

2023 年上海市嘉定区中考二模数学试卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分).

[下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. 下列根式中, 与 $\sqrt{18}$ 为同类二次根式的是()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】先把二次根式与化为最简二次根式, 再进行判断.

【详解】解: $\because \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore$ 四个选项中只有 A 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数相同, 是同类二次根式.

故选 A.

2. 下列关于 x 的方程一定有实数解的是 ()

- A. $x^2 + 1 = 0$ B. $x^2 - x + 1 = 0$ C. $x^2 - bx + 1 = 0$ (b 为常数) D. $x^2 - bx - 1 = 0$

(b 为常数)

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式逐项判断即可.

【详解】解: A、 $x^2 + 1 = 0$ 的判别式为: $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$, 方程没有实数解, 不符合题意;

B、 $x^2 - x + 1 = 0$ 的判别式为: $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$, 方程没有实数解, 不符合题意;

C、 $x^2 - bx + 1 = 0$ (b 为常数) 的判别式为: $\Delta = b^2 - 4$, 方程不一定有实数解, 不符合题意;

D、 $x^2 - bx - 1 = 0$ (b 为常数)的判别式为: $\Delta = b^2 + 4 > 0$, 方程一定有实数解, 符合题意;

故选 D.

【点睛】此题主要考查一元二次方程实数根的情况, 正确利用根的判别式进行判断是解题关键.

3. 某校从各年级随机抽取 50 名学生, 每人进行 10 次投篮, 投篮进球次数如下表所示:

进球次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	1	9	9	8	6	6	5	4	1	1	0

该投篮进球次数的中位数是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】将数据排序后第 25, 26 名学生投篮次数的平均数即为中位数.

【详解】由中位数的定义得: 该投篮进球数据的中位数是数据从小到大排序后, 第 25 和 26 个数的平均数, 即 $\frac{1}{2}(3+3) = 3$;

故选: B.

【点睛】本题考查了中位数的定义, 熟记定义是解题关键.

4. 从 1, 2, 3, 4 四个数中任意取出 2 个数做加法, 其和为奇数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】列举法求出所有和的个数, 以及和为奇数的个数, 利用概率公式进行求解即可.

【详解】任意取出 2 个数做加法, 出现答案有 3, 4, 5, 5, 6, 7, 共 6 种等可能的结果, 其中和为奇数的结果有 4 种,

$\therefore$ 和为奇数的概率 $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

故选 C.

【点睛】本题考查列举法求概率. 熟练掌握列举法求概率的方法, 是解题的关键.

5. 下列图形中既是轴对称图形, 又是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 等腰梯形 C. 矩形 D. 正五边形

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义、中心对称图形的定义逐项判断即可.

【详解】A 选项：等边三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B 选项：等腰梯形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

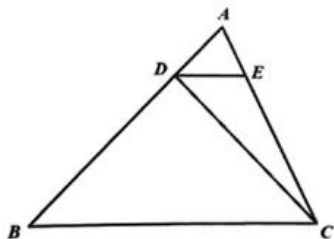
C 选项：矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意；

D 选项：正五边形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意.

故选 C.

【点睛】本题考查轴对称图形、中心对称图形，理解定义，会根据定义判断轴对称图形和中心对称图形是解答的关键.

6. 如图，已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD:DB=1:3$ ，那么 $S_{\triangle DEC}:S_{\triangle DBC}$ 等于 ()



A. 1:2

B. 1:3

C. 2:3

D. 1:4

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $S_{\triangle DEC}$ 与 $S_{\triangle DBC}$ 是同高，故底之比等于 1:3，从而得出面积之比.

【详解】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore DE:BC = AD:AB,$$

$$\because AD:DB = 1:3,$$

$$\therefore AD:AB = 1:4,$$

$$\therefore DE:BC = 1:4,$$

$$\because S_{\triangle DEC} \text{ 和 } S_{\triangle DBC} \text{ 的高相同},$$

$$\therefore S_{\triangle DEC}:S_{\triangle DBC} = 1:4,$$

故选：D.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，高相等的两个三角形的面积之比等于底之比是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分满分 48 分)

[请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 计算: $a^4 \div a^2 =$ _____.

【答案】 a^2 .

【解析】

【分析】 根据同底幂相除, 底数不变, 指数相减计算即可得到答案.

【详解】 解: $a^4 \div a^2 = a^{4-2} = a^2$.

8. 如果分式 $\frac{1}{2x-3}$ 有意义, 那么实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件进行解答即可.

【详解】 解: $\because$ 分式 $\frac{1}{2x-3}$ 有意义,

$\therefore 2x-3 \neq 0$,

解得: $x \neq \frac{3}{2}$.

