

九年级数学 2023 年 1 月

(用时 100 分钟)

一、选择题：(本大题共 6 题)

【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 在直角坐标平面内，如果点 $P(4,1)$ ，点 P 与原点 O 的连线与 x 轴正半轴的夹角是 α ，那么 $\cot \alpha$ 的值是 ()

- A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{\sqrt{17}}{17}$

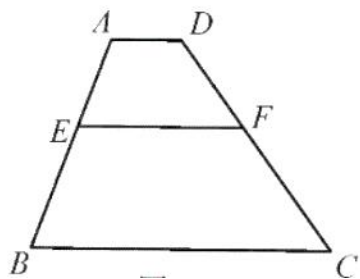
2. 关于抛物线 $y = (x-1)^2 - 2$ 以下说法正确的是 ()

- A. 抛物线在直线 $x = -1$ 右侧的部分是上升的
B. 抛物线在直线 $x = -1$ 右侧的部分是下降的
C. 抛物线在直线 $x = 1$ 右侧的部分是上升的
D. 抛物线在直线 $x = 1$ 右侧的部分是下降的

3. 二次函数 $y = 2x^2 + 8x + 5$ 的图像的顶点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 、 F 分别在腰 AB 、 CD 上，且 $EF \parallel BC$ ，下列比例成立的是 ()



- A. $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{EF}$ B. $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ C. $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{FC}$ D. $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC}$

5. 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，如果 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$ ，那么 ()

- A. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ B. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ C. $\overrightarrow{DO} = \vec{a} - \vec{b}$ D. $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a})$

6. 下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是 ()

- A. $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = \angle E = 50^\circ$
B. $\angle A = \angle D = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle E = 60^\circ$
C. $\angle A = \angle E$, $AB = 12$, $AC = 15$, $DE = 4$, $EF = 5$
D. $\angle A = \angle E$, $AB = 12$, $BC = 15$, $DE = 4$, $DF = 5$

二、填空题：(本大题共 12 题)

7. 计算: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - (3\vec{a} + 2\vec{b}) =$ _____.

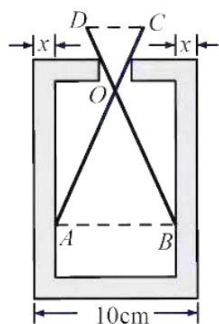
8. 如果一个二次函数的图像的对称轴是 y 轴, 且这个图像经过平移后能与 $y = 3x^2 + 2x$ 重合, 那么这个二次函数的解析式可以是_____. (只要写出一个)

9. 已知两个矩形相似, 第一个矩形的两边长分别是 3 和 4, 第二个矩形较短的一边长是 4, 那么第二个矩形较长的一边长是_____.

10. 已知 P 是线段 AB 上的黄金分割点, $AP > PB$, $AB = 4$, 那么线段 AP 的长是_____.

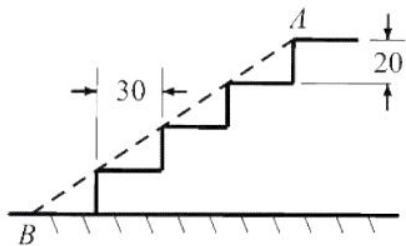
11. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 2、3、4, $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 且 $\triangle DEF$ 周长为 54, 那么 $\triangle DEF$ 的最短边的长是_____.

12. 图是一个零件的剖面图, 已知零件的外径为 10cm, 为求出它的厚度 x , 现用一个交叉卡钳 (AC 和 BD 的长相等) 去测量零件的内孔直径 AB . 如果 $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}$, 且量得 CD 的长是 3cm, 那么零件的厚度 x 是_____ cm.



13. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 已知 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{2}{3}$, 那么 $\angle B$ 的正弦值是_____.

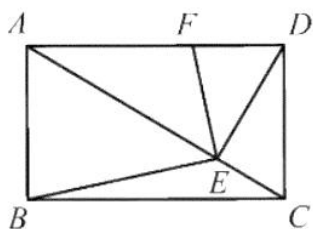
14. 如图, 某幢楼的楼梯每一级台阶的高度为 20 厘米, 宽度为 30 厘米. 那么斜面 AB 的坡度是_____.



