

2022 学年九年级数学练习卷

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列实数中, 有理数是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{9}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据有理数以及无理数的定义判断即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 是无理数, 不是有理数,

$\therefore$ A 不合题意.

$\because \sqrt{9} = 3$ 是整数, 是有理数,

$\therefore$ B 符合题意.

$\sqrt{10}$ 是无理数, 不是有理数,

$\therefore$ C 不合题意.

$\because \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 是无理数, 不是有理数,

$\therefore$ D 不符合题意.

故选: B.

【点睛】 本题考查了实数的分类, 特别指出, 无理数是包括: 无限不循环小数、含 π 的代数式、开方开不尽的数.

2. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^3 + a^2 = a^5$ B. $a^3 - a^2 = a$ C. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ D. $a^3 \div a^2 = a$

【答案】 D

【解析】

【分析】由合并同类项、同底数幂乘法、同底数幂除法的运算法则，分别进行判断，即可得到答案.

【详解】解：A、 $a^3 + a^2$ 不能合并，故 A 错误；

B、 $a^3 - a^2$ 不能合并，故 B 错误；

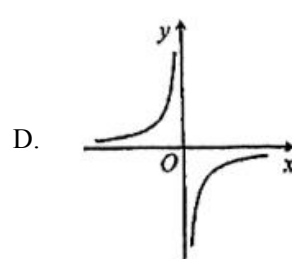
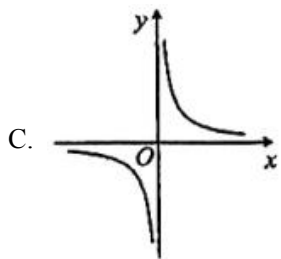
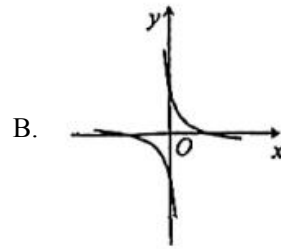
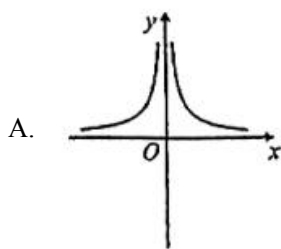
C、 $a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，故 C 错误；

D、 $a^3 \div a^2 = a$ ，故 D 正确；

故选：D.

【点睛】本题考查了合并同类项、同底数幂乘法、同底数幂除法的运算法则，解题的关键是熟练掌握运算法则进行判断.

3. 下列函数图像中，可能是反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图像的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】直接根据反比例函数的图象性质进行判断.

【详解】解：由 $k = 6 > 0$ ，可知反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象在一、三象限.

A. 反比例函数的图象在一、二象限. 故选项 A 不符合题意；

B. 反比例函数的图象与坐标轴相交，错误. 故选项 B 不符合题意；

C. 反比例函数的图象在一、三象限. 正确，故选项 C 符合题意；

D. 反比例函数的图象在二、四象限. 错误，故选项 D 不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质，要掌握它的性质才能灵活解题．反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象是双曲线，当 $k > 0$ 时，它的两个分支分别位于第一、三象限；当 $k < 0$ 时，它的两个分支分别位于第二、四象限．

4. “红色小讲解员”演讲比赛中，7 位评委分别给出某位选手的原始评分．评定该选手成绩时，从 7 个原始评分中去掉一个最高分、一个最低分，得到 5 个有效评分．5 个有效评分与 7 个原始评分相比，这两组数据一定不变的是（ ）．

- A. 中位数 B. 众数 C. 平均数 D. 方差

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，由数据的数字特征的定义，分析可得答案．

【详解】根据题意，从 7 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 5 个有效评分，7 个有效评分与 5 个原始评分相比，最中间的一个数不变，即中位数不变．

故选：A

【点睛】此题考查中位数的定义，解题关键在于掌握其定义．

5. 正方形具有而菱形不一定具有的性质是（ ）．

- A. 对角线互相垂直 B. 对角线平分一组对角
C. 对角线相等 D. 对角线互相平分

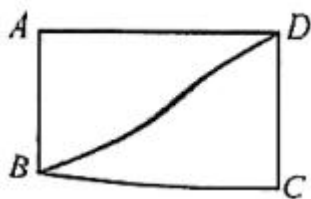
【答案】C

【解析】

【详解】正方形具有而菱形不一定具有的性质是：①正方形的对角线相等，而菱形不一定对角线相等，②正方形的四个角是直角，而菱形的四个角不一定是直角，

故选 C．

6. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 1$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ，点 O 在对角线 BD 上，圆 O 经过点 C ．如果矩形 $ABCD$ 有两个顶点在圆 O 内，那么圆 O 的半径长 r 的取值范围是（ ）



- A. $0 < r \leq 1$ B. $1 < r \leq \sqrt{3}$ C. $1 < r \leq 2$ D. $\sqrt{3} < r \leq 2$

【答案】B

【解析】

【分析】由勾股定理求出 $AD = \sqrt{3}$ ，连接 AC ，交 BD 于点 F ，作 $CE \perp BD$ 于点 E ，求得 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，再根据圆的运动过程，判断出 r 的取值范围即可。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

