

2022 学年第二学期期中混合式教学适应性练习

九年级数学练习卷

考生注意:

1. 本试卷共 25 题.
2. 试卷满分 150 分. 考试时间 100 分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^3 = a^6$ B. $a^2 + a^3 = a^5$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(a^3)^2 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项, 同底数幂乘法和幂的乘方计算法则求解判断即可.

【详解】解: A、 a^2 与 a^3 不是同类项, 不能合并, 原式计算错误, 不符合题意;

B、 a^2 与 a^3 不是同类项, 不能合并, 原式计算错误, 不符合题意;

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 原式计算错误, 不符合题意;

D、 $(a^3)^2 = a^6$, 原式计算正确, 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题主要考查了合并同类项, 同底数幂乘法和幂的乘方, 熟知相关计算法则是解题的关键.

2. 估计 $\sqrt{5}$ 的值在 ()

- A. 1 和 2 之间 B. 2 和 3 之间 C. 3 和 4 之间 D. 4 和 5 之间

【答案】B

【解析】

【分析】根据无理数的估算方法计算即可.

【详解】 $\because 4 < 5 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$\therefore \sqrt{5}$ 的值在 2 和 3 之间,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查无理数的估算, 掌握无理数的估算方法是解题的关键.

3. 如果一个三角形的两边长分别为 5cm、10cm, 那么这个三角形的第三边的长可以是 ()

- A. 3cm B. 5cm C. 10cm D. 16cm

【答案】 C

【解析】

【分析】 利用三角形的三边关系求出第三边的取值范围, 进而可作出选择.

【详解】 解: 设这个三角形的第三边长为 x cm,

则 $10 - 5 < x < 10 + 5$, 即 $5 < x < 15$,

选项 C 中的 10cm 满足条件,

故选: C.

【点睛】 本题考查三角形的三边关系, 会利用三角形的三边关系求得第三边的取值范围是解答的关键.

4. 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 CA 、 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $DE:BC = 1:3$, 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{CD}$ 用向量 $\vec{a}$ 表示为 ()

- A. $3\vec{a}$ B. $-3\vec{a}$ C. $4\vec{a}$ D. $-4\vec{a}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 从而推出 $AC = 3AD$, 则 $CD = 4AD$, 由 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, 可得 $\overrightarrow{CD} = -4\vec{a}$.

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

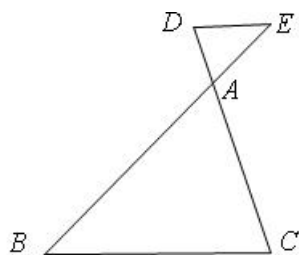
$$\therefore AC = 3AD,$$

$$\therefore CD = 4AD,$$

$$\because \overrightarrow{DA} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = -4\vec{a},$$

故选 D.



【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 向量的计算, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 从而推出 $AC = 3AD$ 是解题的关键.

5. 在研究反比例函数的图象时, 小明想通过列表、描点的方法画出反比例函数的图像, 但是在作图时, 小明发现计算有错误, 四个点中有一个不在该函数图像上, 那么这个点是 ()

x		-2	$-\frac{1}{2}$	1	2	...
y	...	-1	4	-2	-1	...

- A. $(-2, -1)$ B. $(-\frac{1}{2}, 4)$ C. $(1, -2)$ D. $(2, -1)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据在反比例函数图象上的点横纵坐标的乘积相同进行求解即可.

【详解】解: $\because (-2) \times (-1) = 2, (-\frac{1}{2}) \times 4 = -2, (-2) \times 1 = -2, 2 \times (-1) = -2,$

$\therefore (-\frac{1}{2}, 4), (1, -2), (2, -1)$ 这三个点的横纵坐标的乘积相同, 即这三个点在同一个反比例函数图象上,

点 $(-2, -1)$ 与这三个点不在同一个反比例函数图象上,

故选 A.

【点睛】本题主要考查了反比例函数图象上的点的特点, 熟知在反比例函数图象上的点横纵坐标的乘积相同是解题的关键.

6. 已知点 A、B、C 在圆 O 上, 那么下列命题为真命题的是 ()

- A. 如果半径 OB 平分弦 AC, 那么四边形 OABC 是平行四边形
B. 如果弦 AC 平分半径 OB, 那么四边形 OABC 是平行四边形

- C. 如果四边形 $OABC$ 是平行四边形, 那么 $\angle AOC = 120^\circ$
 D. 如果 $\angle AOC = 120^\circ$, 那么四边形 $OABC$ 是平行四边形

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质与判定, 圆周角定理, 圆内接四边形的性质逐一判定即可.

