

2022 学年第二学期学业质量调研

九年级数学

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 考试中不能使用计算器.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. -6 的绝对值是 ()

- A. -6 B. 6 C. $-\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 在数轴上, 表示一个数的点到原点的距离叫做这个数的绝对值.

【详解】 负数的绝对值等于它的相反数, 所以 -6 的绝对值是 6 .

故选: B.

2. 下列运算中, 计算结果正确的是 ()

- A. $(2a^3)^2 = 4a^6$ B. $(a+2b)^2 = a^2 + 2ab + 4b^2$
- C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $3a^2 - a^2 = 3$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据积的乘方, 完全平方公式, 同底数幂的除法, 合并同类项, 逐一进行判断即可.

【详解】 解: A、 $(2a^3)^2 = 4a^6$, 选项正确, 符合题意;

B、 $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$, 选项错误, 不符合题意;

C、 $a^6 \div a^3 = a^3$, 选项错误, 不符合题意;

D、 $3a^2 - a^2 = 2a^2$ ，选项错误，不符合题意；

故选 A.

【点睛】 本题考查整式的运算. 熟练掌握相关运算法则，是解题的关键.

3. 如果函数 $y = \frac{1}{2}x + m$ 的图像经过第一、三、四象限，那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > 0$

B. $m \geq 0$

C. $m < 0$

D. $m \leq 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一次函数图象的性质进行求解即可.

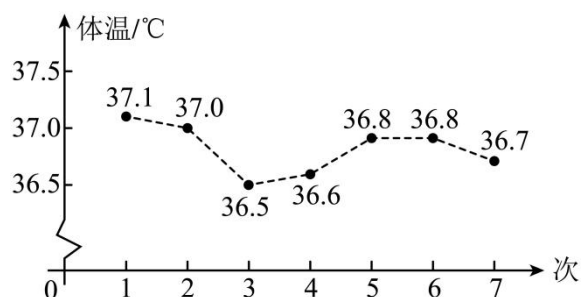
【详解】 解： $\because$ 函数 $y = \frac{1}{2}x + m$ 的图像经过第一、三、四象限，

$\therefore m < 0$,

故选 C.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图象与系数的关系，熟知对于一次函数 $y = kx + b$ ，当 $k > 0$ ， $b > 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、二、三象限，当 $k > 0$ ， $b < 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、三、四象限，当 $k < 0$ ， $b > 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限，当 $k < 0$ ， $b < 0$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 经过第二、三、四象限是解题的关键.

4. 如图是小明某一天测得的 7 次体温情况的折线统计图，下列信息不正确的是 ()



A. 测得的最高体温为 37.1°C

B. 前 3 次测得的体温在下降

C. 这组数据的众数是 36.8

D. 这组数据的中位数是 36.6

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据折线图判断最高体温以及上升下降情况，根据众数、中位数的性质判断即可.

【详解】 解： A、由折线统计图可知，7 次最高体温为 37.1°C ，A 选项正确，不符合题意；

B、由折线统计图可知，前3次体温在下降，B选项正确，不符合题意；

C、由7组数据可知，众数为36.8，C选项正确，不符合题意；

D、根据中位数定义可知，中位数为36.8，D选项错误，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查折线统计图、众数以及中位数的定义，正确读懂统计图，正确理解众数、中位数定义是解题关键，注意必须从大到小或者从小到大排列后再求中位数.

5. 下列命题是真命题的是 ()

A. 四边都相等的四边形是正方形

B. 一组邻边相等的矩形是正方形

C. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方形的判定方法，逐一进行判断即可.

【详解】解：A、四边都相等的四边形是菱形，原命题是假命题，不符合题意；

B、一组邻边相等的矩形是正方形，是真命题，符合题意；

C、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，原命题是假命题，不符合题意；

D、对角线互相垂直且相等的四边形不一定是正方形，原命题是假命题，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查判断命题的真假. 熟练掌握正方形的判定方法，是解题的关键.

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，如果以 A 为圆心 r 为半径的 $\odot A$ 和以 BC 为直径的 $\odot D$ 相交，那么 r 的取值范围 ()

A. $1 < r < 4$

B. $4 < r < 10$

C. $1 < r < 7$

D. $7 < r < 10$

【答案】C

【解析】

【分析】首先利用勾股定理求得两圆的圆心距，然后利用两圆相交时两圆的圆心距和两圆的半径之间的关系求解.