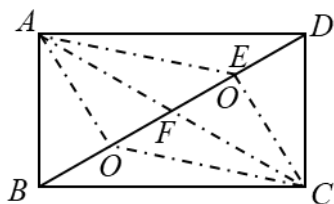
$$\therefore \angle ABD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2AB = 2 \times 1 = 2,$$

$$\text{由勾股定理得, } AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

连接 AC ，交 BD 于点 F ，作 $CE \perp BD$ 于点 E ，



$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD = \frac{1}{2} BD \cdot CE,$$

$$\therefore CE = \frac{BC \cdot CD}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

点 O 从点 D 开始向 B 移动，移到 E 时， OC 的长度从 1 减到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，再移到点 F ，此时 $OC = \frac{1}{2} AC = 1$ ，在

这一范围内， $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq r < 1$ ， $OA > AF > 1, OB > BF > 1$ ，

∴ 当 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq r \leq 1$ 时， A, B 都在圆外，不满足条件；

当点 O 从点 F 移到点 B 时， $1 < OC < \sqrt{3}$ ，此时， $OA < AF < 1, OB < BF < 1$ ， $OD > FD > 1$ ，

∴ 当 $1 < OC < \sqrt{3}$ 时，满足两点在圆内的条件；

当 $OC = 1$ ，即 $r = 1$ ，点 O 在点 F 的位置， $OA = OB = OC = OD$ ，此时四点都在圆上，不满足条件；

当 $OC = \sqrt{3}$ ，即 $r = \sqrt{3}$ ，点 O 在点 B 的位置，此时 $OA = AB = 1 < r$ ， $OD = 2 > r$ ， A 和 B 在圆内，点 D 在圆外，满足条件，

故 r 的取值范围是： $1 < r \leq \sqrt{3}$ 。

故选： B 。

【点睛】 本题主要考查了点与圆的位置关系，正确进行分类讨论是解答本题的关键。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 计算： $(ab^3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 a^2b^6

【解析】

【分析】 用积的乘方的计算方法解答即可。

【详解】 解： $(ab^3)^2 = a^2b^6$ ，

故答案为： a^2b^6 。

【点睛】 此题重点考查学生对积的乘方的理解，掌握积的乘方的计算方法是解题的关键。

8. 化简分式 $\frac{b}{ab+b}$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{1}{a+1}$

【解析】

【分析】 直接分子分母同时除以 b 即可得到答案。

【详解】 解： $\frac{b}{ab+b} = \frac{1}{a+1}$ ，

故答案为： $\frac{1}{a+1}$ 。

【点睛】 本题主要考查了分式的约分，正确计算是解题的关键。

9. 如果关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 1

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可。

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m = 0$ ，

解得 $m = 1$

故答案为：1.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根.

10. 如果一个二次函数的图像顶点是原点，且它经过平移后能与 $y = -2x^2 + x - 1$ 的图像重合，那么这个二次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = -2x^2$

【解析】

【分析】 根据二次函数平移前后的形状和开口方向不变，即二次项系数不变进行求解即可.

【详解】 解： $\because$ 平移后的二次函数解析式为 $y = -2x^2 + x - 1$,

$\therefore$ 原二次函数解析式为 $y = -2x^2$,

故答案为： $y = -2x^2$.

【点睛】 本题考查二次函数的图像与几何变换，熟知二次函数图像平移中不变的性质是解答的关键.

11. 如果正比例函数 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的图像经过点 $(4, -1)$ ，那么 y 的值随 x 的增大而_____. (填“增大”或“减小”)

【答案】 减小

【解析】

【分析】 根据点的坐标利用正比例函数图象上点的坐标特征可求出 k 值，再利用正比例函数的性质即可得出结论.

【详解】 $\because$ 正比例函数 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的图象经过点 $(4, -1)$,

$\therefore -1 = 4k$,

$\therefore k = -\frac{1}{4}$,

$\therefore y$ 的值随 x 的增大而减小,

故答案为：减小.

【点睛】 本题考查了正比例函数的图象与性质，熟练掌握待定系数法以及正比例函数的增减性与正比例函数的比例系数 k 之间的关系是解题的关键.

12. 布袋里有 4 个小球，分别标注了数字 $-1, 0, 2, 3$ ，这些小球除了标注数字不同外，其它都相同。从布袋里任意摸出一个球，这个球上标注数字恰好是正数的概率是_____。

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 直接由概率公式求解即可。

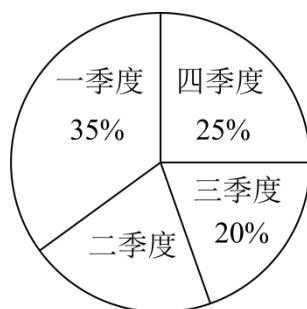
【详解】 解： $\because$ 共有 4 个数字 $-1, 0, 2, 3$ ，其中正数有 2 和 3，共 2 个，

$\therefore$ 摸到小球上标注数字恰好是正数的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ；

故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

【点睛】 本题主要考查概率公式，随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$ 。

13. 如图是某商场 2022 年四个季度的营业额绘制成的扇形统计图，其中第二季度的营业额为 100 万元，那么该商场全年的营业额为_____万元。



【答案】 500

【解析】

【分析】 用第二季度的营业额除以其占比即可得到答案。

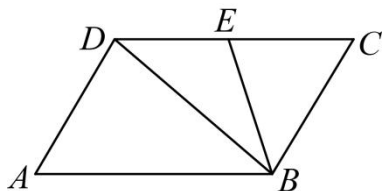
【详解】 解： $100 \div (1 - 35\% - 25\% - 20\%) = 500$ 万元，

$\therefore$ 该商场全年的营业额为 500 万元，

故答案为： 500。

【点睛】 本题主要考查了扇形统计图，正确读懂统计图是解题的关键。

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， BD 为对角线， E 是边 DC 的中点，联结 BE 。如果设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BE} =$ _____（含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示）。



【答案】 $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】由 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，可得 $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$ ，由 E 是边 DC 的中点，可得 $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$ ，从而可得答案.