【详解】解: A、如图 1 所示, 当 AC 是直径时, 满足半径 OB 平分弦 AC , 但是 O 、 A 、 B 、 C 不能构成四边形, 故原命题是假命题, 不符合题意;

B、如图 2 所示, $\because$ 弦 AC 平分半径 OB , 但是半径 OB 并不一定平分弦 AC , $\therefore$ 四边形 $OABC$ 不一定是平行四边形, 故原命题是假命题, 不符合题意;

C、如图 2 所示, $\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ABC = \angle AOC = 2\angle ADC,$$

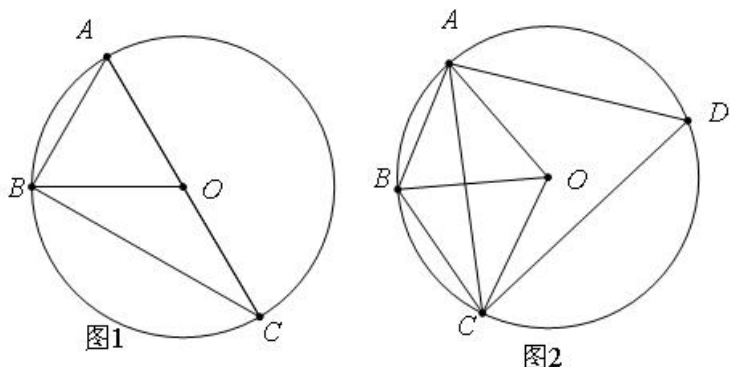
$$\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AOC = 120^\circ,$$

$\therefore$ 原命题是真命题, 符合题意;

D、如图 2 所示, 当点 B 在点 D 的位置时, 满足 $\angle AOC = 120^\circ$, 但是四边形 $OABC$ 不是平行四边形, 故原命题是假命题, 不符合题意;

故选 C.



【点睛】本题主要考查了判断命题真假, 圆周角定理, 垂径定理, 圆内接四边形的性质, 平行四边形的性质与判定, 灵活运用所学知识是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 请将结果直接填入答题纸的相应位置上.

7. 计算: $\sqrt{(-2)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】2

【解析】

【分析】直接利用二次根式的性质化简得出答案.

【详解】解： $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2$.

故答案为： 2 .

【点睛】 此题主要考查了二次根式的性质与化简， 正确化简二次根式是解题关键.

8. 分解因式： $-2x^2 + 8 =$ _____ .

【答案】 $-2(x+2)(x-2)$

【解析】

【分析】 先提公因式， 然后再利用平方差公式可进行求解.

【详解】 解： $-2x^2 + 8 = -2(x^2 - 4) = -2(x+2)(x-2)$;

故答案为： $-2(x+2)(x-2)$.

【点睛】 本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解， 一个多项式有公因式首先提取公因式， 然后再用其他方法进行因式分解， 同时因式分解要彻底， 直到不能分解为止.

9. 若分式 $\frac{1}{x-3}$ 有意义， 则 x 的取值范围是 ____ .

【答案】 $x \neq 3$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件， 分母不为 0， 即可求解

【详解】 $\because$ 若分式 $\frac{1}{x-3}$ 有意义，

$\therefore x$ 的取值范围是 $x \neq 3$,

故答案为： $x \neq 3$

【点睛】 本题考查了分式有意义的条件， 理解分式有意义的条件是解题的关键.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 有两个相等的实数根， 那么 $m =$ _____

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据一元二次方程有两个相等实数根时判别式等于 0， 列方程求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 0$,

$\therefore m = -1$.

故答案为 -1 .

【点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式，当 $\Delta > 0$ 时，原方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，原方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，原方程没有实数根.

11. 在平面直角坐标系中，若点 $P(x-3, x)$ 在第二象限，则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $0 < x < 3$

【解析】

【分析】先根据第二象限内点坐标符号规律可得关于一个 x 的不等式组，再解不等式组即可.

【详解】在平面直角坐标系中，第二象限内点坐标符号：横坐标为负，纵坐标为正，

$$\text{则} \begin{cases} x-3 < 0 \\ x > 0 \end{cases},$$

解得 $0 < x < 3$,

故答案为： $0 < x < 3$.

【点睛】本题考查了在平面直角坐标系中，第二象限内点坐标符号规律等知识点，熟练掌握象限内点坐标规律是解题关键.

12. 一个不透明的袋子里装有3个白球和1个红球，这些小球除颜色外无其他差别，如果从袋子中随机摸出一个小球，那么摸出的小球是红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ ## 0.25

【解析】

【分析】用红球的个数除以球的总个数即可.

【详解】解：从袋子中随机摸出一个小球共有4种等可能结果，其中摸出的小球是红球的有1种结果，

$\therefore$ 摸出的小球是红球的概率为 $\frac{1}{4}$,

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题主要考查概率公式，随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件} A \text{ 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

13. 已知一次函数 $y = 3x + m$ 的图像经过点 $(-1, 1)$ ，那么 $m =$ _____.

