

2023 学年第一学期九年级期终学业质量调研

数学试卷

(时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列图形中, 一定相似的是 ()

- A. 两个等腰三角形 B. 两个菱形 C. 两个正方形 D. 两个等腰梯形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了相似图形的定义, 根据“对应角相等, 对应边成比例的图形相似”逐个判断即可.

【详解】解: A、两个等腰三角形的边不一定成比例, 角不一定相等, 所以不一定相似, 故本选项不符合题意.

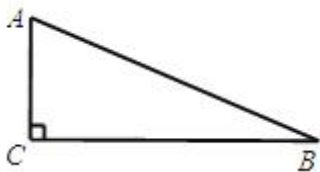
B、两个菱形的对应边成比例, 角不一定相等, 所以不一定相似, 故本选项不符合题意;

C、两个正方形角都是直角一定相等, 四条边都相等一定成比例, 所以一定相似, 故本选项符合题意;

D、两个等腰梯形的边不一定成比例, 角不一定相等, 所以不一定相似, 故本选项不符合题意;

故选 C.

2. 已知, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $AC = 5$, 则 $\cos A$ 的值是 ()



- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

【答案】C

【解析】

【分析】首先利用勾股定理求得斜边 AB 的长, 然后利用三角函数的定义即可求解.

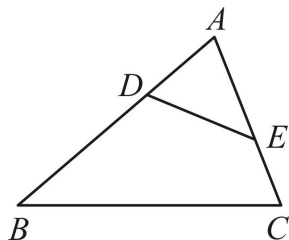
【详解】解: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

则 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$

故选 C.

【点睛】 本题考查勾股定理以及三角函数，解题关键是理解三角函数的定义.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $\angle ADE = \angle C$ ，则下列判断错误的是 ()



A. $\angle AED = \angle B$

B. $DE \cdot AC = BC \cdot AE$

C. $AD \cdot AB = AE \cdot AC$

D. $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质. 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，则 $\angle AED = \angle B$ ， $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$ ， $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$ ，然后利用性质对各选项

进行判断作答即可.

【详解】 解： $\because \angle ADE = \angle C$ ， $\angle DAE = \angle CAB$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle B, \quad \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}, \quad \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2,$$

$$\therefore DE \cdot AC = BC \cdot AD, \quad AD \cdot AB = AE \cdot AC,$$

A、C、D 正确，故不符合要求；B 错误，故符合要求；

故选：B.

4. 下列说法中，正确的是 ()

A. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

B. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $e = 1$

C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$

D. 如果 $\vec{a}$ 非零向量，且 $b = -2a$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查向量的相关概念，根据向量的概念和性质逐项判断即可.

【详解】解：A、 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，所以 A 错误，不符合题意.

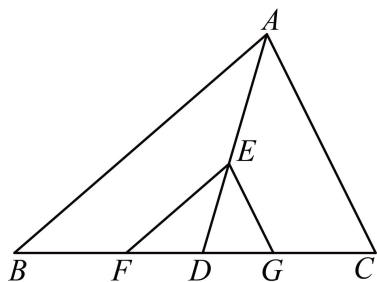
B、如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $|\vec{e}| = 1$ ，所以 B 错误，不符合题意.

C、如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$ ，这两个向量方向不一定相同，所以 C 错误，不符合题意.

D、如果 $\vec{a}$ 非零向量，且 $\vec{b} = -2\vec{a}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，D 正确，符合题意.

故选：D.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 点 E 在线段 AD 上, 点 F, G 在边 BC 上, 且 $EF \parallel AB, EG \parallel AC$, 则下列结论一定正确的是 ()



A. $\frac{EF}{AB} = \frac{AC}{EG}$

B. $\frac{BF}{FD} = \frac{DG}{GC}$

C. $\frac{DF}{DE} = \frac{DC}{DA}$

D. $\frac{BD}{FD} = \frac{AC}{EG}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例，解题的关键是掌握相似三角形对应边成比例. 根据题意得出 $\triangle DEF \sim \triangle DAB, \triangle DEF \sim \triangle DAC$ ，再逐个判断即可.

【详解】解：A、 $\because EF \parallel AB, EG \parallel AC$,

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAB, \triangle DEF \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{DE}{DA}, \frac{EG}{AC} = \frac{DE}{DA},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC}, \text{ 故 A 不正确, 不符合题意;}$$

$$\text{B、} \because EF \parallel AB, EG \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{BF}{FD} = \frac{AE}{ED}, \frac{GC}{DG} = \frac{AE}{ED},$$

$$\therefore \frac{BF}{FD} = \frac{GC}{DG}, \text{ 故 B 不正确, 不符合题意;}$$

$$\text{C、} \because EF \parallel AB, EG \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAB, \triangle DEF \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{DF}{DB} = \frac{DE}{DA}, \text{ 则 } \frac{DF}{DE} = \frac{DB}{DA},$$

当 $DB = DC$ 时, $\frac{DF}{DE} = \frac{DC}{DA}$, 故 C 不正确, 不符合题意;

D、 $\because EF \parallel AB, EG \parallel AC$,

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAB, \triangle DEF \sim \triangle DAC,$$

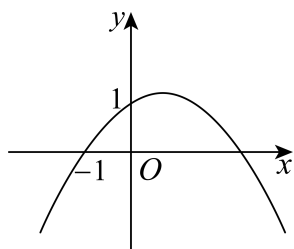
$$\therefore \frac{BD}{FD} = \frac{AD}{ED}, \frac{AC}{EG} = \frac{AD}{ED},$$

$$\therefore \frac{BD}{FD} = \frac{AC}{EG}, \text{ 故 D 正确, 符合题意;}$$

故选: D.