故答案为: $x \neq \frac{3}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了分式意义的条件, 解题的关键是熟练掌握分式有意义的条件, 分母不等于零.

9. 1 纳米=0.000000001 米, 则 2.5 纳米用科学记数法表示为_____

【答案】 2.5×10^{-9} 米.

【解析】

【分析】 首先根据 1 纳米=0.000000001 米, 得出 2.5 纳米= 2.5×0.000000001 米= 0.0000000025 米, 再根据科学记数法的表示方法得出答案.

【详解】 $\because$ 1 纳米=0.000000001 米,

$\therefore 2.5$ 纳米= 2.5×0.000000001 米= 0.0000000025 米= 2.5×10^{-9} 米;

故答案为: 2.5×10^{-9} 米.

【点睛】 本题考查用科学记数法表示绝对值小于 1 的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, n 由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

10. 方程 $\sqrt{x+7} - x = 1$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先对已知方程进行变形，然后结合二次方程即可求解。

【详解】 解： 方程整理得 $\sqrt{x+7} = x+1$ ，

两边平方得 $x+7 = x^2 + 2x+1$ ， 即 $x^2 + x - 6 = 0$ ，

解得 $x = -3$ 或 $x = 2$ ，

根据二次根式的性质可得 $x \geq -1$ ，

所以原方程的根是 $x = 2$ 。

故答案为： $x = 2$ 。

【点睛】 本题主要考查了二次根式的性质以及含有根式方程的一般解法。二次根式的性质： $\sqrt{a} \geq 0 (a \geq 0)$ ，含有根式方程的一般解法：先移项，然后两边同时平方，再利用一元二次方程的知识求解即可。

11. 如果反比例函数 $y = \frac{a-1}{x}$ 的图像经过点 $(1, -2)$ ，那么这个反比例函数的解析式为_____。

【答案】 $y = -\frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 把点 $(1, -2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{a-1}{x}$ 中，即可得出结果。

【详解】 解： 由题意，得： $a-1 = 1 \times (-2) = -2$ ，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = -\frac{2}{x}$ ，

故答案为： $y = -\frac{2}{x}$ 。

【点睛】 本题考查求反比例函数的解析式。熟练掌握待定系数法求函数解析式，是解题的关键。

12. 如果函数 $y = x^2 + k$ 的图象向左平移 2 个单位后经过原点，那么 $k =$ _____。

【答案】 -4

【解析】

【分析】 按照平移的规律得平移后的解析式，再把原点代入求 k 即可。

【详解】 解： 函数 $y = x^2 + k$ 的图象向左平移 2 个单位后的解析式为 $y = (x+2)^2 + k$ ，

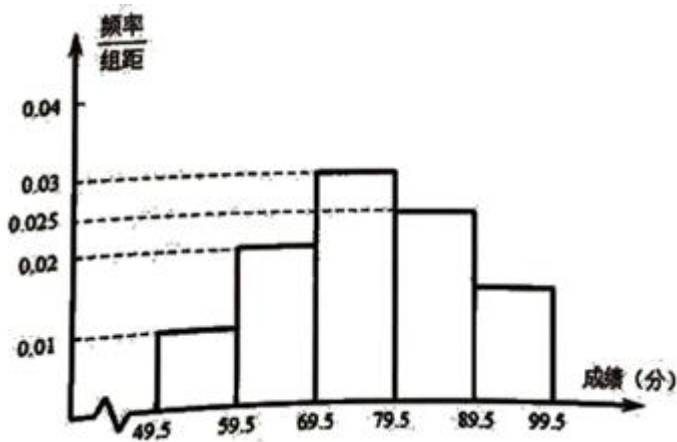
将 $(0, 0)$ 代入，解得 $k = -4$ ，

故答案为： -4 。

【点睛】 本题考查了二次函数图象的平移。解题的关键在于熟练掌握二次函数图象平移：左加右减，上加

下减.

13. 某区有 1200 名学生参加了“垃圾分类”知识竞赛, 为了解本次竞赛成绩分布情况, 竞赛组委会从中随机抽取部分学生的成绩(得分都是整数)作为样本, 绘制成频率分布直方图(如图). 请根据提供的信息估计该区本次竞赛成绩在 89.5 分~99.5 分的学生有____名.



【答案】 180

【解析】

【分析】 根据 $1 - (0.01 + 0.02 + 0.025 + 0.03) \times 10$, 计算求出成绩在 89.5 分~99.5 分的学生的频率, 然后乘以 1200 计算求解即可.