【详解】解： $\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$\because E$ 是边 DC 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

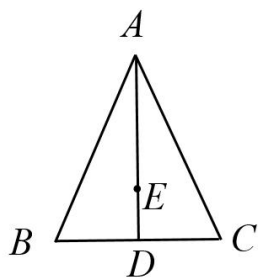
【点睛】 本题考查的是向量的加减法运算，理解运算法则是解本题的关键.

15. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， 如果 $BC = 10$ ， $\cos B = \frac{5}{13}$ ， 那么 $\triangle ABC$ 的重心到底边的距离为_____.

【答案】 4

【解析】

【详解】解： 如下图所示， 设点 D 为 BC 的中点， 点 E 为三角形的重心，



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\because BD = \frac{1}{2}BC = 5, \quad \cos B = \frac{5}{13}, \quad \cos B = \frac{BD}{AB}$$

$$\therefore AB = 13,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 12,$$

$\therefore$ 点 E 为三角形的重心,

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{2}{1},$$

$$\therefore ED = 4,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的重心到底边的距离为 4,

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查解直角三角形、三角形重心的性质和勾股定理, 解题的关键是熟知重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1.

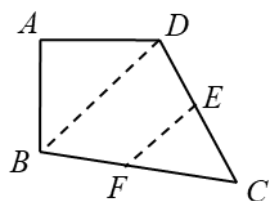
16. 如果四边形有一组邻边相等, 且一条对角线平分这组邻边的夹角, 我们把这样的四边形称为“准菱形”. 有一个四边形是“准菱形”, 它相等的邻边长为 2, 这两条边的夹角是 90° , 那么这个“准菱形”的另外一组邻边的中点间的距离是_____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 如图, 由勾股定理求出 BD , 再根据三角形中位线定理求出 EF 的长即可.

【详解】 解: 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是“准菱形”, 且 $AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$, 连接 BD ,



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ 点 E , F 分别是 CD , BC 边的中点,

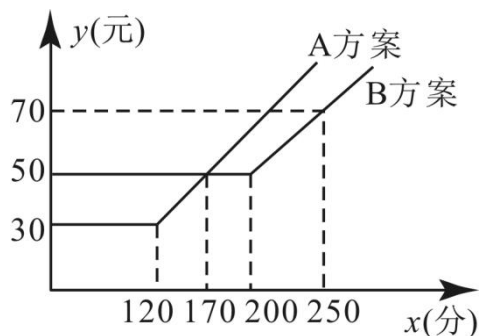
$\therefore EF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2},$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理以及三角形中位线定理, 正确理解“准菱形”的概念是解答本题的关键.

17. 如图, 某电信公司提供了 A 、 B 两种方案的移动通讯费用 y (元) 与通话时间 x (元) 之间的关系. 如果通讯费用为 60 元, 那么 A 方案与 B 方案的通话时间相差_____分钟.



【答案】 35

【解析】

【分析】用待定系数法分别求出 A 、 B 方案的函数解析式，把 $y = 60$ 代入解析式求得 A 、 B 方案所用的时间，即可求出结果.

【详解】解: A 方案: 把 $(120, 30)$ 、 $(170, 50)$ 代入 $y_1 = k_1x + b_1 (x > 120)$ 得:

$$\begin{cases} 120k_1 + b_1 = 30 \\ 170k_1 + b_1 = 50 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = 0.4 \\ b_1 = -16 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = 0.4x - 16,$$

$$\therefore A \text{ 方案移动通讯费用 } y \text{ (元) 与通话时间 } x \text{ (元) 函数关系式为: } y_1 = \begin{cases} 30 (x \leq 120) \\ 0.4x - 16 (x > 120) \end{cases},$$

$$\therefore y = 60 \text{ 时, } 0.4x - 16 = 60, \text{ 解得: } x = 190,$$

$\therefore A$ 方案通话 190 分钟,

B 方案: 把 $(200, 50)$ 、 $(250, 70)$ 代入 $y_2 = k_2x + b_2 (x > 200)$ 得:

$$\begin{cases} 200k_2 + b_2 = 50 \\ 250k_2 + b_2 = 70 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_2 = 0.4 \\ b_2 = -30 \end{cases},$$

$$\therefore y_2 = 0.4x - 30,$$

$\therefore B$ 方案移动通讯费用 y (元) 与通话时间 x (元) 函数关系式为:

$$y_2 = \begin{cases} 50 (x \leq 200) \\ 0.4x - 30 (x > 200) \end{cases},$$

$$\therefore y = 60 \text{ 时, } 0.4x - 30 = 60, \text{ 解得: } x = 225,$$

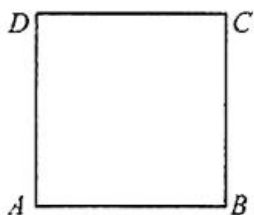
$\therefore B$ 方案通话 225 分钟,

$$\therefore 225 - 190 = 35 \text{ (分)},$$

故答案为: 35.