6. 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像的顶点在第一象限, 且过点 $(0, 1)$ 和 $(-1, 0)$, 下列结论:

① $c = 1$; ② $ab < 0$; ③ $a - b + c = 0$; ④ 当 $x > -1$ 时, $y > 0$. 其中正确结论的个数是()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 将 $(0, 1)$ 代入解析式, 可得 $c = 1$, 即可判断①, 根据抛物线开口方向得 $a < 0$, 利用对称轴在 y 轴的右侧得 $b > 0$, 可得 $ab < 0$, 即可判断②; 将点 $(-1, 0)$ 代入解析式可得 $a - b + c = 0$, 即可判断③, 观察函数图象得到 $x > -1$ 时, 抛物线有部分在 x 轴上方, 有部分在 x 轴下方, 即可判断④.

【详解】 解: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像的顶点在第一象限, 且过点 $(0, 1)$ 和 $(-1, 0)$,

$\therefore c = 1, a - b + c = 0$, 故①③正确;

$\because$ 根据抛物线开口方向得 $a < 0$, 利用对称轴在 y 轴的右侧得 $b > 0$,

$\therefore ab < 0$, 故②正确;

观察函数图象得到 $x > -1$ 时, 抛物线有部分在 x 轴上方, 有部分在 x 轴下方, 则 $y > 0$ 或 $y = 0$ 或 $y < 0$, 故④不正确,

故选: C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, 那么 $\frac{a-b}{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的性质, 设 $a = 4k, b = 3k$, 将其代入 $\frac{a-b}{b}$ 进行计算即可.

【详解】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 设 $a = 4k, b = 3k$,

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{4k-3k}{3k} = \frac{1}{3},$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

8. 已知线段 $AB = 2$, 点 P 是 AB 的黄金分割点, 且 $AP < BP$. 那么 $BP =$ _____.

【答案】 $-1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了黄金分割, 公式法解一元二次方程. 熟练掌握黄金分割, 公式法解一元二次方程是解题的关键.

由题意知, $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB}$, 即 $BP^2 + 2BP - 4 = 0$, 计算求出满足要求的解即可.

【详解】 解: 由题意知, $\frac{AP}{BP} = \frac{BP}{AB}$,

$$\therefore \frac{AB-BP}{BP} = \frac{BP}{AB}, \text{ 即 } BP^2 + 2BP - 4 = 0,$$

$$\therefore BP = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5},$$

解得, $BP = -1 + \sqrt{5}$ 或 $BP = -1 - \sqrt{5}$ (舍去),

故答案为: $-1 + \sqrt{5}$.

9. 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相同, 且 $|\vec{a}| = 3$, 那么 $\vec{a} =$ _____. (用向量 $\vec{e}$ 的式子表示)

【答案】 $3\vec{e}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 熟练掌握单位向量以及向量同向的定义是解题的关键. 根据“单位向量是指模等于 1 的向量”以及“向量同向意味着它们的方向角度相同”即可解答.

【详解】 解: $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相同, $|\vec{a}| = 3$,

$$\therefore \vec{a} = 3\vec{e},$$

故答案为: $3\vec{e}$.

10. 如果两个相似三角形的周长的比等于1:3, 那么它们的面积的比等于_____.

【答案】 1:9

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质, 熟知“相似三角形的周长比等于相似比, 面积比等于相似比的平方”是解题关键. 根据两个相似三角形的周长的比等于1:3, 得到相似比为1:3, 即可得到它们的面积比等于1:9.

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的周长的比等于1:3,

$\therefore$ 这两个相似三角形的相似比是1:3,

$\therefore$ 它们的面积比等于1:9.

故答案为: 1:9

11. 如果抛物线 $y = x^2 + bx + 2$ 的对称轴是直线 $x = 2$, 那么 b 的值等于_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的对称轴, 根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 即可解答.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + 2$ 的对称轴是直线 $x = 2$,

$$\therefore -\frac{b}{2} = 2,$$

解得: $b = -4$,

故答案为: -4.

12. 如果点 $A(2, y_1)$ 和点 $B(3, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 + m$ (m 常数) 上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=”、“<”)

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的增减性, 解题的关键是掌握 $a > 0$ 时, 函数开口向上, 在对称轴左边, y 随 x 的增大而减小, 在对称轴右边, y 随 x 的增大而增大, $a < 0$ 时, 函数开口向下, 在对称轴左边, y 随 x 的增大而增大, 在对称轴右边, y 随 x 的增大而减小. 据此即可解答.

【详解】解： $\because y = x^2 + m$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为 y 轴，开口向上，

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\because 2 < 3$,

$\therefore y_1 < y_2$,

故答案为：<.