【答案】4

【解析】

【分析】直接把 $(-1, 1)$ 代入到一次函数解析式中求出 m 的值即可.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = 3x + m$ 的图像经过点 $(-1, 1)$,

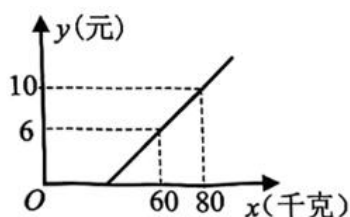
$$\therefore -1 \times 3 + m = 1,$$

解得 $m = 4$,

故答案为: 4.

【点睛】本题主要考查了求一次函数解析式, 熟知待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

14. 某地长途汽车客运公司规定: 旅客可免费随身携带一定重量的行李, 如果行李超过规定重量, 则需要购买行李票. 行李票费用 y (元) 是行李重量 x (千克) 的一次函数, 其图像如图所示, 那么旅客最多可免费携带行李_____千克.



【答案】 30

【解析】

【分析】根据待定系数法求函数关系式, 旅客可免费携带行李, 即 $y = 0$, 代入所求得的函数关系式, 即可知质量为多少.

【详解】解: 设一次函数关系式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 当 $x = 60$ 时, $y = 6$, 当 $x = 80$ 时, $y = 10$,

$$\therefore \begin{cases} 60k + b = 6 \\ 80k + b = 10 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{5} \\ b = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 所求函数关系式为 $y = \frac{1}{5}x - 6 (x \geq 30)$;

当 $y = 0$ 时, $\frac{1}{5}x - 6 = 0$,

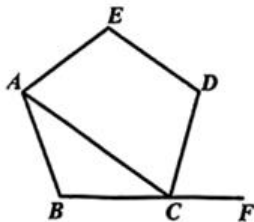
所以 $x = 30$,

故旅客最多可免费携带 30 千克行李.

故选: 30.

【点睛】本题考查函数的图象和用待定系数法求一次函数关系式, 并会用一次函数研究实际问题, 具备在直角坐标系中的读图能力. 注意自变量的取值范围不能遗漏.

15. 如图, 在正五边形 $ABCDE$ 中, F 是边 BC 延长线上一点, 连接 AC , 那么 $\angle ACF$ 的度数为_____.



【答案】 144° ##144 度

【解析】

【分析】 利用正多边形的内角和定理计算得出 $\angle B = 108^\circ$ ，再利用等边对等角求得 $\angle ACB = 36^\circ$ ，利用邻补角关系即可求解.

【详解】 解： $\angle B = \frac{1}{5}(5-2) \times 180^\circ = 108^\circ$ ，

$\therefore AB = BC$ ，

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$ ，

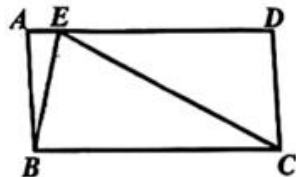
$\therefore \angle ACF = 180^\circ - \angle ACB = 144^\circ$ ，

故答案为： 144° .

【点睛】 本题主要考查正多边形的性质、三角形内角和定理，熟练掌握正多边形的性质、三角形的内角和定理是解决本题的关键.

16. 如图，已知点 E 在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上，且 $BC = EC = 8$ ， $\angle ABE = 15^\circ$ ，那么 AB 的长等于

_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 利用余角的性质求得 $\angle AEB = \angle EBC = 75^\circ$ ，利用等边对等角求得 $\angle CEB = \angle EBC = 75^\circ$ ，再利用平角的定义求得 $\angle CED = 30^\circ$ ，根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle D = 90^\circ$ ， $AB = CD$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ABE = 15^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle EBC = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ ，

$\therefore BC = EC$ ，

$$\begin{aligned}\therefore \angle CEB &= \angle EBC = 75^\circ, \\ \therefore \angle CED &= 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ, \\ \therefore BC &= EC = 8, \\ \therefore CD &= \frac{1}{2}CE = 4, \\ \therefore AB &= 4,\end{aligned}$$

故答案为：4.

【点睛】本题考查了矩形的性质，等边对等角，含 30° 度角的直角三角形的性质，掌握“ 30° 度角对应的直角边长度为斜边长度的一半”是解题的关键.

17. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ，如果将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转到 $\triangle A'B'C$ ，使点 B 的对应点 B' 落在边 AC 上，那么 $\angle AA'B'$ 的度数是_____.



【答案】 20° ## 20° 度

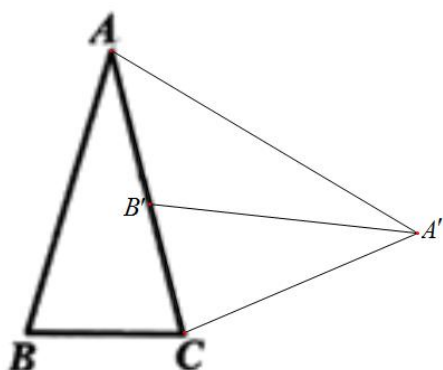
【解析】

【分析】根据旋转可得 $\angle B'A'C = \angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle A'CA = \angle ACB = 80^\circ$ ， $A'C = AC$ ，等边对等角得 $\angle CAA' = \angle CA'A = 50^\circ$ ，根据 $\angle AA'B' = \angle CA'A - \angle B'A'C$ 即可求解.