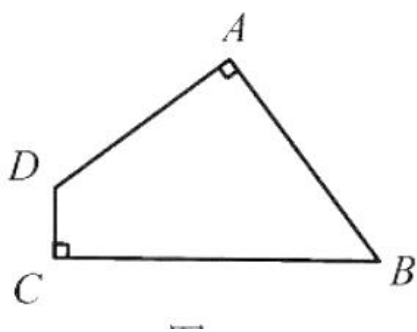
15. 在一块底边长为 20 厘米的等腰直角三角形铁皮上截一块矩形铁皮, 如果矩形的一边与等腰三角形的底边重合且长度为 x 厘米, 矩形另两个顶点分别在等腰直角三角形的两腰上, 设矩形面积为 y 平方厘米, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____. (不必写定义域)

16. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作 $GD \parallel AC$ 交边 AB 于点 D , 作 $GE \parallel AB$ 交边 AC 于点 E , 如果四边形 $ADGE$ 的面积为 2, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 过点 D 作对角线 AC 的垂线, 垂足为 E , 过点 E 作 BE 的垂线, 交边 AD 于点 F , 如果 $AB = 3$, $BC = 5$, 那么 DF 的长是_____.



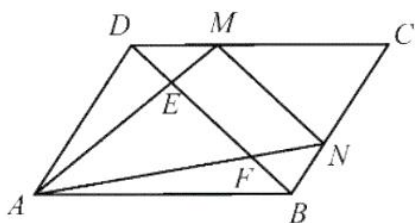
18. 将一张直角三角形纸片沿一条直线剪开，将其分成一张三角形纸片与一张四边形纸片，如果所得四边形纸片 $ABCD$ 如图所示，其中 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 7$ 厘米， $BC = 9$ 厘米， $CD = 2$ 厘米，那么原米的直角三角形纸片的面积是_____平方厘米.



三、解答题：(本大题共 7 题)

19. 计算： $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 30^\circ}$.

20. 已知：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别在边 DC 、 BC 上，对角线 BD 分别交 AM 、 AN 于点 E 、 F ，且 $DE : EF : BF = 1 : 2 : 1$.



- (1) 求证： $MN \parallel BD$ ；
- (2) 设 $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AN} = \vec{b}$ ，请直接写出 $\overrightarrow{BD}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.
21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y = x^2 + mx + m$.

- (1) 如果抛物线经过点 $(1, 9)$ ，求该抛物线的对称轴；
- (2) 如果抛物线的顶点在直线 $y = -x$ 上，求 m 的值.
22. 圭表 (如图 7) 是我国古代度量日影长度的天文仪器，它包括一根直立的杆 (称为“表”) 和一把南北方向水平放置且与杆垂直的标尺 (称为“圭”). 当正午的阳光照射在“表”上时，“表”的影子便会投射在“圭”上. 我国古代很多地区通过观察“表”在“圭”上的影子长度来测算二十四节气，并以此作为指导农事活动的重要依据. 例如，我国古代历法将一年中白昼最短的那一天 (当日正午“表”在“圭”上的影子长度为全年最

长) 定为冬至; 白昼最长的那一天 (当日正午“表”在“圭”上的影子长度为全年最短) 定为夏至.

某地发现一个圭表遗迹 (如图 8), 但由于“表”已损坏, 仅能测得“圭”上记录的夏至线与冬至线间的距离 (即 AB 的长) 为 11.3 米. 现已知该地冬至正午太阳高度角 (即 $\angle CBD$) 为 $35^{\circ}34'$, 夏至正午太阳高度角 (即 $\angle CAD$) 为 $82^{\circ}26'$, 请通过计算推测损坏的“表”原来的高度 (即 CD 的长) 约为多少米? (参考数据见表 1, 结果精确到个位)

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$35^{\circ}34'$	0.58	0.81	0.72
$82^{\circ}26'$	0.99	0.13	7.5

(注: 表 1 中三角比的值是近似值)

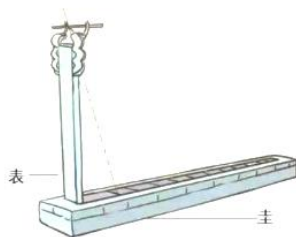


图 7

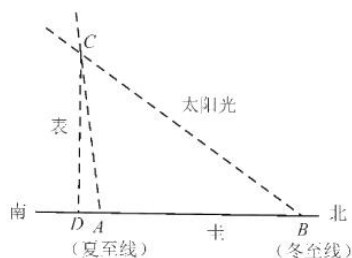
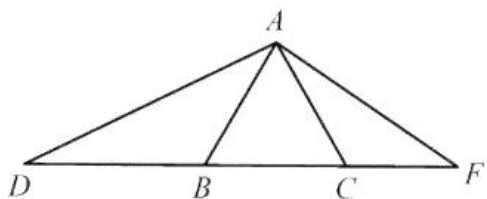


图 8

23. 已知: 如图, 点 D 、 F 分别在等边三角形 ABC 的边 CB 的延长线与反向延长线上, 且满足 $BD \cdot CF = BC^2$.