13. 如图，某人沿着斜坡 AB 方向往上前进了 30 米，他的垂直高度上升了 15 米，那么斜坡 AB 的坡比 $i =$ _____.



【答案】 $1:\sqrt{3}$

【解析】

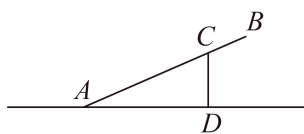
【分析】 本题主要考查了求正切值，解题的关键是掌握坡比等于坡角的正切值，先根据勾股定理求出前进的水平距离，再根据正切的定义求解即可.

【详解】 解：根据题意可得： $AC = 30\text{m}$, $BC = 15\text{m}$,

根据勾股定理可得： $AD = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 15\sqrt{3}(\text{m})$,

$\therefore i = BC : AD = 15 : 15\sqrt{3} = 1:\sqrt{3}$,

故答案为： $1:\sqrt{3}$.



14. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点在 x 轴的正半轴上，那么这条抛物线的表达式可以是 _____ . (只需写一个)

【答案】 $y = x^2 - 2x + 1$ (答案不唯一)

【解析】

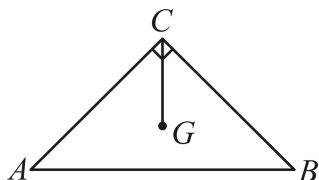
【分析】 本题主要考查了二次函数的表达式，解题的关键是掌握二次函数 $y = a(x - k)^2 + h$ 的顶点坐标为 (h, k) .

【详解】解：当 $a=1$ ，顶点坐标为 $(1,0)$ 时，

抛物线的表达式为： $y=(x-1)^2=x^2-2x+1$ ，

故答案为： $y=x^2-2x+1$ （答案不唯一）.

15. 如图，点 G 为等腰直角三角形 ABC 的重心， $\angle ACB=90^\circ$ ，连接 CG ，如果 $AC=3\sqrt{2}$ ，那么 $CG=$ _____.



【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形中心的性质，全等三角形和相似三角形的判定和性质，解题的关键是掌握三角形的中心是三角形三条中线的交点. 延长 CG 交 AB 于点 E ，连接 AG 并延长，交 BC 于点 F ，过点 A 作 BC 的平行线，交 AG 延长线于点 D ，通过证明 $\triangle DAE \cong \triangle CBE$ (AAS)，得出 $DE=CE=3$ ， $AD=BC$ ，则 $CD=6$ ，再证明 $\triangle CFG \sim \triangle DAG$ ，推出 $\frac{CG}{CD}=\frac{1}{3}$ ，即可求解.

【详解】解：延长 CG 交 AB 于点 E ，连接 AG 并延长，交 BC 于点 F ，过点 A 作 BC 的平行线，交 AG 延长线于点 D ，

$\because AC=3\sqrt{2}$ ， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=6$ ，

$\because$ 点 G 为三角形 ABC 的重心，

$\therefore AF, CE$ 为 $\triangle ABC$ 中线，

$\therefore AE=BE$ ， $CE=\frac{1}{2}AB=3$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle D=\angle BCE, \angle DAE=\angle B$ ，

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle CBE$ 中，

$$\begin{cases} \angle D=\angle BCE \\ \angle DAE=\angle B, \\ AE=BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle CBE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DE = CE = 3, \quad AD = BC,$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle CFG \sim \triangle DAG,$$

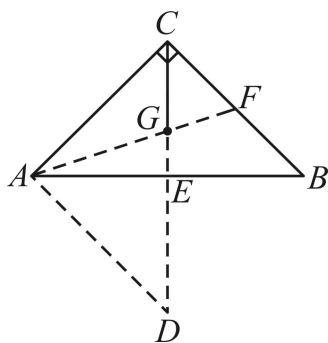
$$\therefore \frac{CF}{AD} = \frac{CG}{BC} = \frac{CG}{DG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{CG}{CD} = \frac{1}{3},$$

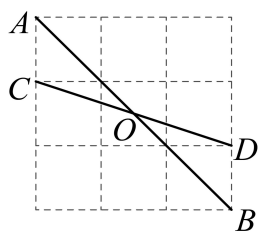
$$\text{即 } \frac{CG}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\text{解得: } CG = 2,$$

故答案为: 2.



16. 如图, 在边长相同的小正方形组成的网格中, 点 A 、 B 、 C 、 D 都在这些小正方形的顶点上, AB 、 CD 相交于点 O , 那么 $\sin \angle BOD$ 的值为_____.

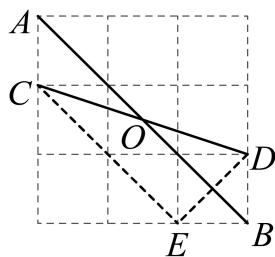


【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】如图, C 向下 2 个格点, 向右 2 个格点为 E , 连接 CE , DE , $CE \parallel AB$, 设正方形的边长为 a , 由勾股定理得 $CE = 2\sqrt{2}a$, $DE = \sqrt{2}a$, $CD = \sqrt{10}a$, 由 $CE^2 + DE^2 = CD^2$, 可知 $\triangle CDE$ 是直角三角形, $\angle CED = 90^\circ$, 则 $\sin \angle ECD = \frac{DE}{CD}$, 由 $CE \parallel AB$, 可得 $\sin \angle BOD = \sin \angle ECD$, 计算求解即可.