【详解】解： $\because \angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ.$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转到 $\triangle A'B'C$ ，使点 B 的对应点 B' 落在边 AC 上，



$$\therefore \angle B'A'C = \angle BAC = 30^\circ, \quad \angle A'CA = \angle ACB = 80^\circ, \quad A'C = AC,$$

$$\therefore \angle CAA' = \angle CA'A = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle AA'B' = \angle CA'A - \angle B'A'C = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ.$$

故答案为： 20° .

【点睛】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理等知识，掌握旋转的性质是关键.

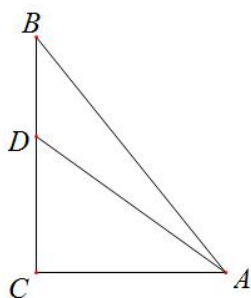
18. 如果一个三角形的两个内角 α 与 β 满足 $2\alpha + \beta = 90^\circ$ ，那么我们称这样的三角形为“倍角互余三角形”. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ，点 D 在边 BC 上，且 $\triangle ABD$ 是“倍角互余三角形”，那么 BD 的长等于_____.

【答案】 $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{41-4\sqrt{41}}{5}$.

【解析】

【分析】 分两种情况讨论，当 $\angle B = \angle CAD$ 时，利用 $\tan \angle DAC = \tan \angle B$ ，列式计算即可求解；当 $\angle BAD = \angle CAD$ 时，即 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，利用角平分线的性质以及勾股定理即可求解.

【详解】 解：当 $\angle B = \angle CAD$ 时， $\angle B + \angle CAD + \angle BAD = 90^\circ$ ，即 $2\angle B + \angle BAD = 90^\circ$ ， $\triangle ABD$ 是“倍角互余三角形”，



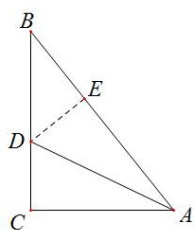
$$\text{则 } \tan \angle DAC = \tan \angle B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{4} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore CD = \frac{16}{5}$$

$$\therefore BD = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5};$$

当 $\angle BAD = \angle CAD$ 时， $\angle B + \angle CAD + \angle BAD = 90^\circ$ ，即 $\angle B + 2\angle BAD = 90^\circ$ ， $\triangle ABD$ 是“倍角互余三角形”，此时 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，



作 $DE \perp AB$ 于 E ，则 $DC = DE$ ，

$\because AD = AD, \therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADE (\text{HL}), \therefore AE = AC = 4,$

$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 5, \therefore AB = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}, \therefore BE = \sqrt{41} - 4,$

设 $BD = x$, 则 $CD = DE = 5 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 由勾股定理得 $(\sqrt{41} - 4)^2 + (5 - x)^2 = x^2$, 解得

$$x = \frac{41 - 4\sqrt{41}}{5}.$$

综上, BD 的长等于 $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{41 - 4\sqrt{41}}{5}$.

故答案为: $\frac{9}{5}$ 或 $\frac{41 - 4\sqrt{41}}{5}$.

【点睛】 本题考查了正切函数的定义, 角平分线的性质以及勾股定理, 分情况讨论是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - |\sqrt{2} - 3| + \frac{1}{2\sin 45^\circ - 1}.$

【答案】 $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据负分数指数幂、特殊角的三角函数值, 二次根式的混合运算, 即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - |\sqrt{2} - 3| + \frac{1}{2\sin 45^\circ - 1} \\ &= \frac{3}{2} - (3 - \sqrt{2}) + \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \\ &= \frac{3}{2} - 3 + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{3}{2} - 3 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{3}{2} - 3 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了负分数指数幂、特殊角的三角函数值, 二次根式的混合运算, 掌握相关的运算法则是解题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 15 \\ 2x - y = 5 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

【解析】

【分析】将方程①因式分解得出方程 $(2x+y)(2x-y)=15$ ，将②代入 $(2x+y)(2x-y)=15$ ，化为二元一次方程组，解方程组即可求解.