【详解】解：如图，由题意得： $BD = DC = 3$,

$AB = AC = 5$,

由勾股定理得： $AD = 4$,

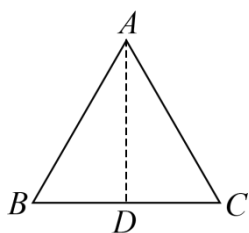
设 $\odot A$ 的半径为 r ,

根据两圆相交得：

$$r-3 < 4 < r+3,$$

解答: $1 < r < 7,$

故选: C.



【点睛】 本题考查两圆之间的位置关系. 熟练掌握两圆之间的位置关系的判定方法, 是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. -8 的立方根是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据立方根的定义进行求解即可得.

【详解】 解: $\because (-2)^3 = -8,$

$\therefore -8$ 的立方根是 $-2,$

故答案为 $-2.$

【点睛】 本题考查了立方根的定义, 熟练掌握立方根的定义是解题的关键.

8. 已知 $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{x},$ 那么 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 将 $\sqrt{2}$ 代入解析式, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{\sqrt{6}}{x},$

$$\therefore f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3};$$

故答案为: $\sqrt{3}.$

【点睛】 本题考查求反比例函数的函数值. 熟练掌握二次根式的除法法则, 是解题的关键.

9. 不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-3 < x \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $1 \leq x < 3$

【解析】

【分析】 分别求出两个不等式的解集，再根据夹逼原则求出不等式组的解集即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \textcircled{1} \\ 2x-3 < x \textcircled{2} \end{cases}$

解不等式①得: $x \geq 1$,

解不等式②得: $x < 3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $1 \leq x < 3$,

故答案为: $1 \leq x < 3$.

【点睛】 本题主要考查了解一元一次不等式组，正确求出每个不等式的解集是解题的关键.

10. 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先把方程两边平方，使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$ ，解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，结合二次根式的性质，去掉增根，即可得到答案.

【详解】 方程两边平方得: $x+2 = x^2$

$\therefore x_1 = 2$, $x_2 = -1$

$\because \sqrt{x+2} \geq 0$

$\therefore \sqrt{x+2} = x \geq 0$

$\therefore x_2 = -1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$

故答案为: $x = 2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】 根据方程没有实数根，得到 $\Delta < 0$ ，进行求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) < 0,$$

解得： $m < -1$ ；

故答案为： $m < -1$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根与判别式的关系. 熟练掌握 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根，是解题的关键.

12. 已知一个反比例函数图像经过点 $P(-2, 3)$ ，则该反比例函数的图像在各自的象限内，函数值 y 随自变量 x 的值逐渐增大而_____. (填“增大”或“减小”)

【答案】 增大

【解析】

【分析】 求出反比例函数的解析式，即可得出结论.

【详解】 解： 设反比例函数的解析式为： $y = \frac{k}{x}$ ，

$\because$ 反比例函数图像经过点 $P(-2, 3)$ ，

$$\therefore k = -2 \times 3 = -6 < 0,$$

$\therefore$ 该反比例函数的图像在各自的象限内，函数值 y 随自变量 x 的值逐渐增大而增大；

故答案为： 增大.

【点睛】 本题考查反比例函数的图象和性质. 正确的求出反比例函数的解析式，是解题的关键.

13. 在六张卡片上分别写有 6 ， $-\frac{22}{7}$ ， 3.1415 ， $\sqrt{3}$ ， 0 ， $\sin 45^\circ$ 六个数，从中随机抽取一张，卡片上的数为无理数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先求出无理数的个数，再根据概率公式进行计算即可.

【详解】 解： $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore 6$ ， $-\frac{22}{7}$ ， 3.1415 ， $\sqrt{3}$ ， 0 ， $\sin 45^\circ$ 六个数中 $\sqrt{3}$ ， $\sin 45^\circ$ 是无理数，共 2 个；

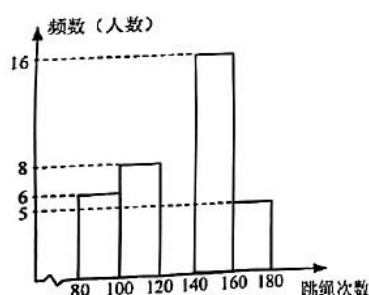
随机抽取一张卡片，共有 6 种等可能的结果，其中卡片上的数为无理数，有 2 种等可能的结果，

$$\therefore P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查概率. 熟记特殊角的三角函数值，掌握无理数的定义，概率公式，是解题的关键.