【详解】解: 如图, C 向下 2 个格点, 向右 2 个格点为 E , 连接 CE , DE , $CE \parallel AB$,



设正方形的边长为 a ,

$$\therefore CE = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a, \quad DE = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a, \quad CD = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a,$$

$$\therefore (2\sqrt{2}a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 = 10a^2 = (\sqrt{10}a)^2,$$

$$\therefore CE^2 + DE^2 = CD^2,$$

$\therefore \triangle CDE$ 是直角三角形, $\angle CED = 90^\circ$,

$$\therefore \sin \angle ECD = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

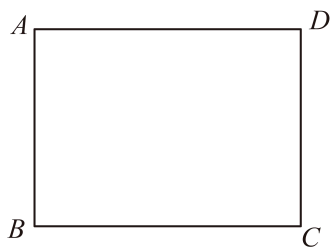
$\therefore CE \parallel AB$,

$$\therefore \sin \angle BOD = \sin \angle ECD = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】 本题考查了勾股定理, 勾股定理的逆定理, 正弦, 平行线的性质. 熟练掌握勾股定理, 勾股定理的逆定理, 正弦, 平行线的性质是解题的关键.

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 4$, 点 E 在边 AD 上, 将 $\triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折, 点 D 的对应点为点 G . 延长 DG 交边 AB 于点 F , 如果 $BF = 1$, 那么 DE 的长为_____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的折叠问题, 相似三角形的判定和性质, 解题的关键是熟练掌握相关性质定理, 正确作出辅助线, 构造相似三角形. 过点 G 作 $MN \parallel AB$, MN 交 AD 于点 M , 交 BC 于点 N , 先得出 $AF = AB - BF = 2$, 通过证明 $\triangle DMG \sim \triangle DAF$, 得出 $\frac{GM}{DM} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{GM}{CN} = \frac{1}{2}$, 根据折叠的性质得出

$CG = CD = 3, DE = GE, \angle CGE = \angle CDE = 90^\circ$, 进而求证 $\triangle MEG \sim \triangle NGC$, 则 $\frac{GE}{CG} = \frac{GM}{CN} = \frac{1}{2}$, 求出 $GE = \frac{3}{2}$, 即可求解.

【详解】解: 过点 G 作 $MN \parallel AB$, MN 交 AD 于点 M , 交 BC 于点 N ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, $MN \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 为矩形,

$\because BF = 1, AB = 3$,

$\therefore AF = AB - BF = 2$,

$\because MN \parallel AB$,

$\therefore \triangle DMG \sim \triangle DAF$,

$$\therefore \frac{GM}{AF} = \frac{DM}{AD},$$

$$\text{即 } \frac{GM}{2} = \frac{DM}{4},$$

$$\text{整理得: } \frac{GM}{DM} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{GM}{CN} = \frac{1}{2},$$

$\because \triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折得到 $\triangle CGE$,

$\therefore CG = CD = 3, DE = GE, \angle CGE = \angle CDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle MGE + \angle NGC = 90^\circ$,

$\because \angle MGE + \angle MEG = 90^\circ$,

$\therefore \angle NGC = \angle MEG$,

$\therefore \triangle MEG \sim \triangle NGC$,

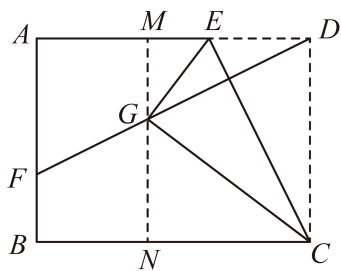
$$\therefore \frac{GE}{CG} = \frac{GM}{CN} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{GE}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } GE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore DE = \frac{3}{2},$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

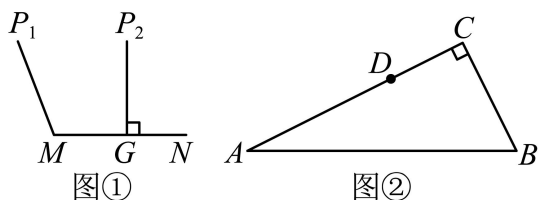


18. 规定：平面上一点到一个图形的距离是指这点与这个图形上各点的距离中最短的距离。如图①当 $\angle P_1MN > 90^\circ$ 时，线段 P_1M 的长度是点 P_1 到线 MN 的距离；当 $\angle P_2GN = 90^\circ$ 时，线段 P_2G 的长度是点 P_2

到线段 MN 的距离；如图②，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3\sqrt{5}$ ， $\tan B = 2$ ，点 D 为边 AC 上一点，

$AD = 2DC$ ，如果点 Q 为边 AB 上一点，且点 Q 到线段 DC 的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ，设 AQ 的长为 d ，那么 d

的取值范围为_____。



【答案】 $4 - \frac{4}{5}\sqrt{5} < d < 6$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，解题的关键是理解题目所给平面上一点到一个图形的距离的定义。根据题意进行分类讨论：当点 Q 到线段 DC 的距离为垂线段时，当点 Q 到线段 DC 的距离为 DQ 时，即可解答。