【详解】解:
$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 15 \text{ ①} \\ 2x - y = 5 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得, $(2x+y)(2x-y)=15$,

将②代入, $2x+y=3$ ③,

②+③得, $4x=8$, 解得: $x=2$,

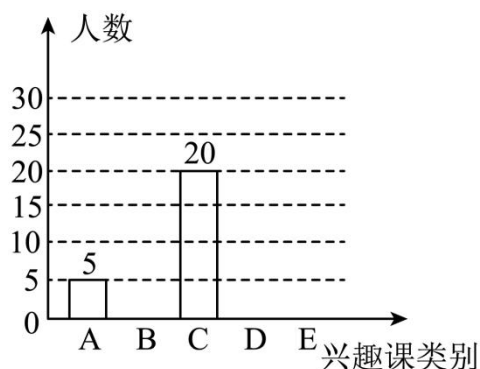
②-③得, $-2y=2$, 解得: $y=-1$,

则方程组的解为
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

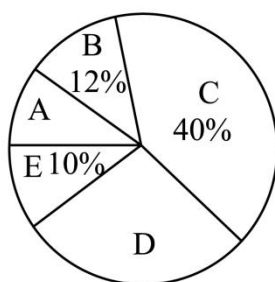
【点睛】本题考查了解二元二次方程组, 正确的计算是解题的关键.

21. 某校开设了 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五类兴趣课, 为了解学生对这五类兴趣课的喜爱情况, 从全校 500 名学生中随机抽取了若干名学生进行“你最喜爱的兴趣课”问卷调查 (每个学生从 A 、 B 、 C 、 D 、 E 中选择一类). 根据调查结果绘制出条形统计图和扇形统计图, 两个统计图都尚未完成.

调查结果的条形统计图



调查结果的扇形统计图



(1) 求本次问卷调查中最喜欢 E 类课程的学生人数, 并补全相应的条形图;

(2) 根据本次调查的结果, 试估计该校全体学生中最喜欢 D 类兴趣课的人数是多少?

【答案】(1) 最喜欢 E 类课程的学生人数有 5 名学生. 补全相应的条形图见解析

(2) 估计该校全体学生中最喜欢 D 类兴趣课的人数约为140名.

【解析】

【分析】(1) 根据最喜欢 C 类兴趣课人数和对应的百分比求得抽样调查的人数, 可求得最喜欢 B 、 D 、 E 类课程的学生人数, 补全统计图即可;

(2) 利用样本估计总体即可求解.

【小问1 详解】

解: $20 \div 40\% = 50$ (人),

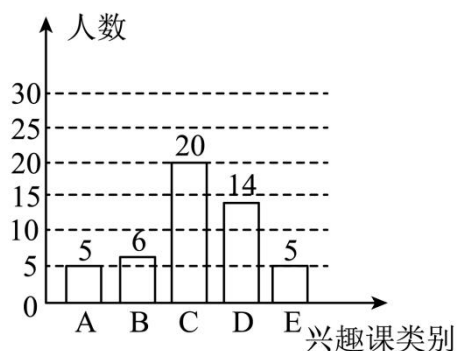
最喜欢 B 类课程的学生人数: $50 \times 12\% = 6$ (人),

最喜欢 E 类课程的学生人数: $50 \times 10\% = 5$ (人),

最喜欢 D 类课程的学生人数: $50 - 5 - 20 - 6 - 5 = 14$ (人),

补全条形图如图,

调查结果的条形统计图



答: 最喜欢 E 类课程的学生人数有 5 名学生.

【小问2 详解】

解: $500 \times \frac{14}{50} = 140$ (人).

答: 估计该校全体学生中最喜欢 D 类兴趣课的人数约为140名.

【点睛】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

22. “小房子”是一种常见的牛奶包装盒 (如图 1), 图 2 是其一个侧面的示意图, 由“盒身”矩形 $BCDE$ 和“房顶”等腰三角形 ABE 组成. 已知 $BC = 4.5$ 厘米, $CD = 8$ 厘米, $AB = AE = 5$ 厘米.



图 1

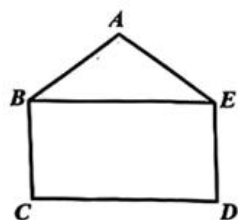


图 2

- (1) 求“房顶”点 A 到盒底边 CD 的距离；
- (2) 现设计了牛奶盒的一个新造型，和原来相比较，折线段 ABC 的长度（即线段 AB 与 BC 的和）及矩形 $BCDE$ 的面积均不改变，且 $\sin \angle ABE = \frac{5}{13}$ ， $BC > CD$ ，求新造型“盒身”的高度（即线段 BC 的长）.

【答案】(1) 点 A 到盒底边 CD 的距离为 7.5 厘米；

(2) 新造型“盒身”的高度为 $\frac{13}{2}$ 厘米.