14. 为了进一步了解某校九年级学生的体能情况，随机抽取 50 名学生进行 1 分钟跳绳次数测试，以测试数据为样本，绘制成不完整的频数分布直方图（如图所示）（每组数据含最小值，不含最大值），若该校九年级共有 450 名学生，那么一分钟跳绳次数在 120 ~ 140 次的人数是_____.



【答案】 135

【解析】

【分析】 利用 $450 \times$ 样本中一分钟跳绳次数在 120 ~ 140 次的频率，进行求解即可.

【详解】 解: $450 \times \frac{(50-6-8-16-5)}{50} = 135$ (人);

故答案为: 135.

【点睛】 本题考查利用样本估计总数. 熟练掌握频率等于频数除以总数，是解题的关键.

15. 正八边形的每个外角为_____度.

【答案】 45

【解析】

【分析】 根据正多边形的每个外角相等且外角和等于 360 度列式计算即可.

【详解】 解: $\because$ 正多边形

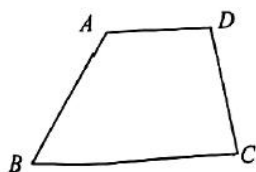
$\therefore$ 有 8 个相等的外角且外角和为 360°

$\therefore$ 正八边形的每个外角为 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$.

故答案为 45.

【点睛】 本题主要考查了正多边形的外角的性质和多边形的外角和定理，掌握正多边形的每个外角都相等且外角和为 360° 是解答本题的关键.

16. 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{DC}$ 可用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

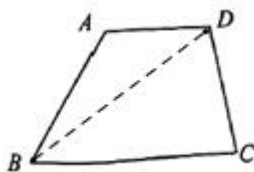


【答案】 $\vec{b} + \vec{a}$

【解析】

【分析】 连接 BD , 利用三角形法则, 进行求解即可.

【详解】 解: 连接 BD ,



则: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$,

$\because AD \parallel BC$, $BC = 2AD$,

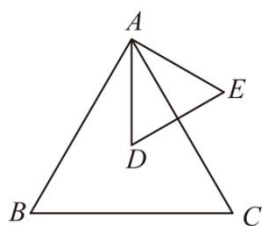
$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = 2\vec{b} - (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} + \vec{a}$;

故答案为: $\vec{b} + \vec{a}$.

【点睛】 本题考查向量的线性计算. 熟练掌握三角形法则, 是解题的关键.

17. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形, 点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} =$ _____.



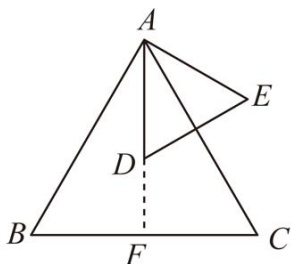
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 如图, 延长 AD 交 BC 于 F , 由题意得 $AD = \frac{2}{3}AF$, $AF = AB \cdot \sin \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, 则 $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}AB$,

由 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，可得 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ ，计算求解即可。

【详解】解：如图，延长 AD 交 BC 于 F ，



$\because$ 点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AD = \frac{2}{3} AF,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AF = AB \cdot \sin \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{3} AB,$$

$\because \triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 都是等边三角形，

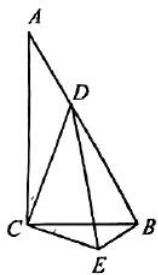
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查了重心，等边三角形的性质，正弦，相似三角形的判定与性质．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

18. 如图，已知在两个直角顶点重合的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $\angle CAB = \angle CDE = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ， $CE = 2$ ，将 $\triangle CDE$ 绕着点 C 顺时针旋转，当点 D 恰好落在 AB 边上时，联结 BE ，那么 $BE =$ _____.