【详解】 解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3\sqrt{5}$ ， $\tan B = 2$ ，

$$\therefore BC = \frac{AC}{\tan B} = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$\text{根据勾股定理可得： } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{15}{2},$$

当点 Q 到线段 DC 的距离为垂线段时，过点 Q 作 $QH \perp CD$ 于点 H ，

$$\text{当 } QH = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 时，}$$

$$\because QH \perp CD, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore QH \parallel BC,$$

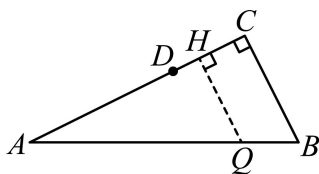
$$\therefore \triangle AQH \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{QH}{BC} = \frac{AQ}{AB}, \text{ 即 } \frac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{AQ}{\frac{15}{2}},$$

$$\text{解得: } AQ = 6,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 到线段 } DC \text{ 的距离不超过 } \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore d < 6,$$



当点 Q 到线段 DC 的距离为 DQ 时, 过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G ,

$$\text{当 } QD = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 时,}$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{5}, \quad AD = 2DC,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{5}, \quad CD = \sqrt{5},$$

$$\therefore DG \perp AB, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle DGA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ADG$$

$$\therefore \tan \angle ADG = \tan B = 2,$$

$$\text{则 } \frac{AG}{DG} = 2,$$

$$\text{设 } DG = x, \text{ 则 } AG = 2x,$$

$$\text{在 Rt} \triangle ADQ \text{ 中, 根据勾股定理可得: } DG^2 + AG^2 = AD^2,$$

$$\text{即 } x^2 + (2x)^2 = (2\sqrt{5})^2,$$

$$\text{解得: } x = 2,$$

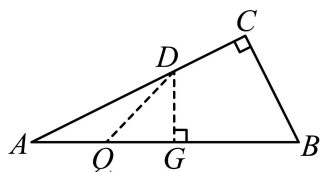
$$\text{则 } DG = 2, \quad AD = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle DQG$ 中, 根据勾股定理可得: $QG = \sqrt{DQ^2 - DG^2} = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 2^2} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$,

$$\therefore AQ = 4 - \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$\therefore$ 点 Q 到线段 DC 的距离不超过 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore d > 4 - \frac{4}{5}\sqrt{5},$$



综上: $4 - \frac{4}{5}\sqrt{5} < d < 6$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\sqrt{(1 - \cot 30^\circ)^2} - 2\sin 45^\circ + (\cos 30^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 60^\circ - \sqrt{2}}$.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角度的锐角三角函数值的混合运算, 解题的关键是熟记各个特殊角度的锐角三角函数值. 先将各个特殊角度的锐角三角函数值化简, 再进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{(1 - \cot 30^\circ)^2} - 2\sin 45^\circ + (\cos 30^\circ)^0 + \frac{1}{\tan 60^\circ - \sqrt{2}}$

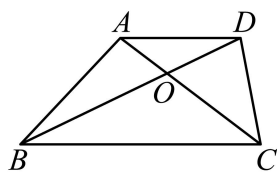
$$= \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$= (\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 0.$$

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $BC = 2AD$, $OD = 1$.



(1) 求 BD 的长;

(2) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{OB}$.

【答案】 (1) 3 (2) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 平面向量, 熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

(1) 根据 $AD \parallel BC$, 得出 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 则 $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, 进而得出 $OB = 2$, 最后根据

$BD = OB + OD$ 即可求解;

(2) 先得出 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$, 则 $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, 进而得出 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, 由 (1) 可得 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$, 则 $OB = \frac{2}{3}DB$, 进而得出 $\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because BC = 2AD$,

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$,

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\because OD = 1$,

$$\therefore \frac{1}{OB} = \frac{1}{2},$$

解得: $OB = 2$,

$$\therefore BD = OB + OD = 2 + 1 = 3;$$

【小问 2 详解】

解: $\because BC = 2AD$, $AD \parallel BC$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\vec{b},$$

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

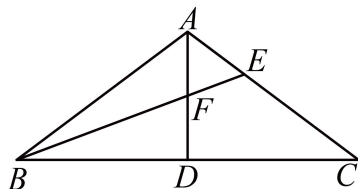
$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

由 (1) 可得 $\frac{OD}{OB} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore OB = \frac{2}{3}DB,$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DB} = \frac{2}{3} \left(\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}.$$

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $\tan C = \frac{3}{4}$, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交边 BC 于点 D , 点 E 在边 AC 上, 且 $EC = 2AE$, BE 与 AD 相交于点 F .



(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $EF:BF$ 的值.