【详解】 解: 由频率分布直方图可知, 成绩在 89.5 分~99.5 分的学生频率为 $1 - (0.01 + 0.02 + 0.025 + 0.03) \times 10 = 0.15$,

$\therefore$ 估计该区本次竞赛成绩在 89.5 分~99.5 分的学生有 $1200 \times 0.15 = 180$ (名),

故答案为: 180.

【点睛】 本题考查了频率分布直方图, 用样本估计总体. 根据频率分布直方图求出频率是解题的关键.

14. 如果一个正多边形的中心角为 36° , 那么这个正多边形的边数是_____.

【答案】 10

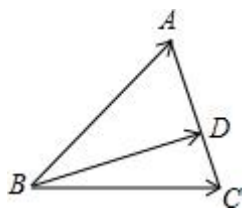
【解析】

【分析】 根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^\circ \div n$ 进行计算即可得到答案.

【详解】 根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^\circ \div n$, 则 $n = 360 \div 36 = 10$, 故这个正多边形的边数为 10, 故答案为: 10.

【点睛】 本题考查的是正多边形内角和中心角的知识, 掌握中心角的计算公式是解题的关键.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 边上一点, 且 $AD: DC = 2:1$. 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD} =$ _____. (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

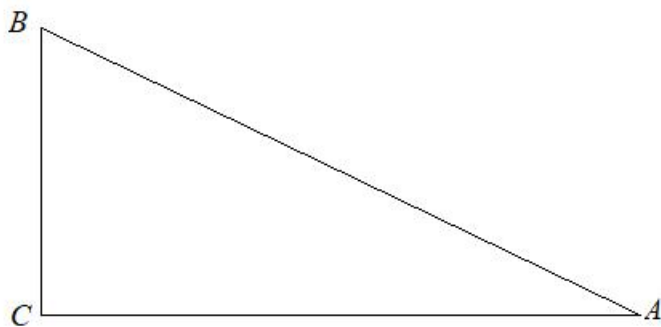
【分析】 根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ ，计算求解即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解： 由题意知 } \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算. 解题的关键在于明确各向量之间的关系.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $\sin A = \frac{5}{13}$ ， 以点 C 为圆心， R 为半径作圆， 使 A 、 B 两点一点在圆内， 一点在圆外， 那么 R 的取值范围是_____.



【答案】 $5 < R < 12$ 或 $12 > R > 5$

【解析】

【分析】 求出线段 AC 、 BC ， 再根据点与圆得位置关系判断即可.

【详解】 解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $\sin A = \frac{5}{13}$ ，

$$\therefore BC = AB \times \sin A = 13 \times \frac{5}{13} = 5,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 12,$$

$\therefore$ 以点 C 为圆心, R 为半径作圆, 使 A 、 B 两点一点在圆内, 一点在圆外,

$$\therefore 5 < R < 12.$$

故答案为: $5 < R < 12$.

【点睛】本题主要考查了点与圆的位置关系, 解直角三角形, 勾股定理, 解题的关键是根据题意求出 $BC = 5$, $AC = 12$.

17. 新定义: 函数图象上任意一点 $P(x, y)$, $y - x$ 称为该点的“坐标差”, 函数图象上所有点的“坐标差”的最大值称为该函数的“特征值”. 一次函数 $y = 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$) 的“特征值”是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】由题意知, 一次函数 $y = 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$) 的“特征值”为 $y - x = x + 3$, 当 $x = 1$ 时, $y - x$ 最大, 代入求解即可.

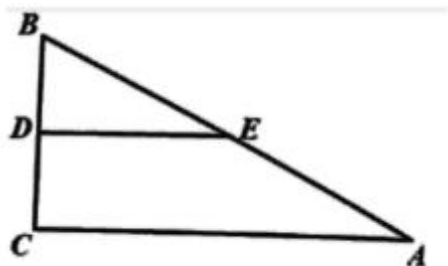
【详解】解: 由题意知, 一次函数 $y = 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$) 的“特征值”为 $y - x = x + 3$,
当 $x = 1$ 时, $y - x = 4$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 2x + 3$ ($-2 \leq x \leq 1$) 的“特征值”为 4,

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了新定义, 一次函数. 解题的关键在于理解题意并正确的运算.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 2$, 点 D 、 E 分别是边 BC 、 BA 的中点, 连接 DE . 将 $\triangle BDE$ 绕点 B 顺时针方向旋转, 点 D 、 E 的对应点分别是点 D_1 、 E_1 . 如果点 E_1 落在线段 AC 上, 那么线段 $CD_1 =$ _____.