【答案】 $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$

【解析】

【分析】利用含 30° 度角的直角三角形的性质，分别求出 AB, DE 的长，证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ，得到

$\frac{AD}{BE} = \sqrt{3}$ ，推出 $\angle DBE = 90^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 中，利用勾股定理进行求解即可。

【详解】解： $\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ， $\angle CAB = \angle CDE = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ， $CE = 2$ ，

$$\therefore AB = 2BC = 6, DE = 2CE = 4, \angle ABC = 60^\circ, \tan 30^\circ = \frac{CE}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\angle ACD = \angle BCE = 90^\circ - \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \sqrt{3}, \angle CBE = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则: } AD = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 6 - \sqrt{3}x,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle DBE \text{ 中, } DE^2 = BE^2 + BD^2, \text{ 即: } 4^2 = x^2 + (6 - \sqrt{3}x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \text{ 或 } x = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \text{ (不合题意, 舍去);}$$

$$\therefore BE = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}.$$

【点睛】本题考查含 30° 度的直角三角形，锐角三角函数，相似三角形的判定和性质，勾股定理，解一元二次方程。熟练掌握相关知识点，证明三角形相似，是解题的关键。

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \pi^0 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} - 8^{\frac{1}{2}}$

【答案】 5

【解析】

【分析】先进行正整数指数幂，零指数幂，分数指数幂以及分母有理化的计算，再进行加减运算。

【详解】解：原式 $= 4 - 1 + 2(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2}$

$$= 4 - 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2}$$

$$= 5.$$

【点睛】本题考查二次根式的混合运算. 解题的关键是掌握相关运算法则, 正确的计算.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 2x - y = 6 & \text{①} \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】利用代入消元法, 将方程组转化为一元二次方程, 进行求解即可.

【详解】解: 由①得: $y = 2x - 6$,

把 $y = 2x - 6$ 代入②得: $x^2 - x(2x - 6) - 2(2x - 6)^2 = 0$,

整理, 得: $x^2 - 6x + 8 = 0$,

解得: $x_1 = 2, x_2 = 4$;

当 $x = 2$ 时, $y = 2 \times 2 - 6 = -2$;

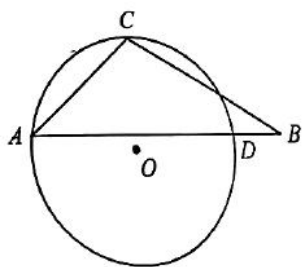
当 $x = 4$ 时, $y = 2 \times 4 - 6 = 2$;

$\therefore$ 方程组的解为:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查解二元二次方程组. 熟练掌握消元法以及因式分解法解一元二次方程, 是解题的关键.

21. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{21}$, $BC = 6$, $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 C , 交 AB 边于点 D ,

$AD = 4\sqrt{3}$, 点 C 是 $\widehat{AD}$ 的中点.



(1) 求 $\odot O$ 的半径长;

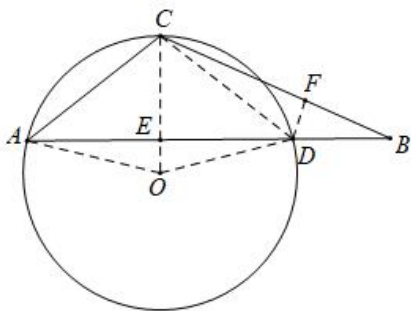
(2) 联结 DC , 求 $\sin \angle BCD$.

解：由 (1) 知： $CE = 3, CE \perp AD$,

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 3\sqrt{3} ,$$

$$\therefore BD = BE - DE = \sqrt{3} ,$$

过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



则 $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot CE = \frac{1}{2} BC \cdot DF$, 即： $\sqrt{3} \times 3 = 6DF$,

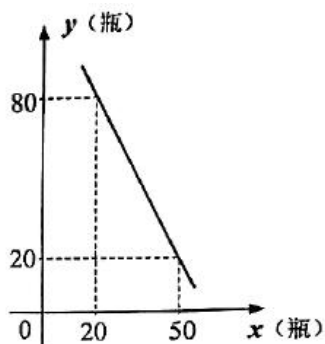
$$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

由 (1) 知： $CD = AC = \sqrt{21}$,

$$\therefore \sin \angle BCD = \frac{DF}{CD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{14} .$$

【点睛】 本题考查弧，弦，圆心角的关系，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，解直角三角形．熟练掌握等弧对等弦对等角，是解题的关键．

22. 在疫情防控常态化的背景下，某学校为了定期做好专用教室的消毒工作，计划购买甲、乙两种类型的消毒剂，预计购进乙种类型消毒剂的数量 y (瓶) 与甲种类型消毒剂的数量 x (瓶) 之间的函数关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式 (不必写出自变量 x 的取值范围);

(2) 该学校用 2100 元选购了甲种类型的消毒剂，用 2400 元选购了乙种类型的消毒剂，甲种消毒剂的单价

比乙种消毒剂的单价贵 30 元，求选购的甲、乙消毒剂的数量.