【答案】(1) $BC = 8$;

(2) $EF:BF$ 的值为 $\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质和三角函数, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 根据等腰三角形的性质得出 $AD \perp BC$, $BD = CD$, 根据 $\tan C = \frac{3}{4} = \frac{AD}{CD}$, 可设 $AD = 3a$, $CD = 4a$, 根据勾股定理得出 $AC = 5a$, 进而求出 $a = 1$, 得出 $AD = 3$, $CD = 4$, 即可得出答案;

(2) 先得出 $\triangle CEG \sim \triangle CAD$, $\triangle BEG \sim \triangle BFD$, 根据相似三角形的性质得出 $\frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CD}$, 再得出 $EC = \frac{2}{3} AC$, 进而得出 $\frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3}$, 由 $\triangle BEG \sim \triangle BFD$, 得出 $\frac{BF}{BE} = \frac{BD}{BG} = \frac{3}{4}$, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

$\because AB = AC = 5$, AD 平分 $\angle BAC$,

$\therefore AD \perp BC$, $BD = CD$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\tan C = \frac{3}{4} = \frac{AD}{CD}$,

设 $AD = 3a$, $CD = 4a$,

由勾股定理得: $AC^2 = AD^2 + CD^2$, 即 $AC^2 = (3a)^2 + (4a)^2$,

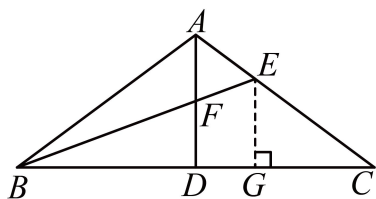
$\therefore AC = 5a = 5$, 解得 $a = 1$,

$\therefore AD = 3$, $CD = 4$,

$\therefore BC = BD + CD = 8$;

【小问 2 详解】

过 E 作 $EG \perp BC$ 于点 G ,



由 (1) 得: $AD \perp BC$,

$\therefore EG \parallel AD$,

$\therefore \triangle CEG \sim \triangle CAD$, $\triangle BEG \sim \triangle BFD$,

$$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CD},$$

$$\therefore EC = 2AE,$$

$$\therefore EC = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore \frac{CE}{CA} = \frac{CG}{CD} = \frac{2}{3},$$

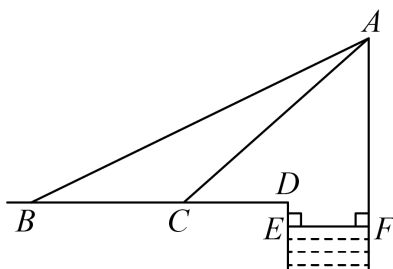
由 $\triangle BEG \sim \triangle BFD$,

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{BD}{BG} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF:BF \text{ 的值为 } \frac{1}{3}.$$

22. 北淀浦河上的浦仓路桥是一座融合江南水乡文化气息的现代空间钢结构人行廊桥. 某校九年级数学兴趣小组开展了测量“浦仓路桥顶部到水面的距离”的实践活动, 他们的操作方法如下: 如图, 在河的一侧选取 B 、 C 两点, 在 B 处测得浦仓路桥顶部点 A 的仰角为 22° , 再往浦仓路桥桥顶所在的方向前进 17 米至 C 处, 在 C 处测得点 A 的仰角为 37° , 在 D 处测得地面 BD 到水面 EF 的距离 DE 为 1.2 米 (点 B 、 C 、 D 在一条直线上, $BD \parallel EF$, $DE \perp EF$, $AF \perp EF$), 求浦仓路桥顶部 A 到水面的距离 AF . (精确到 0.1 米) (参考数据: $\sin 22^\circ \approx 0.37$, $\cos 22^\circ \approx 0.93$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$; $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

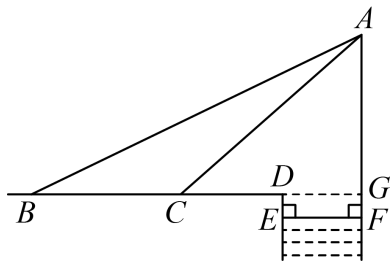


【答案】 浦仓路桥顶部 A 到水面的距离 AF 约为 15.8 米.

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用，延长 BD 交 AF 于点 G ，结合题干的条件，设 $CG = x$ 米，则 $BG = (x + 17)$ 米，分别在 $Rt\triangle ACG$ 和 $Rt\triangle ABG$ 中，利用锐角三角函数表示出 AG 的长，列出关于 x 的方程，算出 x ，最后利用 $AF = AG + FG$ ，即可解题.

【详解】 解： 延长 BD 交 AF 于点 G ，如图所示：



由题意得： $BG \perp AF$ ， $DE = GF = 1.2$ 米， $BC = 17$ 米，

设 $CG = x$ 米， 则 $BG = BC + CG = (x + 17)$ 米，

在 $Rt\triangle ACG$ 中， 由题知 $\angle ACG = 37^\circ$ ，

$$\therefore AG = CG \cdot \tan 37^\circ \approx 0.75x \quad (\text{米}),$$

在 $Rt\triangle ABG$ 中， 由题知 $\angle ABG = 22^\circ$ ，

$$\therefore AG = BG \cdot \tan 22^\circ \approx 0.4(x + 17) \quad (\text{米}),$$

$$\therefore 0.75x = 0.4(x + 17),$$

$$\text{解得 } x = \frac{136}{7},$$

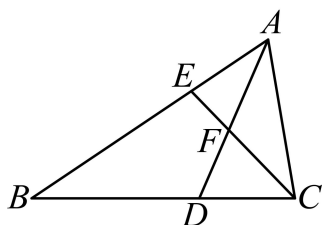
$$\therefore AG \approx \frac{136}{7} \times 0.75 = \frac{102}{7},$$

$$\therefore AF = AG + GF = \frac{102}{7} + 1.2 \approx 15.8 \quad (\text{米}),$$

答： 浦仓路桥顶部 A 到水面的距离 AF 约为 15.8 米.