【答案】 $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

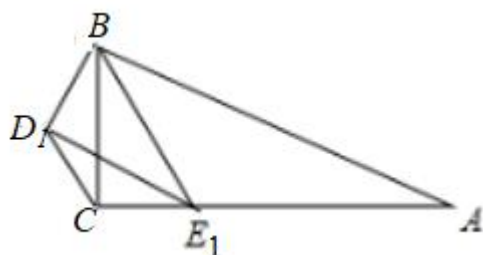
【解析】

【分析】根据勾股定理求得 AB ，根据旋转的性质得出 $\angle ABE_1 = \angle CBD_1$ ， $\frac{BD_1}{BE_1} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，进而得出

$\triangle ABE_1 \sim \triangle CBD_1$ ，根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 2$ ，点 D 、 E 分别是边 BC 、 BA 的中点，
 $\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}$ ， $CD = BD = \frac{1}{2}BC = 1$ ， $AE = BE = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ ，

如图所示，点 E_1 落在线段 AC 上，



设旋转角为 α ，

$$\therefore \angle ABE_1 = \angle CBD_1,$$

$\because$ 旋转，

$$\therefore BE_1 = BE = \sqrt{5}, BD_1 = BD = 1,$$

$$\therefore \frac{BD_1}{BE_1} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \triangle ABE_1 \sim \triangle CBD_1,$$

$$\therefore \frac{AE_1}{CD_1} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{5},$$

$$\therefore CE_1 = \sqrt{BE_1^2 - BC^2} = \sqrt{5 - 4} = 1, AE_1 = AC - CE_1 = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore CD_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，相似三角形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握旋转的性质是解题的关

键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}-2\sin 45^{\circ}+|\sqrt{3}-2|-(1-\pi)^0$

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算法则, 特殊角的三角函数值以及零指数幂进行计算即可.

【详解】 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}-2\sin 45^{\circ}+|\sqrt{3}-2|-(1-\pi)^0$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}+2-\sqrt{3}-1 \\&= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-1 \\&= \sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}-1 \\&= 1.\end{aligned}$$

【点睛】 考查了实数的综合运算能力, 负整数指数幂、零指数幂、分母有理化、特殊角度的三角函数值等考点的运算.

20. 解方程: $\begin{cases} x-3y=5 \textcircled{1} \\ x^2-2xy+y^2=4 \textcircled{2} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=-\frac{11}{2} \\ y=-\frac{7}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 将②式因式分解解两个二元一次方程组即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x-3y=5 \textcircled{1} \\ x^2-2xy+y^2=4 \textcircled{2} \end{cases}$

由②得 $x=y-2 \textcircled{3}$ 或 $x=y+2 \textcircled{4}$

由①③得: $\begin{cases} x-3y=5 \textcircled{1} \\ x=y-2 \textcircled{3} \end{cases},$

把③代入①得: $y-2-3y=5,$

解得: $y = -\frac{7}{2}$,

把 $y = -\frac{7}{2}$ 代入③得: $x = -\frac{11}{2}$,

∴ 方程的解为:
$$\begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = -\frac{7}{2} \end{cases};$$

由①④得:
$$\begin{cases} x - 3y = 5 \text{①} \\ x = y + 2 \text{④} \end{cases},$$

把④代入①得: $y + 2 - 3y = 5$,

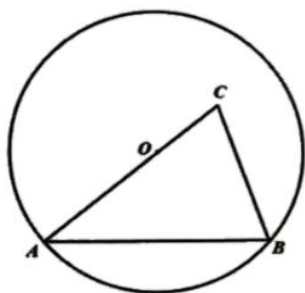
解得: $y = -\frac{3}{2}$,

把 $y = -\frac{3}{2}$ 代入①得: $x = \frac{1}{2}$,

∴ 方程的解为:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查二元一次方程组，因式分解；注意将②式因式分解转化为两个方程是本题关键.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = AB$ ， $\sin A = \frac{3}{5}$ ，圆 O 经过 A 、 B 两点，圆心 O 在线段 AC 上，点 C 在圆 O 内，且 $OC = 3$.



(1) 求圆 O 的半径长;

(2) 求 BC 的长.

【答案】 (1) 5

(2) $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

【解析】

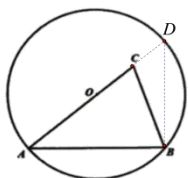
【分析】 (1) 延长 AC 交圆 O 于点 D ，连接 BD ，设圆 O 的半径长为 r ，则 $AB = r + 3$ ，利用正弦函数列

式计算即可求解;

(2) 先求得 $AB = AC = 8$, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$, 利用三角函数的定义求得 BE 和 AE 的长, 再利用勾股定理求解.