【答案】(1) $y = -2x + 120$

(2) 选购的甲、乙消毒剂的数量分别为 30 瓶，60 瓶

【解析】

【分析】(1) 设出函数解析式，根据图象，利用待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 设乙种消毒剂的单价为 a 元，甲种消毒剂的单价为 $(a + 30)$ 元，根据两种消毒剂的数量关系，列出分式方程，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 y 关于 x 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

由图象可知，图象过点 $(20, 80), (50, 20)$,

$$\therefore \begin{cases} 80 = 20k + b \\ 20 = 50k + b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 120 \end{cases},$$

$$\therefore y = -2x + 120;$$

【小问 2 详解】

解：设乙种消毒剂的单价为 a 元，甲种消毒剂的单价为 $(a + 30)$ 元，由题意，得： $\frac{2400}{a} = -2 \times \frac{2100}{a + 30} + 120$,

整理，得： $a^2 - 25a - 600 = 0$

解得： $a = 40$ (负值已舍掉)，

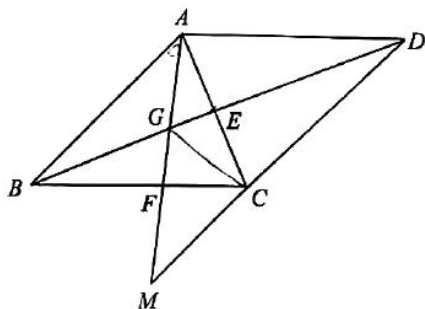
经检验， $a = 40$ 是原方程的解，

$\therefore$ 乙种消毒剂的单价为 40 元，甲种消毒剂的单价为 $40 + 30 = 70$ 元，

$\therefore$ 甲消毒剂的数量为 $\frac{2100}{70} = 30$ 瓶，乙消毒剂的数量为 $\frac{2400}{40} = 60$ 瓶.

【点睛】本题考查一次函数的实际应用，分式方程的应用. 解题的关键是正确的求出函数解析式，列出分式方程.

23. 已知：如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于 E ， M 是边 DC 延长线上的一点，联结 AM ，与边 BC 交于 F ，与对角线 BD 交于点 G .



(1) 求证: $AG^2 = GF \cdot GM$;

(2) 联结 CG , 如果 $\angle BAG = \angle BCG$, 求证: 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AGB \sim \triangle MGD$, 得到 $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GD}$, 证明 $\triangle AGD \sim \triangle FGB$, 得到 $\frac{FG}{GA} = \frac{BG}{GD}$, 进而得到 $\frac{FG}{GA} = \frac{AG}{GM}$, 即可得证;

(2) 证明 $\triangle CGF \sim \triangle MGC$, 推出 $AG = CG$, 进而得到 $BD \perp AC$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD$,

$\therefore \triangle AGB \sim \triangle MGD, \triangle AGD \sim \triangle FGB$,

$$\therefore \frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GD}, \frac{FG}{GA} = \frac{BG}{GD},$$

$$\therefore \frac{FG}{GA} = \frac{AG}{GM},$$

$$\therefore AG^2 = GF \cdot GM;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because AB \parallel DM$,

$$\therefore \angle BAG = \angle CMG,$$

$$\therefore \angle BAG = \angle BCG,$$

$$\therefore \angle CMG = \angle BCG,$$

$$\therefore \angle MGC = \angle CGF,$$

$$\therefore \triangle CGF \sim \triangle MGC,$$

$$\therefore \frac{CG}{MG} = \frac{FG}{CG},$$

$$\therefore CG^2 = MG \cdot FG,$$

$$\therefore AG^2 = GF \cdot GM,$$

$$\therefore AG = CG,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于 E ,

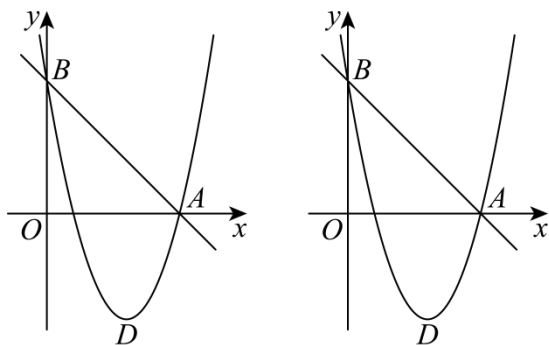
$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore GE \perp AC, \text{ 即: } BD \perp AC,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