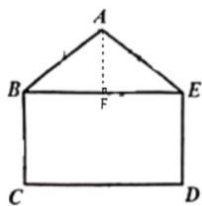
【解析】

【分析】(1) 构造直角三角形，利用勾股定理求得 AF 的长，进一步计算即可求解；

(2) 利用 (1) 的结论，结合角和的正弦、余弦，建立方程即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，作 $AF \perp BE$ 垂足为 F ，



$\because \triangle ABE$ 是等腰三角形，

$\therefore BF = FE$ ， $\because$ 四边形 $BCDE$ 是矩形，

$\therefore BE = CD = 8$ ，

$\therefore BF = \frac{1}{2}CD = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $AB = 5$ ， $BF = 4$ ，

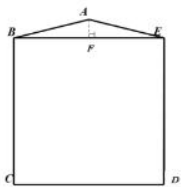
$\therefore AF = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

$\therefore$ 点 A 到盒底边 CD 的距离为 $AF + BC = 3 + 4.5 = 7.5$ 厘米；

【小问 2 详解】

解：如图，作 $AF \perp BE$ 垂足为 F ，

设 $BC = x$ ，则 $AB = 4.5 + 5 - x = 9.5 - x$ ， $CD = \frac{8 \times 4.5}{x} = \frac{36}{x}$ ，



$$\therefore \sin \angle ABE = \frac{AF}{AB} = \frac{5}{13},$$

$$\therefore \cos \angle ABE = \frac{BF}{AB} = \frac{\sqrt{13^2 - 5^2}}{13} = \frac{12}{13},$$

$$\text{由 (1) 得 } \cos \angle ABE = \frac{CD}{AB},$$

$$\therefore \frac{36}{2x} = \frac{12}{13},$$

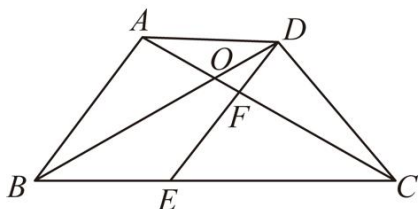
$$\text{解得 } x = \frac{13}{2} \text{ 或 } 3,$$

当 $x = 3$ 时, $BC < CD$, 不合题意, 舍去;

$$\therefore BC = \frac{13}{2}, \text{ 即新造型“盒身”的高度为 } \frac{13}{2} \text{ 厘米.}$$

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用, 作出合适的辅助线, 构造直角三角形是解题的关键.

23. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 、 BD 交于点 O , $OB = OC$.



(1) 求证: $AB = CD$;

(2) E 是边 BC 上一点, 连接 DE 交 AC 于点 F , 如果 $AO^2 = OF \cdot OC$, 求证: 四边形 $ABED$ 是平行四边形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质证明 $\angle DAO = \angle ADO$, 推出 $AC = BD$, 再证明 $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (SAS), 即可证明 $AB = CD$;

(2) 由 $AO^2 = OF \cdot OC$ 推出 $\frac{AO}{OF} = \frac{OC}{AO}$, 等量代换得 $\frac{AO}{OF} = \frac{OB}{OD}$, 利用相似三角形的判定定理推出 $\triangle AOB \sim \triangle FOD$, 证明 $\angle ABO = \angle ODF$, 据此即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because OB = OC$,

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle OCB, \quad \angle ADO = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle DAO = \angle ADO,$$

$$\therefore OA = OD,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\text{在 } \triangle ACB \text{ 和 } \triangle DBC \text{ 中, } \begin{cases} AC = BD \\ \angle ACB = \angle DBC, \\ BC = CB \end{cases}$$

$$\triangle ACB \cong \triangle DBC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = CD;$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 知, $OA = OD$, $OB = OC$,

$$\text{又 } \because AO^2 = OF \cdot OC,$$

$$\therefore \frac{AO}{OF} = \frac{OC}{AO}, \text{ 即 } \frac{AO}{OF} = \frac{OB}{OD},$$

$$\text{又 } \because \angle AOB = \angle DOF,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle FOD,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ODF,$$

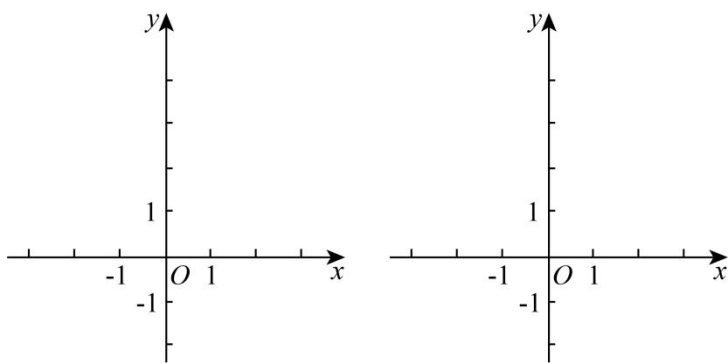
$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 平行四边形的判定, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 证明 $\triangle AOB \sim \triangle FOD$ 是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 抛物线的顶点为 D .



备用图

- (1) 求二次函数的解析式和顶点 D 的坐标；
- (2) 连接 AC ，试判断 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BOC$ 是否相似，并说明理由；
- (3) 将抛物线平移，使新抛物线的顶点 E 落在线段 OC 上，新抛物线与原抛物线的对称轴交于点 F ，连接 EF ，如果四边形 $CEFD$ 的面积为 3，求新抛物线的解析式.