【点睛】 本题考查一次函数的实际应用，明确题意，利用待定系数法求函数解析式是解题的关键.

18. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 AD 、 AB 上， $EF \perp CE$. 将 $\triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折，如果点 D 的对应点恰好落在线段 CF 上，那么 $\angle EFC$ 的正切值是_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 过点 E 作 $EM \perp CF$ 于点 M ，由折叠得 $\triangle CDE \cong \triangle CME$ ，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle MEF$ ，从而证明

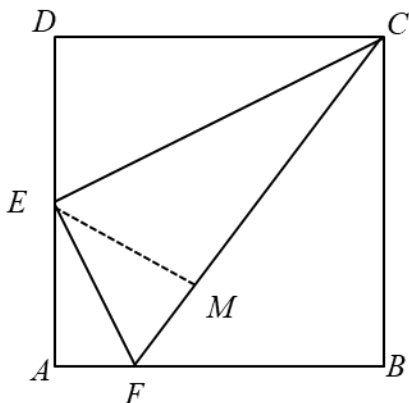
$AE = DE$ ，设 $CD = AD = a$ ，则 $DE = AE = \frac{a}{2}$ ，求出 $CE = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ ，再证明 $\triangle DCE \sim \triangle AEF$ ，得 $AF = \frac{a}{4}$ ，由

勾股定理求出 $EF = \frac{\sqrt{5}}{4}a$ ，进一步可求出 $\angle EFC$ 的正切值.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC = CD = AD, \angle A = \angle D = 90^\circ$,

过点 E 作 $EM \perp CF$ 于点 M ,



$\therefore CE \perp EF$,

$\therefore \angle CEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEF + \angle DEC = 90^\circ, \angle FEM + \angle CEM = 90^\circ$,

由折叠得， $\triangle CDE \cong \triangle CME$,

$$\therefore DE = EM, \angle DEC = \angle MEC, \angle EMC = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle MEF,$$

$$\therefore \angle A = \angle FME = 90^\circ, EF = EF,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle MEF,$$

$$\therefore AE = ME,$$

$$\therefore AE = DE,$$

$$\text{设 } CD = AD = a, \text{ 则 } DE = AE = \frac{a}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, 由勾股定理得, } CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle DEC = 90^\circ, \angle DEC + \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle DCE,$$

$$\text{又 } \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \frac{DC}{DE} = \frac{AE}{AF} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AE = \frac{a}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } CE = \frac{\sqrt{5}}{2}a, EF = \frac{\sqrt{5}}{4}a,$$

$$\therefore \tan \angle CEF = \frac{CE}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{\sqrt{5}}{4}a} = 2,$$

故答案为 2

【点睛】 本题主要考查了正方形的折叠问题，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质以及求正切值等知识，正确作出辅助线构造全等三角形是解答本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $(-1)^{2023} + |1 - \sqrt{3}| - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - (-\frac{1}{2})^{-2}$.

【答案】 -7

【解析】

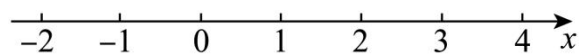
【分析】原式分别运用有理数的乘方、化简绝对值、分母有理化以及负整数指数幂运算法则化简各项后, 再进行加减运算即可.

【详解】解: $(-1)^{2023} + |1 - \sqrt{3}| - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - (-\frac{1}{2})^{-2}$

$$= -1 + \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{3} + 1) - 4$$
$$= -1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1 - 4$$
$$= -7$$

【点睛】本题主要考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

20. 解不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leq 3 - \frac{5}{3}x \\ \frac{x-7}{15} < \frac{x-2}{5} \end{cases}$ 将其解集在数轴上表示出来, 并写出这个不等式组的整数解.



【答案】 $-\frac{1}{2} < x \leq 2$, 图见解析, 整数解为 0, 1, 2

【解析】

【分析】分别对不等式组中的不等式进行求解, 取两个不等式的交集即可得到答案.

【详解】解: $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 \leq 3 - \frac{5}{3}x \text{ ①} \\ \frac{x-7}{15} < \frac{x-2}{5} \text{ ②} \end{cases}$

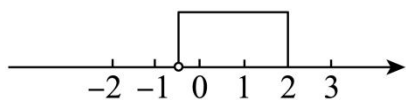
解不等式①得 $x \leq 2$,

解不等式②得 $x > -\frac{1}{2}$,

取①和②的交集得 $-\frac{1}{2} < x \leq 2$,

故不等式组的解集为: $-\frac{1}{2} < x \leq 2$,

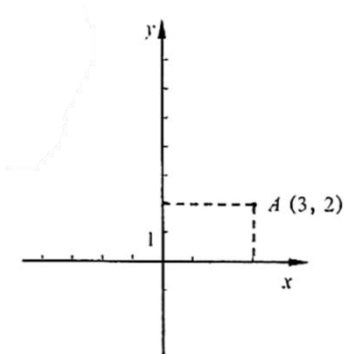
将解集表示在数轴上如图:



∴ 该不等式组的整数解为：0，1，2.

【点睛】 本题考查不等式组的解集，解题的关键是熟练掌握解不等式组的方法.

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 上有一点 $A(3,2)$ ，将点 A 先向左平移 3 个单位，再向下平移 4 个单位得到点 B ，点 B 恰好在直线 l 上.



