB = FI = \frac{1}{2}x$ ，证明 $\triangle FSI \cong \triangle ESC$ ，可得 $SI = SC = 3m - x$ ， $BI = 3m - x - m = 2m - x$ ，再建立方程求解即可。

【小问 1 详解】

证明：如图，过 A 作 $AQ \perp BC$ 于 Q ，过 D 作 $DN \perp BC$ 于 N ，

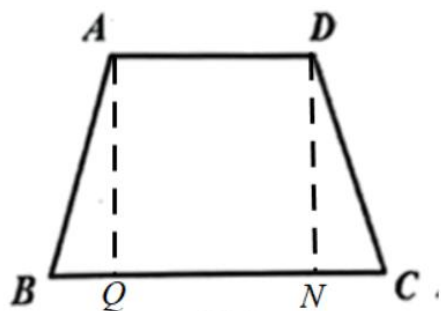


图 1

$$\therefore \angle AQB = \angle DNC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = DC, \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \triangle AQB \cong \triangle DNC,$$

$$\therefore AQ = DN,$$

$$\therefore \angle AQN = \angle DNC = 90^\circ,$$

$$\therefore AQ \parallel DN,$$

$$\therefore \text{四边形 } AQND \text{ 为矩形},$$

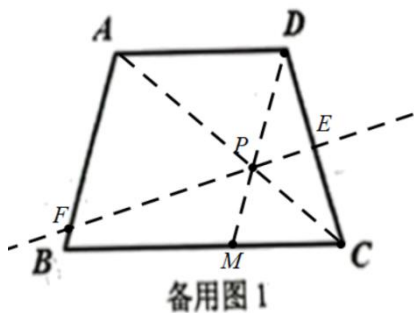
$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore AB = CD, AB, CD \text{ 不平行},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为等腰梯形}.$$

【小问 2 详解】

①如图，连接 PD ，延长 DP 交 BC 于 M ，



$\because EF$ 是 CD 的垂直平分线,
 $\therefore PD = PC$,
 $\therefore \angle PCD = \angle PDC$, $\angle DPE = \angle CPE$,
 $\because AD = DC = AB = x$,
 $\therefore \angle DAC = \angle DCA$,
 $\therefore \angle PDC = \angle DAC$, 而 $\angle PCD = \angle DCA$,
 $\therefore \triangle CPD \sim \triangle CDA$,
 $\therefore \frac{CP}{CD} = \frac{CD}{CA}$,
 $\therefore CP \cdot CA = x^2$,
 $\because AF = AP$, $\angle APF = \angle CPE$,
 $\therefore \angle AEP = \angle APE = \angle CPE = \angle DPE$,
 $\therefore AB \parallel DM$, 而 $AD \parallel BC$,
 $\therefore$ 四边形 $ABMD$ 为平行四边形, $\triangle CPM \sim \triangle CAB$,
 $\therefore AB = DM = x$, $\frac{CP}{CA} = \frac{PM}{AB}$,
 $\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{x - CP}{x}$, 即 $CPx = CAx - CA \cdot CP$,
 $\therefore CPx = CAx - x^2$,
 $\therefore CP = CA - x$, 而 $CP = CA - AP$,
 $\therefore AP = x$, 即 F , B 重合,
 $\therefore (CA - x) \cdot CA = x^2$ 即 $CA^2 - CAx - x^2 = 0$,

解得: $AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ (负根舍去).

②当 $BE = DF$ 时, 则 F 在线段 AB 的延长线上, 如图, 延长 AD 交 FE 于 T , 连接 SD ,

$\because EF$ 是 CD 的垂直平分线,

$$\therefore DE = CE = \frac{1}{2}CD, \quad \angle DET = \angle CES = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDT = \angle ECS,$$

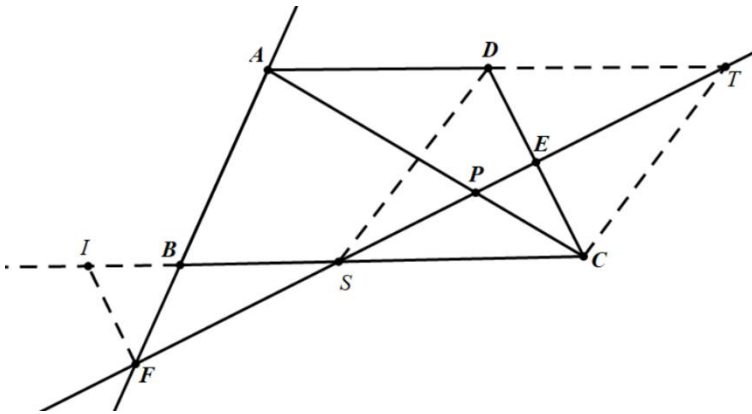
$$\therefore \triangle DET \cong \triangle CES,$$

$$\therefore DT = SC, \text{ 而 } DT \parallel SC,$$

$$\therefore \text{四边形 } DSCT \text{ 是平行四边形},$$

$$\text{由线段垂直平分线的性质可得 } SD = SC,$$

$$\therefore \text{四边形 } DSCT \text{ 是菱形}, \quad \angle SCD = \angle SDC,$$



$$\text{设 } BS = m, \quad SC = n, \quad AD = AB = CD = x, \text{ 则 } DT = n,$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad DE = BF = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \triangle FBS \sim \triangle FAT,$$

$$\therefore \frac{BS}{AT} = \frac{BF}{AF} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{m}{x+n} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DT = SC = n = 3m - x,$$

$$\text{过 } F \text{ 作 } FI \perp SF, \text{ 交 } CB \text{ 的延长线于 } I,$$

$$\therefore FI \parallel CD,$$

$$\therefore \angle FIB = \angle SCD = \angle SDC,$$

$$\therefore \angle FBI = \angle ABC, \text{ 等腰梯形 } ABCD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DCS,$$

$$\therefore \angle FBI = \angle FIB = \angle SCD = \angle SDC,$$

$$\therefore \triangle FBI \sim \triangle SDC, \quad FB = FI = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \frac{BI}{CD} = \frac{FI}{SC}, \quad DE = CE = FB = FI = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \angle FSI = \angle CSE,$$

$$\therefore \triangle FSI \cong \triangle ESC,$$

$$\therefore SI = SC = 3m - x,$$

$$\therefore BI = 3m - x - m = 2m - x,$$

$$\therefore \frac{2m - x}{x} = \frac{\frac{1}{2}x}{3m - x},$$

$$\therefore 12m^2 - 10xm + x^2 = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{12}x, \quad m_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{12}x \quad (\text{使 } SC < 0, \text{ 不合题意舍去}),$$

$$\therefore BC = 4m - x = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}x,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{x}{\frac{2 + \sqrt{13}}{3}x} = \frac{3}{\sqrt{13} + 2} = \frac{\sqrt{13} - 2}{3}.$$

【点睛】 本题考查的是等腰梯形的判定与性质，线段的垂直平分线的性质，等腰三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，一元二次方程的解法，难度大，计算量大，属于压轴题.