【答案】 (1) 二次函数的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$ ，顶点 D 的坐标为 $(-1, 4)$ ；

(2) $\triangle ACD \sim \triangle COB$ ，理由见解析

(3) 新抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 1$.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求得抛物线的解析式，利用配方法可求得顶点 D 的坐标；

(2) 利用勾股定理分别求得 $\triangle ACD$ 的三边的长，根据勾股定理的逆定理判断 $\triangle ACD$ 是直角三角形，且 $\angle ACD = 90^\circ$ ，求得 $\frac{AC}{CD} = 3 = \frac{OC}{OB}$ ，即可证明 $\triangle ACD \sim \triangle COB$ ；

(3) 设新抛物线的解析式为 $y = -x^2 + a$ ($0 \leq a \leq 3$)，则顶点 E 的坐标为 $(0, a)$ ，分别用 a 表示出梯形 $CEFD$ 的上底和下底的长，据此即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-3, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -9 - 3b + c = 0 \\ -1 + b + c = 0 \end{cases},$$

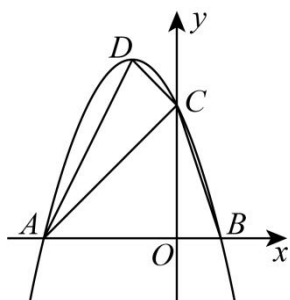
$$\text{解得: } \begin{cases} b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4$ ，顶点 D 的坐标为 $(-1, 4)$ ；

【小问 2 详解】

解：当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$$\therefore C(0,3),$$



$$\because \text{点 } A(-3,0)、B(1,0),$$

$$\therefore OB=1, \quad OC=3,$$

$$AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2},$$

$$CD=\sqrt{1^2+(4-3)^2}=\sqrt{2},$$

$$AD=\sqrt{(3-1)^2+4^2}=2\sqrt{5},$$

$$\because (3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=(2\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore AC^2+CD^2=AD^2,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 是直角三角形, 且 } \angle ACD=90^\circ,$$

$$\because \angle ACD=\angle COB, \quad \frac{AC}{CD}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3=\frac{OC}{OB},$$

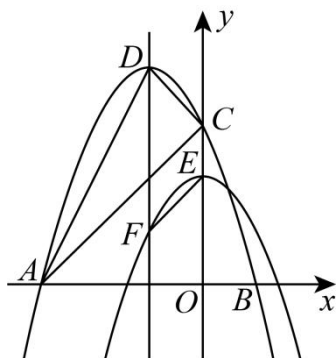
$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle COB;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4,$$

$$\therefore \text{对称轴为 } x=-1,$$

$$\text{设新抛物线的解析式为 } y=-x^2+a \quad (0 \leq a \leq 3), \text{ 则顶点 } E \text{ 的坐标为 } (0, a),$$



当 $x = -1$ 时, $y = a - 1$,

$\therefore F(-1, a - 1)$,

$\therefore CE = 3 - a$, $DF = 4 - (a - 1) = 5 - a$,

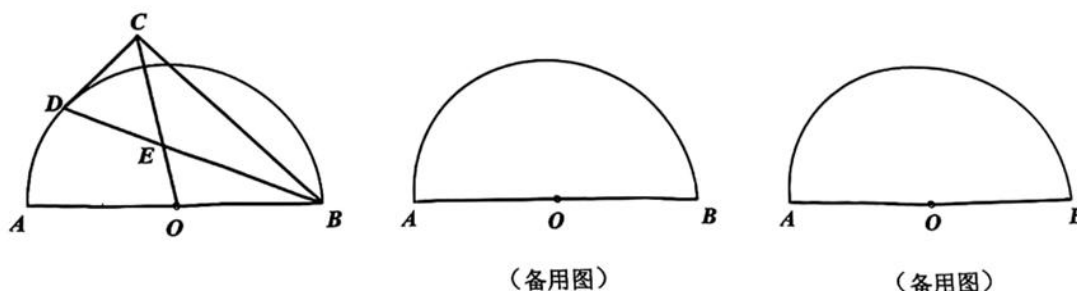
依题意得 $\frac{1}{2}(3 - a + 5 - a) \times 1 = 3$,

解得 $a = 1$,

$\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 1$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求函数解析式, 二次函数的平移, 相似三角形的判定, 勾股定理及其逆定理, 掌握待定系数法求函数解析式是解题的关键.

25. 如图, 已知半圆 O 的直径 $AB = 4$, C 是圆外一点, $\angle ABC$ 的平分线交半圆 O 于点 D , 且 $\angle BCD = 90^\circ$, 联结 OC 交 BD 于点 E .