- (1) 写出点 B 的坐标，并求出直线 l 的表达式；
- (2) 如果点 C 在 y 轴上，且 $\angle ABC = \angle ACB$ ，求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $B(0, -2)$, $y = \frac{4}{3}x - 2$

(2) $C(0, 6)$

【解析】

【分析】 (1) 根据平移的性质即可得到点 B 的坐标，根据 A 、 B 两点的坐标，利用待定系数法即可求出直线 l 的表达式；

(2) 根据等腰三角形的性质，得到 $BO = CO$ ，根据点 O 的坐标和 BO 的长度，即可求出点 C 的坐标.

【小问 1 详解】

解： 设 $B(m, n)$

∵ $A(3, 2)$ ， 且点 A 先向左平移 3 个单位， 再向下平移 4 个单位得到点 B ，

∴ $m = 3 - 3 = 0$, $n = 2 - 4 = -2$,

∴ $B(0, -2)$,

设直线 l 的表达式为: $y = kx + b$,

∵ $A(3, 2)$, $B(0, -2)$ 在直线 l 上,

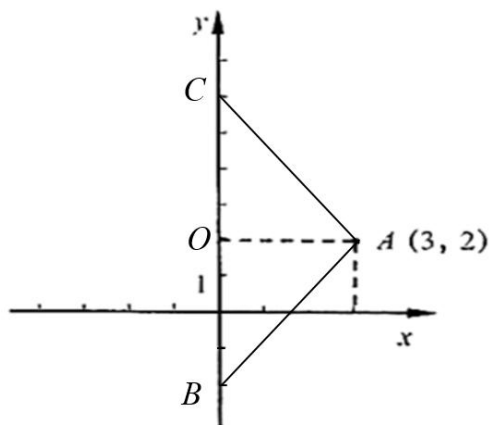
$$\therefore \begin{cases} 2 = 3k + b \\ -2 = b \end{cases},$$

解方程组得: $k = \frac{4}{3}, b = -2$,

故直线 l 的表达式为: $y = \frac{4}{3}x - 2$;

【小问 2 详解】

解: 如下图所示, 过点 A 作 $AO \perp y$ 轴, 垂足为 O ,



$\therefore B(0, -2)$ 在 y 轴上, 点 C 在 y 轴上, $AO \perp y$ 轴,

$\therefore AO \perp BC$, $O(0, 2)$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AC = AB$,

$\therefore BO = CO$,

$\therefore B(0, -2)$, $O(0, 2)$,

$\therefore BO = 4$,

$\therefore C(0, 6)$.

【点睛】 本题考查直角坐标系中的点坐标、点的平移、一次函数的解析式和等腰三角形的性质, 解题的关键是根据平移的性质求出点 B 的坐标.

22. 图 1 是某地下商业街的入口的玻璃顶, 它是由立柱、斜杆、支撑杆组成的支架撑起的, 图 2 是它的示意图. 经过测量, 支架的立柱 AB 与地面垂直 ($\angle BAC = 90^\circ$), $AB = 2.7$ 米, 点 A 、 C 、 M 在同一水平线上, 斜杆 BC 与水平线 AC 的夹角 $\angle ACB = 33^\circ$, 支撑杆 $DE \perp BC$, 垂足为 E , 该支架的边 BD 与 BC 的夹角 $\angle DBE = 66^\circ$, 又测得 $CE = 2.2$ 米.



图1

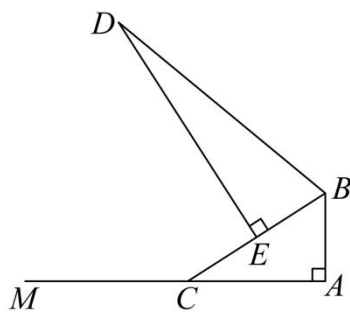


图2

(1) 求该支架的边 BD 的长;

(2) 求支架的边 BD 的顶端 D 到地面 AM 的距离. (结果精确到 0.1 米)

(参考数据: $\sin 33^\circ \approx 0.54$, $\sin 66^\circ \approx 0.91$, $\cos 33^\circ \approx 0.84$, $\cos 66^\circ \approx 0.40$, $\tan 33^\circ \approx 0.65$, $\tan 66^\circ \approx 2.25$)

【答案】 (1) 该支架的边 BD 的长为 7 米;

(2) 支架的边 BD 的顶端 D 到地面 AM 的距离为 6.5 米

【解析】

【分析】 (1) 先解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 求出 $BC = 5$ 米, 进而求出 $BE = 2.8$ 米, 再解 $\text{Rt}\triangle DEB$ 求出 BD 的长即可;

(2) 如图所示, 过点 D 作 $DH \perp AM$ 于 H , 过点 B 作 $BG \perp DH$ 于 G , 则四边形 $ABGH$ 是矩形, 即可证明 $GH = AB = 2.7$ 米, $BG \parallel AH$, 求出 $\angle DBG = 33^\circ$, 即可解 $\text{Rt}\triangle BDG$, 求出 $DG \approx 3.8$ 米, 则 $DH = DG + GH = 6.5$ 米,

【小问 1 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 33^\circ$, $AB = 2.7$ 米,

$$\therefore BC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \approx \frac{2.7}{0.54} = 5 \text{ 米},$$

$$\therefore CE = 2.2 \text{ 米},$$

$$\therefore BE = BC - CE = 2.8 \text{ 米},$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 中, $\angle DBE = 66^\circ$, $\angle DEB = 90^\circ$, $BE = 2.8$ 米,

$$\therefore BD = \frac{BE}{\cos \angle DBE} \approx \frac{2.8}{0.4} = 7 \text{ 米},$$