【小问 1 详解】

解: 设圆 O 的半径长为 r , 延长 AC 交圆 O 于点 D , 连接 BD ,



因为 $AC = AB$, $\sin A = \frac{3}{5}$,

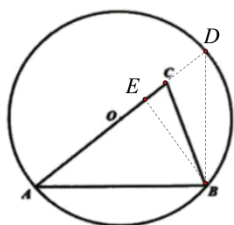
$$\text{所以 } \frac{AB}{AD} = \frac{r+3}{2r} = \frac{4}{5},$$

解得 $r = 5$,

经检验, $r = 5$ 是方程的解;

【小问 2 详解】

解: 过点 B 作 AD 的垂线垂足为 E ,



由 (1) 得 $AB = AC = 5 + 3 = 8$,

$$\text{则 } \sin A = \frac{BE}{AB} = \frac{3}{5}, \text{ 解得 } BE = \frac{24}{5},$$

$$\cos A = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{5}, \text{ 解得 } AE = \frac{32}{5},$$

$$\text{所以 } CE = AC - AE = \frac{8}{5},$$

$$\text{所以 } BC = \sqrt{CE^2 + BE^2} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

【点睛】 本题考查了圆内接三角形, 经过圆的直径构造的三角形为直角三角形, 添加辅助线再利用三角函数求解.

22. A 、 B 两城间的铁路路程为 1800 千米. 为了缩短从 A 城到 B 城的行驶时间, 列车实施提速, 提速后速度

比提速前速度每小时增加 20 千米.

- (1) 如果列车提速前速度是每小时 80 千米, 提速后从 A 城到 B 城的行驶时间减少 t 小时, 求 t 的值;
- (2) 如果提速后从 A 城到 B 城的行驶时间减少 3 小时, 又这条铁路规定: 列车安全行驶速度不超过每小时 140 千米. 问列车提速后速度是否符合规定? 请说明理由.

【答案】(1) 4.5

(2) 符合规定, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据时间=路程÷速度即可求出答案;

(2) 根据题意列分式方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得: 提速前从 A 城到 B 城的所用时间为: $1800 \div 80 = 22.5$ (小时),

提速后的速度为 100 千米/小时,

$\therefore$ 提速后从 A 城到 B 城的所用时间为: $1800 \div 100 = 18$ (小时),

$\therefore$ 提速后从 A 城到 B 城的行驶时间减少 $t = 22.5 - 18 = 4.5$ (小时);

【小问 2 详解】

解: 设列车提速前速度是每小时 x 千米,

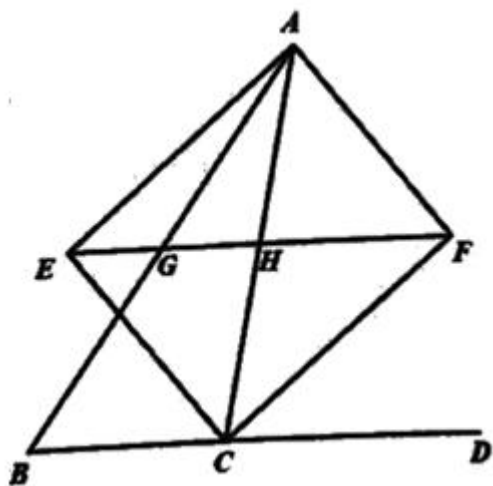
$$\text{则 } \frac{1800}{x} - \frac{1800}{x+20} = 3$$

解得: $x = 120$ (舍去), $x = 100$,

$\therefore$ 提速后的速度为 $100 + 20 = 120 < 140$, 符合规定.

【点睛】本题考查了分式方程应用题, 运用路程=速度乘以时间解决问题.

23. 如图, 已知 CE 、 CF 分别是 $\angle ACB$ 和它的邻补角 $\angle ACD$ 的角平分线, $AE \perp CE$, 垂足为点 E , $AF \parallel EC$, 连接 EF , 分别交 AB 、 AC 于点 G 、 H .



- (1) 求证：四边形 $AECF$ 是矩形；
(2) 试猜想 GH 与 BC 之间的数量关系，并证明你的结论。

【答案】(1) 见解析 (2) $GH = \frac{1}{2}BC$ ，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 由 CE 、 CF 分别是 $\angle ACB$ 和它的邻补角 $\angle ACD$ 的角平分线可得 $\angle ECF = 90^\circ$ ，由 $AF \parallel EC$ 可得 $\angle AFC = 90^\circ$ ，再由于 $AE \perp CE$ ，根据有三个角是直角的四边形是矩形可得证；

(2) 根据矩形的对角线相等且互相平分可得点 H 是 AC 的中点， $HF = HC$ ，得到 $\angle EFC = \angle ACF$ ，由于 $\angle ACF = \angle DCF$ ，故 $\angle EFC = \angle FCD$ ，所以 $EF \parallel BD$ ，得到 $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ ，进而得到 $\frac{GH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}$ 。