【点睛】本题考查平行四边形的性质, 相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 菱形的判定. 本题的综合性较强, 解题的关键是证明三角形相似.

24. 如图, 在直角坐标平面 xOy 中, 直线 $y = -x + 5$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点, 点 D 是抛物线的顶点.



备用图

(1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标;

(2) 抛物线与 x 轴的另一个交点为 C , 点 $M\left(a, -\frac{7}{4}\right)$ 在抛物线对称轴左侧的图象上, 将抛物线向上平移 m

个单位 ($m > 0$), 使点 M 落在 $\triangle ABC$ 内, 求 m 的取值范围;

(3) 对称轴与直线 AB 交于点 E , P 是线段 AB 上的一个动点 (P 不与 E 重合), 过 P 作 y 轴的平行线交原抛物线于点 Q , 当 $PE = QD$ 时, 求点 Q 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$, $D(3, -4)$

$$(2) \frac{7}{4} < m < \frac{7}{2}$$

$$(3) Q(2, -3) \text{ 或 } Q(4, -3)$$

【解析】

【分析】(1) 先求出 A 、 B 的坐标, 再把 A 、 B 坐标代入抛物线解析式中求出抛物线解析式, 再把抛物线解

析式化为顶点式求出点 D 的坐标即可;

(2) 先求出点 M 的坐标, 进而求出在 $y = -x + 5$ 中, 当 $x = a$ 时, y 的值即可得到答案;

(3) 如图 1 所示, 当点 P 在点 E 左侧时, 设原抛物线对称轴与 x 轴交于点 H , 过点 Q 作 $QT \parallel PE$ 交 DE 于 T , 证明四边形 $PQTE$ 是平行四边形, 推出 $QT = QD$; 再证明 $\angle QTD = \angle PED = 135^\circ$, 推出此时不可能存在 $QT = QD$ (当点 T 在点 D 下方时, 同样可证明不存在), 则此时只有点 T 与点 D 重合, 设 $P(m, -m + 5)$, 则 $Q(m, m^2 - 6m + 5)$, 求出 $E(3, 2)$, 由平行四边形对角线中点坐标相同可知

$\frac{-m + 5 - 4}{2} = \frac{2 + m^2 - 6m + 5}{2}$, 解方程即可; 如图 2 所示, 当点 P 在点 E 右侧时, 由对称性可知当 $m = 4$ 时符合题意.

【小问 1 详解】

解: 在 $y = -x + 5$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = 5$, 令 $y = 0$, 则 $x = 5$,

$\therefore A(5, 0), B(0, 5)$,

把 $A(5, 0), B(0, 5)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 中得:
$$\begin{cases} 25 + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{cases},$$

$\therefore \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases},$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$,

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(3, -4)$;

【小问 2 详解】

解: 在 $y = x^2 - 6x + 5$ 中, 当 $y = -\frac{7}{4}$ 时, 则 $x^2 - 6x + 5 = -\frac{7}{4}$,

解得 $x = \frac{9}{2}$ 或 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 $M\left(a, -\frac{7}{4}\right)$ 在抛物线对称轴左侧的图像上,

$\therefore M\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$,

在 $y = -x + 5$ 中, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $y = \frac{7}{2}$,

$\therefore$ 将抛物线向上平移 m 个单位 ($m > 0$), 使点 M 落在 $\triangle ABC$ 内,

$$\therefore \frac{7}{4} < m < \frac{7}{2};$$

【小问 3 详解】

解：如图 1 所示，当点 P 在点 E 左侧时，设原抛物线对称轴与 x 轴交于点 H ，过点 Q 作 $QT \parallel PE$ 交 DE 于 T ，

$$\therefore PQ \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore PQ \parallel ET,$$