$\therefore$ 该支架的边 BD 的长为 7 米;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 D 作 $DH \perp AM$ 于 H , 过点 B 作 $BG \perp DH$ 于 G , 则四边形 $ABGH$ 是矩形,

$$\therefore GH = AB = 2.7 \text{ 米}, \quad BG \parallel AH,$$

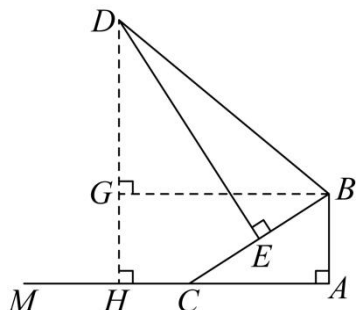
$$\therefore \angle GBC = \angle ACB = 33^\circ,$$

$$\therefore \angle DBG = \angle DBE - \angle GBC = 33^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 中, $DG = BD \cdot \sin \angle DBG \approx 7 \times 0.54 \approx 3.8$ 米,

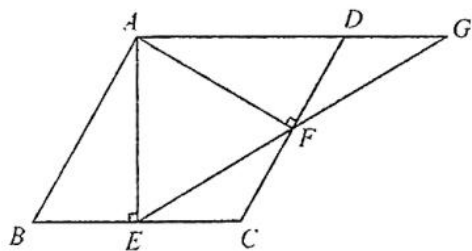
$$\therefore DH = DG + GH = 6.5 \text{ 米},$$

$\therefore$ 支架的边 BD 的顶端 D 到地面 AM 的距离为 6.5 米.



【点睛】本题主要考查了解直角三角形的实际应用，矩形的性质与判定，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

23. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ， $AF \perp CD$ ，垂足分别为 E 、 F ，射线 EF 交 AD 的延长线于点 G 。



(1) 求证： $CE = CF$ ；

(2) 如果 $FG^2 = AG \cdot DG$ ，求证： $\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{BE}$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的性质证明 $\triangle BAE \cong \triangle DAF$ (AAS)，即可得证；

(2) 根据已知可得出 $\triangle DGF \sim \triangle FGA$ ，根据 (1) 的结论得出 $\angle EFC = \angle FEC$ ，根据对顶角相等，平行线的性质得出 $\angle G = \angle DFG$ ，可得 $DF = DG$ ，根据相似三角形的性质得出 $AF = FG$ ，进而得出 $\angle G = \angle FAG$ ，根据互余关系得出 $\angle ADF = \angle AEG$ ，根据正切的定义得出 $\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{DF}$ ，即可得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD, BC = CD, AD \parallel BC, AB \parallel CD,$$

$$\begin{aligned}
&\because AE \perp BC, \quad AF \perp CD, \\
&\therefore AF \perp AB, \quad AE \perp AD, \quad \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAF = \angle EAD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAE = \angle DAF, \\
&\therefore \triangle BAE \cong \triangle DAF \text{ (AAS)}, \\
&\therefore DF = BE, \\
&\because BC = CD, \\
&\therefore CE = CF;
\end{aligned}$$

【小问2 详解】

证明: $\because FG^2 = AG \cdot DG$,

$$\therefore \frac{FG}{AG} = \frac{DG}{FG},$$

又 $\because \angle G = \angle G$,

$$\therefore \triangle DGF \sim \triangle FGA,$$

$$\therefore \frac{DG}{FG} = \frac{DF}{FA},$$

$$\text{即 } \frac{DG}{DF} = \frac{FG}{FA},$$

$$\because CE = CF,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle FEC,$$

$$\because AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle G = \angle FEC,$$

$$\text{又 } \because \angle EFC = \angle GFD,$$

$$\therefore \angle G = \angle DFG,$$

$$\therefore DF = DG,$$

$$\therefore AF = FG,$$

$$\therefore \angle G = \angle FAG,$$

$$\because \angle GAF + \angle ADF = \angle G + \angle ADF = \angle G + \angle AEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AEG,$$

$$\therefore \tan \angle AEG = \tan \angle AEF,$$

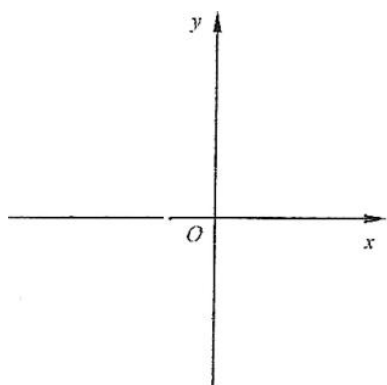
$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{DF},$$

$$\text{又 } \because BE = DF,$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{BE}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，菱形的性质，正切的定义，熟练掌握相似三角形的性质与判定，正切的定义是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C .