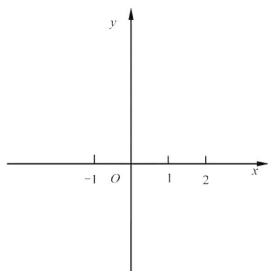


求证: (1) $\triangle ADB \sim \triangle FAC$;

(2) $AF \cdot AD = BC \cdot DF$.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(-1, y_1)$, $B(0, y_2)$, $C(1, y_3)$, $D(2, y_4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上.

(1) 当 $y_1 = 0, y_2 = y_3$ 时,



①求该抛物线的表达式;

②将该抛物线向下平移 2 个单位, 再向左平移 m 个单位后, 所得的新抛物线经过点 $(-1, 0)$, 求 m 的值;

(2) 若 $y_2 = 0$ ，且 y_1 、 y_3 、 y_4 中有且仅有一个值大于 0，请结合抛物线的位置和图像特征，先写出一个满足条件的 b 的值，再求 b 的取值范围.

25. 已知，如图 10，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $CD = 4$ ， $\cos \angle ACD = \frac{4}{5}$.

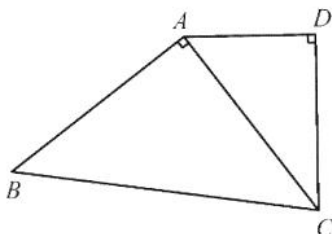


图 10

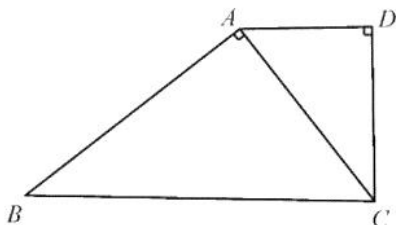
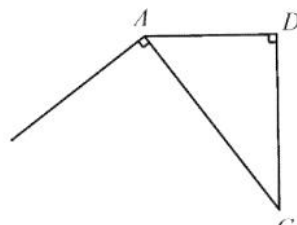


图 11



备用图

(1) 当 $BC \parallel AD$ 时 (如图 11)，求 AB 的长；

(2) 联结 BD ，交边 AC 于点 E ，

① 设 $CE = x$ ， $AB = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域；

② 当 $\triangle BDC$ 是等腰三角形时，求 AB 的长.

九年级数学参考答案

1. A 2. C 3. C 4. D 5. B 6. D

7. $3\vec{a} - 5\vec{b}$ 8. $y = 3x^2$ 9. $\frac{16}{3}$ 10. $2\sqrt{5} - 2$ 11. 12 12. $\frac{1}{2}$ 13. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

14. 1:1.5 15. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 10x$ 16. 9 17. $\frac{5}{9}$ 18. 54 或 $\frac{98}{3}$

$$19. = \frac{1+1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$$

$$20. (1) \frac{DE}{EB} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \frac{DM}{AB} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{BF}{DF} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \frac{BN}{AD} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{DM}{DC} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{3}, \quad MN \parallel BD$$

$$(2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{又} \frac{NC}{CB} = \frac{MN}{DB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{NM} = \frac{3}{2} (-\vec{b} + \vec{a}) = -\frac{3}{2} \vec{b} + \frac{3}{2} \vec{a}$$

$$21. (1) \quad q = 1 + 2m$$

$$m = 4$$

$$\therefore x_{\text{对}} = \frac{m}{-2} = -2$$

$$(2) \quad x_{\text{对}} = \frac{m}{-2}, \quad \therefore \text{顶} \left(-\frac{m}{2}, \frac{m}{2} \right)$$

$$\text{代入 } y = x^2 + mx + m$$

$$\text{得 } y_{\text{顶}} = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m = \frac{m}{2}$$

$$\frac{m^2}{4} = \frac{m}{2}$$

$$m = 0 \text{ 或 } m = 2$$

$$22. \text{ 设 } AD = x$$

$$\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{CD}{x} = 7.5$$

$$\text{则 } CD = 7.5x$$

$$\tan \angle B = \frac{CD}{BD} = 0.72, \quad \frac{7.5x}{x + 11.3} = 0.72$$

$$78x = 8.136$$

$$x = 1.2$$

$$\therefore CD = 7.5x = 9$$

$$\therefore CD \text{ 的长为 } 9 \text{ 米}$$

$$23. (1) \quad \angle ABD = \angle ACF = 120^\circ$$

$$BD \cdot CF = BC^2$$

$$\therefore BD \cdot CF = BA \cdot AC$$

$$\therefore \frac{BD}{AC} = \frac{BA}{CF}$$

$$\therefore \triangle DBA \sim \triangle ACF$$

$$(2) \text{ by } \triangle ADB \sim \triangle FAC$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \triangle FAC \sim \triangle FDA$$