【小问 1 详解】

$\therefore CE$ 、 CF 分别是 $\angle ACB$ 和 $\angle ACD$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ECA = \frac{1}{2}\angle ACB, \quad \angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACD,$$

$$\because \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ECA + \angle ACF = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle ACD) = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\because AF \parallel CE,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp CE,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是矩形。

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $AECF$ 是矩形，

$$\therefore HC = HF,$$

$$\therefore \angle HCF = \angle HFC,$$

$\therefore CF$ 是 $\angle ACD$ 的角平分线，

$$\therefore \angle HCF = \angle FCD,$$

$$\therefore \angle HFC = \angle FCD,$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

$$\therefore \triangle AGH \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{GH}{BC} = \frac{AH}{AC},$$

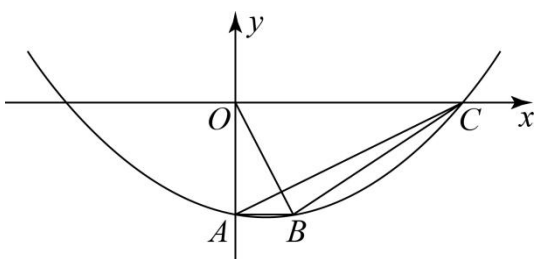
∵ 四边形 $AECF$ 是矩形,

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore GH = \frac{1}{2}BC.$$

【点睛】本题主要考查矩形的判定与性质, 平行线的判定, 角平分线的定义, 三角形相似的证明与性质. 熟练运用矩形的判定与性质是解题的关键.

24. 如图, 在直角坐标平面 xOy 中, 点 A 在 y 轴的负半轴上, 点 C 在 x 轴的正半轴上, $AB \parallel OC$, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4$ ($a \neq 0$) 经过 A 、 B 、 C 三点.



(1) 求点 A 、 B 的坐标;

(2) 联结 AC 、 OB 、 BC , 当 $AC \perp OB$ 时,

①求抛物线表达式;

②在抛物线的对称轴上是否存在点 P , 使得 $S_{\triangle PAC} = 4S_{\triangle ABC}$? 如果存在, 求出所有符合条件的点 P 坐标; 如果不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $A(0, -4)$, $B(2, -4)$

(2) ① $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - 4$; ② 存在, $\left(1, -\frac{15}{2}\right)$ 或 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 求出抛物线的对称轴为 $x = 1$, 再根据 A 的坐标为 $(0, -4)$, $AB \parallel OC$, 即可作答;

(2) ①证明 $\triangle OAC \sim \triangle ABO$, 即有 $\frac{AB}{OA} = \frac{OA}{OC}$, 进而可得 $OC = 8$, 问题得解; ②先求出 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$,

设点 P 的坐标为 $(1, m)$, 设抛物线对称轴交 AC 于 N 点, 利用待定系数法可求出直线 AC 的解析式为:

$$y = \frac{1}{2}x - 4, \quad N\left(1, -\frac{7}{2}\right), \quad \text{则有: } PN = \left|m + \frac{7}{2}\right|, \quad \text{则有 } S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times PN \times x_C = \frac{1}{2} \times \left|m + \frac{7}{2}\right| \times 8, \quad \text{进而可得}$$

$$\frac{1}{2} \times \left| m + \frac{7}{2} \right| \times 8 = 4 \times 4 = 16, \text{ 解方程即可求解.}$$

【小问 1 详解】

$$\because \text{该抛物线的表达式为 } y = ax^2 - 2ax - 4 (a \neq 0),$$

$$\therefore y = a(x-1)^2 - a - 4,$$

$$\therefore \text{该抛物线的对称轴为 } x = 1,$$

$$\because \text{抛物线 } y = a(x-1)^2 - a - 4 \text{ 经过点 } A, \text{ 且点 } A \text{ 在 } y \text{ 轴的负半轴上,}$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (0, -4),$$

$$\because AB \parallel OC, \text{ 对称轴为 } x = 1,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (2, 4);$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} \because AC \perp OB, AB \parallel OC,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle OAB = 90^\circ, \angle OAC + \angle CAB = 90^\circ = \angle OAC + \angle AOB, \angle OCA = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle OCA,$$

$$\therefore \triangle OAC \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{AB}{OA} = \frac{OA}{OC},$$

$$\because O(0, 0), B(2, 4), A(0, -4),$$

$$\therefore AB = 2, OA = 4,$$

$$\text{即: } \frac{2}{4} = \frac{4}{OC},$$

$$\therefore OC = 8,$$

$$\because \text{点 } C \text{ 在 } x \text{ 轴的正半轴上,}$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (8, 0),$$

$$\text{将 } (8, 0) \text{ 代入 } y = ax^2 - 2ax - 4 \text{ 中, 解得 } a = \frac{1}{12},$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为 } y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - 4;$$