- (1) 求该抛物线的表达式和对称轴；
- (2) 连接 AC 、 BC ， D 为 x 轴上方抛物线上一点（与点 C 不重合），如果 $\triangle ABD$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积相等，求点 D 的坐标；
- (3) 设点 $P(m, 4)$ ($m > 0$)，点 E 在抛物线的对称轴上（点 E 在顶点上方），当 $\angle APE = 90^\circ$ ，且 $\frac{EP}{AP} = \frac{5}{4}$ 时，求点 E 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 3$ ，对称轴为直线 $x = -1$

(2) $D(-2, 3)$

(3) $E\left(-1, \frac{31}{4}\right)$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(1, 0)$ 代入抛物线解析式求出抛物线解析式，再把抛物线解析式化为顶点式即可求出对称轴；

(2) 先求出 $C(0, 3)$ ，再根据 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$ ，推出 $y_D = y_C = 3$ ，则点 C 和点 D 关于抛物线对称轴对称，由此利用二次函数的对称形求解即可；

(3) 设抛物线顶点为 M ，由 (1) 可知 $M(-1, 4)$ ，则 P 、 M 都在直线 $y = 4$ 上，即可得到 $EM \perp PM$ ，即 $\angle EMP = 90^\circ$ ，如图所示，过点 A 作 $AN \perp PM$ 于 N ，则 $AN = 4$ ，证明 $\triangle NAP \sim \triangle MPE$ ，得到

$$\frac{EM}{PN} = \frac{PM}{AN} = \frac{EP}{AP} = \frac{5}{4}, \text{ 进而求出 } P(4,4), \text{ 得到 } PN=3, \text{ 由此求出 } y_E = \frac{31}{4}, \text{ 则 } E\left(-1, \frac{31}{4}\right).$$

【小问 1 详解】

解: 把 $A(1,0)$ 代入到 $y = -x^2 + bx + 3$ 中得: $-1 + b + 3 = 0$,

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为 } y = -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4,$$

$$\therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x = -1;$$

【小问 2 详解】

解: 在 $y = -x^2 - 2x + 3$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$$\therefore C(0,3),$$

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC},$$

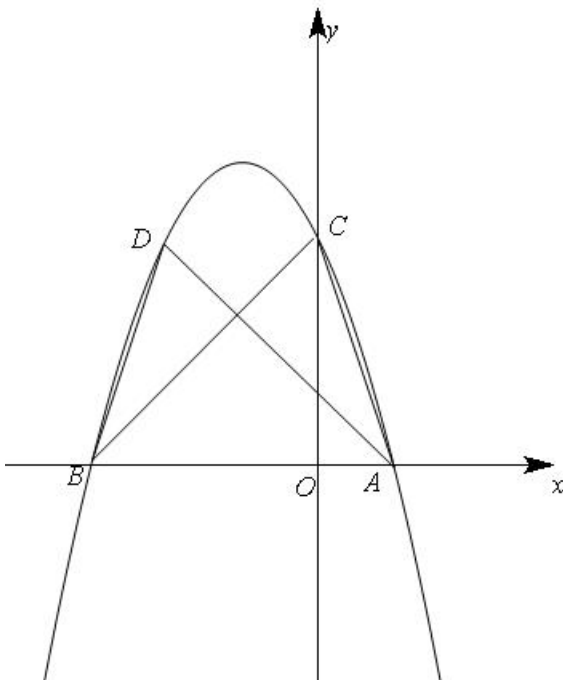
$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot y_D = \frac{1}{2} AB \cdot y_C,$$

$$\therefore y_D = y_C = 3,$$

$\therefore$ 点 C 和点 D 关于抛物线对称轴对称,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = -1$,

$$\therefore D(-2,3);$$



【小问 3 详解】

解: 设抛物线顶点为 M ,

由 (1) 可知 $M(-1,4)$,

$$\therefore P(m,4)(m>0),$$

$\therefore P、M$ 都在直线 $y=4$ 上,

$$\therefore EM \perp PM, \text{ 即 } \angle EMP = 90^\circ,$$

如图所示, 过点 A 作 $AN \perp PM$ 于 N , 则 $AN=4$,

$$\therefore \angle ANP = \angle PME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NPA + \angle NAP = 90^\circ = \angle NPA + \angle MPE,$$