23. 已知： 如图， 在 $\triangle ABC$ 中， 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上， AD 与 CE 相交于点 F ， $CD = CF$ ，

$$AC^2 = AE \cdot AB.$$



(1) 求证： $\triangle ABD \sim \triangle ACF$ ；

(2) 如果 $\angle CFD = 2\angle ACF$ ， 求证： $AB \cdot EF = AD \cdot AE$.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 先由 $AC^2 = AE \cdot AB$, $\angle CAE = \angle BAC$ 得到 $\triangle CAE \sim \triangle BAC$, 再根据性质可得 $\angle ACE = \angle ABC$, 由 $CD = CF$ 和等角的补角相等, 得出 $\angle BDA = \angle CFA$, 即可求证;

(2) 由 $\triangle ABD \sim \triangle ACF$, 得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$, $\angle B = \angle ACF$, $\angle FAC = \angle DAB$, 则有 $\angle CDF = \angle CFD = 2\angle ACF$, 从而证明 $\triangle EAF \sim \triangle ECA$, 可得 $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AE}$, 故可证明;

此题考查了相似三角形的性质与判定.

【小问 1 详解】

证明: $\because AC^2 = AE \cdot AB$,

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\because \angle CAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle CAE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABC,$$

$$\because CD = CF,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CFD,$$

$$\because \angle BDA + \angle FDC = 180^\circ, \angle AFC + \angle DFC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CFA,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACF;$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 得: $\triangle ABD \sim \triangle ACF$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}, \angle B = \angle ACF, \angle FAC = \angle DAB,$$

$$\because CD = CF,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CFD = 2\angle ACF,$$

$$\because \angle FDC = \angle B + \angle DAB, \angle CFD = \angle FAC + \angle ACF,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle FCA, \angle B = \angle BAD$$

$$\therefore AF = FC, AD = BD,$$

$$\because \angle AEC = \angle AEC, \angle EAD = \angle ACE,$$

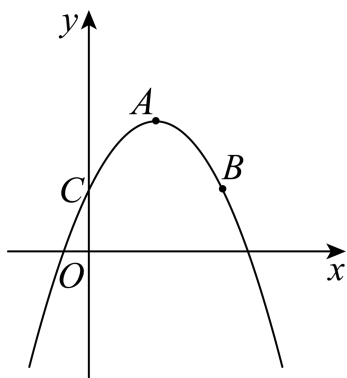
$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle ECA,$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore AB \cdot EF = AD \cdot AE.$$

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 过点 $A(1, 2)$ 和点 $B(2, 1)$ ，与 y 轴交于点 C 。



(1) 求 a 、 b 的值和点 C 的坐标；

(2) 点 P 为抛物线上一点（不与点 A 重合），当 $\angle PCB = \angle ACB$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，平移该抛物线，使其顶点在射线 CA 上，设平移后的抛物线的顶点为点 D ，当 $\triangle CDP$ 与 $\triangle CAP$ 相似时，求平移后的抛物线的表达式。

【答案】 (1) $a = -1$, $b = 2$, $C(0, 1)$,

(2) $P(3, -2)$;

(3) $y = -(x - 9)^2 + 10$.

【解析】

【分析】 (1) 由待定系数法即可求解；

(2) 证明 $\angle ACB = 45^\circ = \angle PCB$ ，则直线 CP 的表达式为 $y = -x + 1$ ，即可求解；

(3) 当 $\triangle CDP$ 与 $\triangle CAP$ 相似时，证明 $\angle APC = \angle CDP$ ，得到 $\triangle CPA \sim \triangle CDP$ ，则 $PC^2 = AC \cdot CD$ ，即可求解；

本题考查了二次函数综合运用，涉及到三角形相似、一次函数的图象和性质等，解题的关键是熟练掌握知识点的应用。

【小问 1 详解】

由题意得：

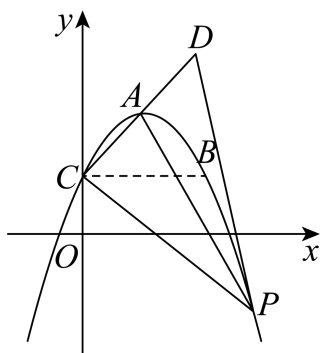
$$\begin{cases} a+b+1=2 \\ 4a+2b+1=1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases},$$

当 $x=0$ 时, $y=1$, 则 $C(0,1)$,

【小问 2 详解】

$$\text{由 (1) 得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+1$ ①,



由点 B 、 C 的坐标知, $BC \parallel x$ 轴,

由点 A 、 C 的坐标知, $\angle ACB = 45^\circ = \angle PCB$,

则直线 CP 的表达式为: $y=-x+1$ ②,

联立 ①② 得: $-x+1=-x^2+2x+1$, 解得: $x=0$ (舍去) 或 3 ,

$\therefore x=3$ 时, $y=-2$,

则点 $P(3,-2)$;