(1) 当 $\angle ABC = 45^\circ$ 时, 求 OC 的长;

(2) 当 $\angle ABC = 60^\circ$ 时, 求 $\frac{OE}{EC}$ 的值;

(3) 当 $\triangle BOE$ 为直角三角形时, 求 $\sin \angle OCB$ 的值.

【答案】 (1) $OC = \sqrt{6}$;

(2) $\frac{OE}{EC} = \frac{2}{3}$;

(3) $\sin \angle OCB$ 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【解析】

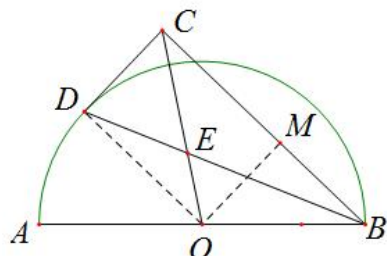
【分析】 (1) 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连接 OD , 证明四边形 $OMCD$ 是矩形, 求得 $CM = OD = OB = \frac{1}{2}AB = 2$, 推出 $\triangle OBM$ 是等腰直角三角形, 求得 $OM = BM = \sqrt{2}$, 再利用勾股定理即可求解;

(2) 同 (1) 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连接 OD , 可得四边形 $OMCD$ 是矩形, 求得 $CM = OD = OB = \frac{1}{2}AB = 2$, 由 $\angle ABC = 60^\circ$, 求得 $\angle BOM = 30^\circ$, 再求得 $BC = 2 + 1 = 3$, 根据相似三角形的判定和性质即可求解;

(3) 分两种情况讨论, 当 $\angle EOB = 90^\circ$ 时, 同 (1) 可得四边形 $OMCD$ 是矩形, 再证明 $\triangle OCB \sim \triangle BOM$, 利用相似三角形的性质求得 BM 的长, 即可求解; 当 $\angle OEB = 90^\circ$ 时, 求得 $\angle DCO = \angle BCO = 45^\circ$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连接 OD ,



$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore OM \parallel DC,$$

$$\therefore BD \text{ 是 } \angle ABC \text{ 的平分线},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\therefore OD = OB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ODB,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ODB,$$

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } OMCD \text{ 是平行四边形, 又 } \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } OMCD \text{ 是矩形},$$

$$\therefore CM = OD = OB = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

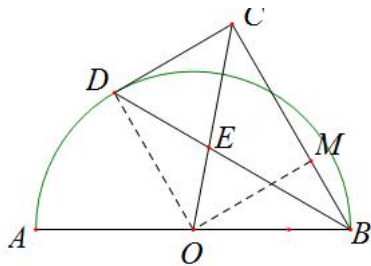
$$\therefore \triangle OBM \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore OM = BM = \frac{\sqrt{2}}{2}OB = \sqrt{2},$$

$$\therefore OC = \sqrt{CM^2 + OM^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6};$$

【小问 2 详解】

解: 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连接 OD ,



同理四边形 $OMCD$ 是矩形,

$$\therefore CM = OD = OB = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOM = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}OB = 1,$$

$$\therefore BC = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DOE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{OE}{EC} = \frac{OD}{BC} = \frac{2}{3};$$

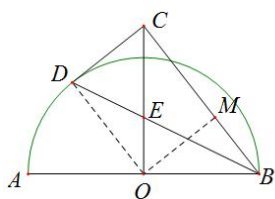
【小问 3 详解】

解: 作 $OM \perp BC$ 于 M , 连接 OD ,

同理四边形 $OMCD$ 是矩形,

$$\therefore CM = OD = OB = \frac{1}{2}AB = 2,$$

当 $\angle EOB = 90^\circ$ 时,



$$\therefore \angle COM + \angle BOM = 90^\circ, \quad \angle OCB + \angle COM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle BOM, \quad \text{又 } \angle COB = \angle OMB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OCB \sim \triangle BOM,$$

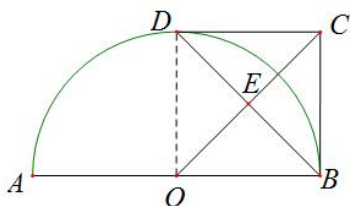
$$\therefore \frac{OB}{BM} = \frac{BC}{OB}, \quad \text{即 } \frac{2}{BM} = \frac{2 + BM}{2},$$

解得 $BM = \sqrt{5} - 1$ (负值已舍),

$$\therefore BC = CM + BM = \sqrt{5} + 1,$$

$$\therefore \sin \angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

当 $\angle OEB = 90^\circ$ 时,



由垂径定理得 $DE = BE$,

$\therefore OE$ 是线段 BD 的垂直平分线,

$\therefore DC = BC$,

$$\therefore \angle DCO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle DCB = 45^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle OCB = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

综上, $\sin \angle OCB$ 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【点睛】 本题考查了垂径定理, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质, 矩形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