②存在, 理由如下:

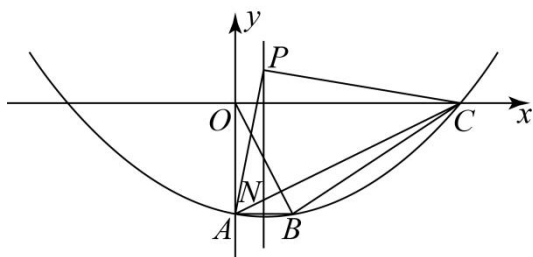
$$\because A(0, -4), B(2, 4),$$

$$\therefore AB = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4,$$

设点 P 的坐标为 $(1, m)$,

如图, 抛物线对称轴交 AC 于 N 点,



$$\therefore A(0, -4), C(8, 0),$$

$\therefore$ 利用待定系数法可求出直线 AC 的解析式为: $y = \frac{1}{2}x - 4$,

$$\text{即 } x=1 \text{ 时, } y = \frac{1}{2}x - 4 = -\frac{7}{2},$$

$$\text{即 } N\left(1, -\frac{7}{2}\right),$$

$$\text{则有: } PN = \left|m + \frac{7}{2}\right|,$$

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} \times PN \times x_C = \frac{1}{2} \times \left|m + \frac{7}{2}\right| \times 8,$$

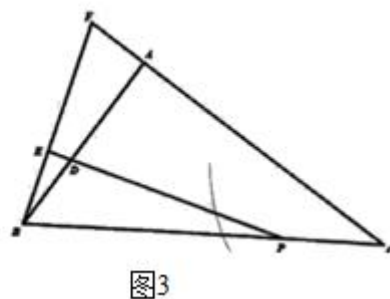
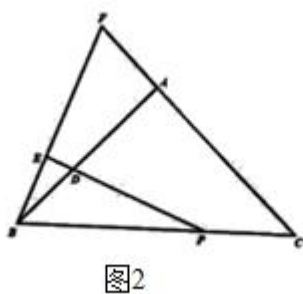
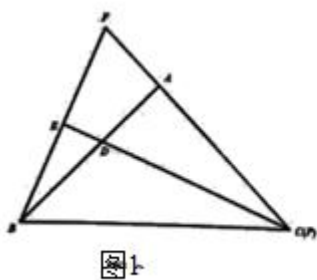
$$\text{即有: } \frac{1}{2} \times \left|m + \frac{7}{2}\right| \times 8 = 4 \times 4 = 16,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{15}{2}, \text{ 或者 } m = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(1, -\frac{15}{2}\right) \text{ 或 } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

【点睛】 本题考查了二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理等知识, 掌握二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

25. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 P 在线段 BC 上, $\angle BPD = \frac{1}{2}\angle ACB$, PD 交 BA 于点 D , 过点 B 作 $BE \perp PD$, 垂足为 E , 交 CA 的延长线于点 F .



(1) 如果 $\angle ACB = 45^\circ$,

①如图 1 当点 P 与点 C 重合时, 求证: $BE = \frac{1}{2}PD$;

②如图 2, 当点 P 在线段 BC 上, 且不与点 B 、点 C 重合时, 问: ①中的 “ $BE = \frac{1}{2}PD$ ” 仍成立吗? 请说明你的理由;

(2) 如果 $\angle ACB \neq 45^\circ$, 如图 11, 已知 $AB = n \cdot AC$ (n 为常数), 当点 P 在线段 BC 上, BE 且不与点 B 、点 C 重合时, 请探究 $\frac{BE}{PD}$ 的值(用含 n 的式子表示), 并写出你的探究过程.

【答案】(1) ①证明见解析; ②成立, 证明见解析

(2) $\frac{n}{2}$, 过程见解析

【解析】

【分析】(1) ①由等角对等边可得 $AB = AC$, 证明 $\triangle BCE \cong \triangle FCE$ (ASA), 则 $BE = FE = \frac{1}{2}BF$, 证明 $\triangle FBA \cong \triangle DPA$ (ASA), 则 $BF = PD$, 进而可证 $BE = \frac{1}{2}PD$; ②如图 1, 过 P 作 $PM \parallel AC$ 交 AB 于 N , 交 BF 于 M , 则 $BN = PN$, 同理①可证, $\triangle BPE \cong \triangle MPE$ (ASA), 则 $BE = ME = \frac{1}{2}BM$, 同理①可证, $\triangle MBN \cong \triangle DPN$ (ASA), 则 $BM = DP$, $BE = \frac{1}{2}DP$;