$\therefore$ 四边形 $PQTE$ 是平行四边形，

$$\therefore PE = QT,$$

$$\therefore PE = QD,$$

$$\therefore QT = QD;$$

$$\therefore A(5,0), B(0,5),$$

$$\therefore OA = OB = 5,$$

$$\therefore \angle OBA = 45^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel OB,$$

$$\therefore \angle QTD = \angle PED = 135^\circ,$$

$\therefore$ 此时不可能存在 $QT = QD$ （当点 T 在点 D 下方时，同样可证明不存在），则此时只有点 T 与点 D 重合，

$$\text{设 } P(m, -m+5), \text{ 则 } Q(m, m^2-6m+5),$$

在 $y = -x + 5$ 中，当 $x = 3$ 时， $y = 2$ ，

$$\therefore E(3,2),$$

$$\text{由平行四边形对角线中点坐标相同可知 } \frac{-m+5-4}{2} = \frac{2+m^2-6m+5}{2},$$

解得 $m = 2$ 或 $m = 3$ （舍去），

$$\therefore Q(2, -3);$$

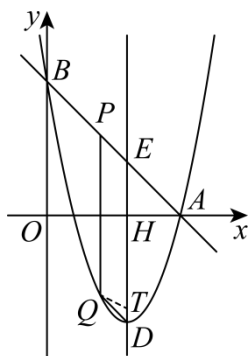


图1

如图2所示, 当点 P 在点 E 右侧时, 由对称性可知当 $m = 4$ 时符合题意,

$\therefore Q(4, -3)$;

综上所述, 点 Q 的坐标为 $Q(2, -3)$ 或 $Q(4, -3)$.

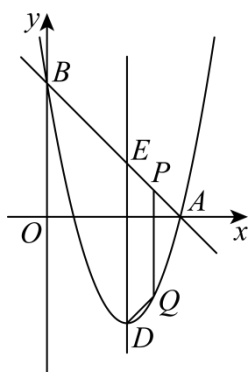
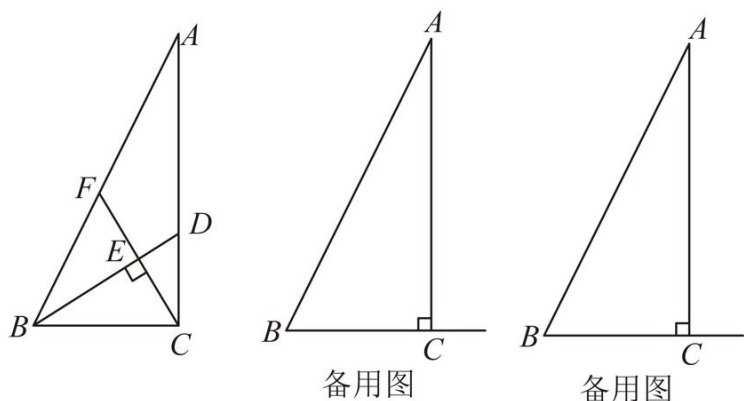


图2

【点睛】 本题主要考查了二次函数综合, 一次函数与几何综合, 平行四边形的性质, 二次函数图象的平移等等, 灵活运用所学知识是解题的关键.

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 3$. 点 D 是边 AC 上一动点 (不与 A 、 C 重合), 联结 BD , 过点 C 作 $CF \perp BD$, 分别交 BD 、 AB 于点 E 、 F .



(1) 当 $CD = 2$ 时, 求 $\angle ACF$ 的正切值;

(2) 设 $CD = x$, $\frac{AF}{BF} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的定义域;

(3) 联结 FD 并延长, 与边 BC 的延长线相交于点 G , 若 $\triangle DGC$ 与 $\triangle BAC$ 相似, 求 $\frac{AF}{BF}$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{2}{3}$

(2) $y = \frac{2}{3}x (0 < x < 6)$

(3) $\sqrt{5}-1$ 或 $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据同角的余角相等分析可得 $\angle ACF = \angle DBC$, 然后根据正切的概念求解;

(2) 过点 F 作 $FM \perp AC$, $FN \perp BC$, 然后结合角的正切值及三角形的面积比分析求解;

(3) 分情况讨论, 通过证明 $\triangle ABC \sim \triangle GBF$ 和利用点 F, B, C, D 四点共圆以及相似三角形的性质分析求解.