$$\therefore \angle NAP = \angle MPE,$$

$$\therefore \triangle NAP \sim \triangle MPE,$$

$$\therefore \frac{EM}{PN} = \frac{PM}{AN} = \frac{EP}{AP} = \frac{5}{4},$$

$$\therefore PM = \frac{5}{4} AN = 5,$$

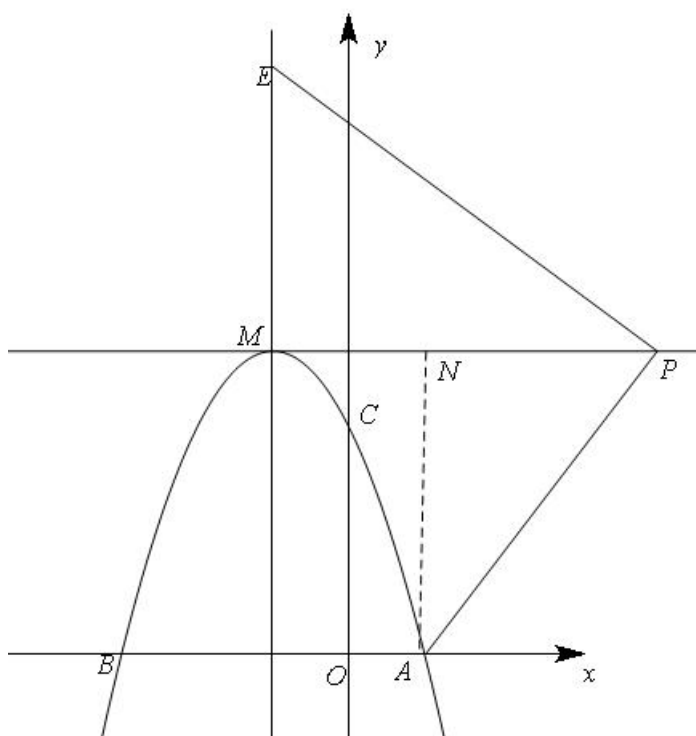
$$\therefore P(4,4),$$

$$\therefore PN = 3,$$

$$\therefore EM = \frac{5}{4} PN = \frac{15}{4},$$

$$\therefore y_E = 4 + \frac{15}{4} = \frac{31}{4},$$

$$\therefore E\left(-1, \frac{31}{4}\right).$$



【点睛】本题主要考查了二次函数与几何综合，相似三角形的性质与判定，待定系数法求二次函数解析式等等，灵活运用所学知识是解题的关键.

25. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 4$, $\angle ABC = 90^\circ$, $BD = BC$, 过点 C 作对角线 BD 的垂线, 垂足为 E , 交射线 BA 于点 F .

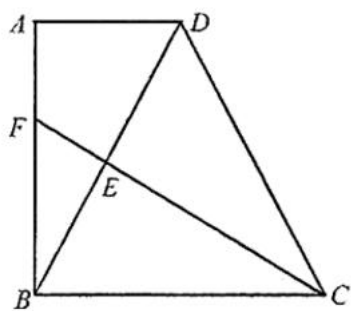


图 1

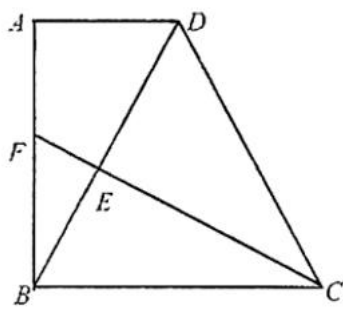


图 2

- (1) 如图 1, 当点 F 在边 AB 上时, 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ECB$;
- (2) 如图 2, 如果 F 是 AB 的中点, 求 $FE:EC$ 的值;
- (3) 联结 DF , 如果 $\triangle BFD$ 是等腰三角形, 求 BC 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

(3) 8

【解析】

【分析】(1) 要证明 $\triangle ABD \cong \triangle ECB$ 根据已知条件有一组相等的边长，只需要找到两个角相等即可；题目中已知平行关系，可以找到一组内错角相等，再根据 $\angle ABC = 90^\circ$ 可以得出 $\angle BAD = 90^\circ$ ，又因为垂直关系那么另外一组相等的角就找到了，题目得以求证；

(2) 根据已知条件和 (1) 中的全等关系，可知要求 $FE:EC$ 的值即求 $FE:BF$ 的值，即如果找到 FE 与 BF 的关系即可；这两边均在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中，直接根据勾股定理无法求知，可以猜想到 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBF$ 相似关系，进行证明，再得到一组 EF 与 AB 即 $2BF$ 的关系，进而得出所求的比值；

(3) 根据 $\triangle BFD$ 是等腰三角形，且 F 在 AB 上，可知 $BF = DF$ ，又因为 $CF \perp BD$ ，可得 $BE = DE$ ，而根据 (1) 中可知 $BE = AD = 4$ ，所以 BD 可以求出来等于 8，而已知条件 $BC = BD$ ，所以 $BC = 8$

【小问 1 详解】

$$\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBE, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because CF \perp BD,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle BEF = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECB$ 中，

$$\because \angle CEB = \angle BAD = 90^\circ, \angle ADB = \angle CBD, BD = BC,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECB,$$

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBF$ 中，

$$\because \angle FBE = \angle ABD, \angle BAD = \angle BEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{EF}{AD} = \frac{BE}{AB},$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ECB,$$

$$\therefore BE = AD = 4,$$

$$\therefore EF \cdot AB = AD \cdot BE = 4 \times 4 = 16,$$

$$\therefore EF = \frac{16}{AB},$$

又 $\because F$ 是 AB 的中点，

$$\therefore BF = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore EF = \frac{8}{BF},$$

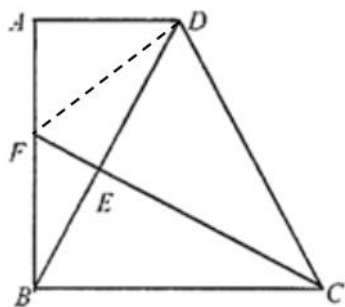
在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $EF^2 + BE^2 = \frac{64}{BF^2} + 4^2 = BF^2$,

解得, $BF^2 = 16 + 8\sqrt{2}$ 或 $BF^2 = 16 - 8\sqrt{2} < BE^2$ (舍去)

$$\therefore FE: EC = \frac{16}{AB \cdot EC} = \frac{16}{AB \cdot AB} = \frac{4}{BF^2} = \frac{4}{16 + 8\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4};$$

【小问 3 详解】

如图,



$\therefore \triangle BFD$ 是等腰三角形, 且 $CF \perp BD$,

$\therefore BE = DE = 4$,

$\therefore BC = BD = BE + DE = 4 + 4 = 8$.

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质以及相似三角形的判定与性质, 熟练运用相关知识是解答本题的关键