(2) 如图 2, 过 P 作 $PH \parallel AC$ 交 AB 于 G , 交 BF 于 H , 同理 (1) 可证: $\triangle BEP \cong \triangle HEP$ (ASA), 则 $BE = EH = \frac{1}{2}BH$, 证明 $\triangle PGD \sim \triangle BGH$, 则 $\frac{BH}{PD} = \frac{BG}{GP}$, 证明 $\triangle BPG \sim \triangle BCA$, 则 $\frac{BG}{AB} = \frac{GP}{AC}$, 即 $\frac{BG}{GP} = \frac{AB}{AC} = n$, 可知 $\frac{BH}{PD} = \frac{BG}{GP} = n$, 即 $\frac{2BE}{PD} = n$, 进而可得 $\frac{BE}{PD} = \frac{n}{2}$.

【小问 1 详解】

①证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle BPD = \frac{1}{2} \angle ACB$,

$$\therefore \angle BCE = \angle FCE ,$$

在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle FEC$ 中,

$$\because \angle BCE = \angle FCE, EC = EC, \angle BEC = \angle FEC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle FEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore BE = FE = \frac{1}{2}BF ,$$

$$\because \angle FBA + \angle F = 90^\circ, \angle DPA + \angle F = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle DPA ,$$

$$\text{又} \because AB = AC, \angle BAF = \angle PAD ,$$

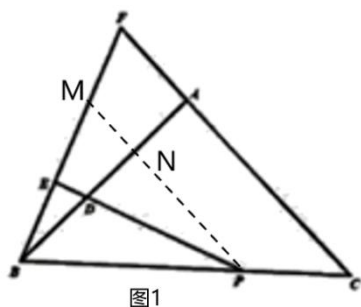
$$\therefore \triangle FBA \cong \triangle DPA (\text{ASA}),$$

$$\therefore BF = PD ,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}PD ;$$

②解: $BE = \frac{1}{2}PD$ 仍成立, 理由如下:

如图 1, 过 P 作 $PM \parallel AC$ 交 AB 于 N , 交 BF 于 M ,



$$\therefore \angle BNP = 90^\circ, \angle BPN = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle NBP = 45^\circ ,$$

$$\therefore BN = PN ,$$

$$\because \angle BPD = \frac{1}{2} \angle ACB ,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle MPE ,$$

同理①可证, $\triangle BPE \cong \triangle MPE (\text{ASA}),$

$$\therefore BE = ME = \frac{1}{2}BM ,$$

同理①可证, $\triangle MBN \cong \triangle DPN$ (ASA),

$$\therefore BM = DP,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}DP;$$

【小问2 详解】

解: 如图2, 过P作 $PH \parallel AC$ 交AB于G, 交BF于H,

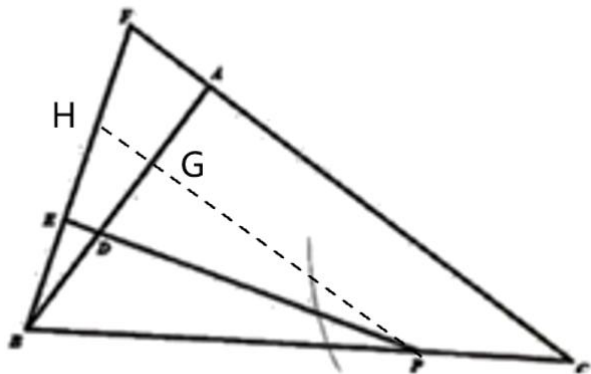


图2

同理 (1) 可证: $\triangle BEP \cong \triangle HEP$ (ASA),

$$\therefore BE = EH = \frac{1}{2}BH,$$

$$\because PH \parallel FC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGP = 90^\circ, \angle BGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBG + \angle BHG = 90^\circ, \angle DPG + \angle BHG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBG = \angle DPG,$$

$$\text{又} \because \angle BGH = \angle PGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PGD \sim \triangle BGH,$$

$$\therefore \frac{BH}{PD} = \frac{BG}{GP},$$

$$\text{又} \because PH \parallel FC,$$

$$\therefore \triangle BPG \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BG}{AB} = \frac{GP}{AC}, \text{ 即 } \frac{BG}{GP} = \frac{AB}{AC} = n,$$

$$\therefore \frac{BH}{PD} = \frac{BG}{GP} = n, \text{ 即 } \frac{2BE}{PD} = n,$$

$$\therefore \frac{BE}{PD} = \frac{n}{2}.$$

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，平行线的性质，相似三角形的判定与性质等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