【小问 1 详解】

解: $\because CF \perp BD$, $\angle ACB = 90^\circ$,

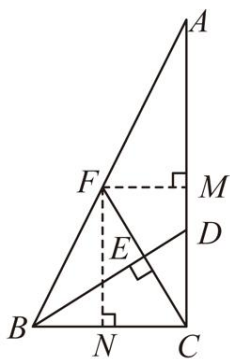
$\therefore \angle ACF + \angle BCF = \angle DBC + \angle BCF = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACF = \angle DBC$,

$\therefore \tan \angle ACF = \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3}$;

【小问 2 详解】

过点 F 作 $FM \perp AC$, $FN \perp BC$,



$\because CF \perp BD$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACF + \angle BCF = \angle BDC + \angle ACF = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCF = \angle BDC$,

$\therefore \tan \angle BCF = \tan \angle BDC = \frac{BC}{DC} = \frac{3}{x}$,

设 $\triangle ACF$ 的 AF 边上的高为 h , 则 $\triangle BCF$ 的 BF 边上的高为 h ,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{\frac{1}{2}AF \cdot h}{\frac{1}{2}BF \cdot h} = \frac{AF}{BF} = y,$$

又 $\because FM \perp AC$, $FN \perp BC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle FMC = \angle FNC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $FNCM$ 是矩形,

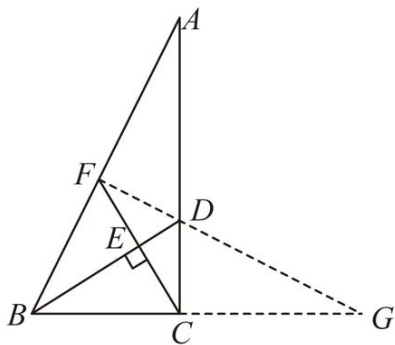
$\therefore FM = NC$,

$$\therefore \tan \angle BCF = \frac{FN}{NC} = \frac{FN}{FM} = \frac{3}{x},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot FM}{\frac{1}{2}BC \cdot FN} = \frac{AC \cdot FM}{BC \cdot FN} = \frac{6}{3} \cdot \frac{x}{3} = \frac{2}{3}x, \text{ 即 } y = \frac{2}{3}x (0 < x < 6);$$

【小问 3 详解】

如图:



①当 $\triangle DGC \sim \triangle BAC$ 时, $\angle A = \angle G$,

又 $\because \angle ABC = \angle GBF$,

$\therefore \triangle BGF \sim \triangle BAC$,

$\therefore \angle BFG = \angle BCA = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 F, B, C, D 四点共圆, 且 BD 为直径,

又 $\because BD \perp CF$,

$\therefore DF = DC$, $BF = BC = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 3\sqrt{5}$,

$\therefore AF = AB - BF = 3\sqrt{5} - 3$,

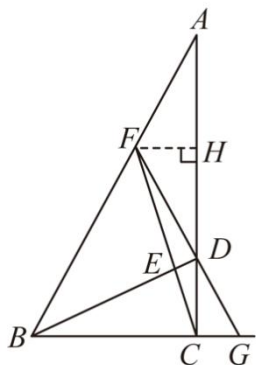
$$\text{即 } \frac{AF}{BF} = \frac{3\sqrt{5} - 3}{3} = \sqrt{5} - 1.$$

②当 $\triangle DGC \sim \triangle ABC$ 时, $\angle A = \angle CDG$,

又 $\because \angle ADF = \angle CDG$,

$\therefore \angle ADF = \angle A$,

过点 F 作 $FH \perp AC$,



$$\therefore AH = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(6-x),$$

$\because FH \perp AC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore FH \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}(6-x)}{6 - \frac{1}{2}(6-x)} = \frac{2}{3}x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{-15 \pm 3\sqrt{41}}{4} \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{2}{3} \times \frac{-15 + 3\sqrt{41}}{4} = \frac{\sqrt{41} - 5}{2},$$

综上, $\frac{AF}{BF}$ 的值为 $\sqrt{5} - 1$ 或 $\frac{\sqrt{41} - 5}{2}$.

【点睛】 本题考查余角的性质, 锐角三角函数, 相似三角形的性质, 理解正切的概念, 掌握相似三角形的性质, 准确添加辅助线是解题关键.