$$\therefore \frac{CA}{AD} = \frac{AF}{DF}$$

$$\text{又 } AC = BC$$

$$\therefore BC \cdot DF = AF \cdot AD \text{ 证得}$$

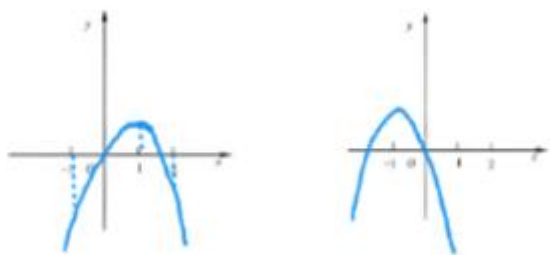
$$24. \text{ ①当 } y_1 = 0, y_2 = y_3 \text{ 时, } A(-1, y_1), B(0, y_2), C(1, y_3)$$

$$\text{则抛物线的对称轴为 } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \begin{cases} -1 - b + c = 0 \text{ ①} \\ \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \text{ ②} \end{cases}, \therefore \begin{cases} b = 1 \\ c = 2 \end{cases}, \therefore y = -x^2 + x + 2,$$

$$\text{②平移后的抛物线: } y = -\left(x - \frac{1}{2} + m\right)^2 + \frac{1}{4}, \therefore \text{平移后的抛物线经过 } (-1, 0), \therefore 0 = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \therefore$$

$$m = 1 \text{ 或 } m = 2.$$



$$(2) \because y_2 = 0, \therefore \text{抛物线解析式为 } y = -x^2 + bx$$

1°. 当对称轴在 y 轴右侧时, 如图

$$\text{则 } f(1) > 0, f(2) \leq 0, f(-1) < 0$$

$$\text{即 } \begin{cases} -1 + b > 0 \text{ ①} \\ -4 + 2b \leq 0 \text{ ②} \\ -1 - b < 0 \text{ ③} \end{cases} \Rightarrow 1 < b \leq 2.$$

2°. 当对称轴在 y 轴左侧时, 如图.

$$\text{则 } f(1) < 0, f(2) < 0, f(-1) > 0$$

$$\text{即} \begin{cases} -1+b < 0 \text{①} \\ -4+2b < 0 \text{②} \Rightarrow b < 1, \\ -1-b > 0 \text{③} \end{cases}$$

$$\therefore b < 1 \text{ 或 } 1 < b \leq 2.$$

25. (1) 当 $BC \parallel AD$ 时, $\therefore \angle DAC = \angle ACB$,

$$\because \angle D = 90^\circ, \quad CD = 4, \quad \cos \angle ACD = \frac{4}{5}, \quad \therefore AC = 5,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \quad \tan \angle ACD = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}, \quad \therefore AB = \frac{20}{3}.$$

(2) 过 B 作 $BG \perp AB$ 交 DA 延长线于 G ,

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \quad \therefore \angle BAG + \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\angle ADC = 90^\circ, \quad \therefore \angle DAC + \angle DCA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAG = \angle ACD$$

$$\text{在 } Rt\triangle BAG \text{ 中, } \tan \angle BAG = \frac{BG}{AB} = \frac{3}{4}, \quad \therefore BG = \frac{3}{4}y, \quad AG = \frac{5}{4}y$$

$$DG = 3 + \frac{5}{4}, \quad \because AE \parallel BG, \quad \therefore \frac{AE}{BG} = \frac{AD}{DG}, \quad \text{即 } \frac{5-x}{\frac{3}{4}y} = \frac{3}{3+\frac{5}{4}y}$$

$$\therefore y = \frac{60-12x}{5x-16} \left(\frac{16}{5} < x < 5 \right).$$

(3) ① $\because AC > CD$, $BC > AC$, $\therefore BC > CD$, $\therefore CD \neq BC$.

② 当 $BD = BC$ 时, 过 B 作 $BG \perp CD$ 于 F , 过 B 作 $BG \perp AD$ 于 G .

$$\because BD = BC, \quad BF \perp CD, \quad \therefore DF = CF = 2$$

易证 $\angle BAG = \angle ACD$, 在 $Rt\triangle ABG$ 中, 设 $BG = 3a$,

$$AG = 4a, \quad AB = 5a, \quad \because GBFO \text{ 是矩形}, \quad \therefore DF = BG = 3a, \quad \therefore a = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AB = 5a = \frac{10}{3}.$$

③ 当 $BD = CD$ 时, 由②: $DF = BG = 3a$, $BF = DG = 4a + 3$,

$$\text{在 } Rt\triangle DBF \text{ 中, } BF^2 + DF^2 = BD^2, \quad \therefore (4a+3)^2 + (3a)^2 = 16, \quad \therefore a = \frac{\sqrt{319}-12}{25}$$

$$\therefore AB = 5a = \frac{\sqrt{319}-12}{5}$$

$$\therefore AB = \frac{10}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{319}-12}{5}.$$