【小问 3 详解】

由点 A 、 C 的坐标得直线 AC 的表达式为: $y=x+1$,

故设点 $D(m, m+1)$ ($m > 0$),

由点 P 、 D 、 C 、 A 的坐标得, $PC^2=18$, $AC=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{2}m$,

当 $\triangle CDP$ 与 $\triangle CAP$ 相似时,

$$\therefore \angle ACP = \angle DCP, \angle CPA \neq \angle CPD,$$

则 $\angle APC = \angle CDP$,

$$\therefore \triangle CPA \sim \triangle CDP,$$

$$\text{则 } \frac{CP}{CD} = \frac{AC}{PC},$$

$$\text{即 } PC^2 = AC \cdot CD,$$

$$\text{即 } 18 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}m,$$

$$\text{解得: } m = 9,$$

$$\text{则点 } D(9, 10),$$

$$\text{则抛物线的表达式为: } y = -(x-9)^2 + 10.$$

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上, 连接 ED , 将线段 ED 绕点 E 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 EF .

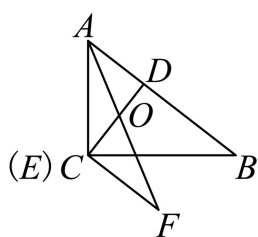


图1

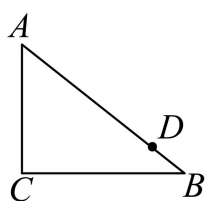


图2

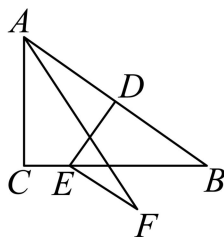


图3

- (1) 如图1, 当点 E 与点 C 重合, $ED \perp AB$ 时, AF 与 ED 相交于点 O , 求 $AO:OF$ 的值;
- (2) 如图2, 如果 $AB = 5BD$, 当点 A 、 E 、 F 在一条直线上时, 求 BE 长;
- (3) 如图3, 当 $DA = DB$, $CE = 2$ 时, 连接 AF , 求 $\angle AFE$ 的正切值.

【答案】(1) $\frac{3}{4}$

(2) $BE = \frac{24 + 2\sqrt{19}}{5}$ 或 $BE = \frac{24 - 2\sqrt{19}}{5}$;

(3) $\frac{14}{31}$

【解析】

【分析】(1) 根据勾股定理得出 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$, 根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, 求出 $CD = \frac{24}{5}$, 进而得出 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{18}{5}$, 根据旋转的性质得出 $\angle DEF = 90^\circ$, $CD = EF = \frac{24}{5}$,

则 $AB \parallel CF$, 通过证明 $\triangle ADO \sim \triangle FEO$, 即可求解;

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H , 求出 $BH = \frac{8}{5}$, 进而得出 $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \frac{6}{5}$, $CH = BC - BH = \frac{32}{5}$, 设 $BE = x$, 则 $CE = 8 - x$, $EH = x - \frac{8}{5}$, 通过证明 $\triangle ACE \sim \triangle EHD$, 得出 $\frac{AC}{EH} = \frac{CE}{DH}$, 求出 x 的值即可;

(3) 以点 E 为原点建立平面直角坐标系, 令 AF , DE 相交于点 G , 过点 D 作 y 轴的垂线, 垂足为 P , 过点

F 作 y 轴的垂线, 垂足为点 Q, 则 $B(6,0)$, $A(-2,6)$, $D(2,3)$, 用待定系数法求出 DE 的函数解析式为

$y = \frac{3}{2}x$, 通过证明 $\triangle DEP \cong \triangle EFQ$, 得出 $F(3,-2)$, 再用待定系数法求出 AF 的函数解析式为

$y = -\frac{8}{5}x + \frac{14}{5}$, 进而得出 $G\left(\frac{28}{31}, \frac{42}{31}\right)$, 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$,

$\therefore$ 根据勾股定理可得: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$,

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CD$,

$\therefore AC \cdot BC = AB \cdot CD$, 即 $6 \times 8 = 10CD$,

解得: $CD = \frac{24}{5}$,

在 $Rt\triangle ACD$ 中, 根据勾股定理可得: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{18}{5}$,

$\because$ 线段 ED 绕点 E 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 EF,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$, $CD = EF = \frac{24}{5}$,

$\because ED \perp AB$,

$\therefore AB \parallel CF$,

$\therefore \triangle ADO \sim \triangle FEO$,

$\therefore \frac{AO}{OF} = \frac{AD}{CF} = \frac{\frac{18}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{3}{4}$,

即 $AO : OF = \frac{3}{4}$;

【小问 2 详解】

解: 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H,

$\because AB = 5BD$,

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{1}{5}$, $BD = 2$,

$\because DH \perp BC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AC \parallel DH$,

$\therefore \frac{BH}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{5}$, 则 $\frac{BH}{8} = \frac{1}{5}$,

$$\text{解得: } BH = \frac{8}{5},$$

$$\therefore DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \frac{6}{5}, \quad CH = BC - BH = \frac{32}{5},$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } CE = 8 - x, EH = x - \frac{8}{5},$$

$\therefore$ 线段 ED 绕点 E 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 EF,

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 A、E、F 在一条直线上,

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC + \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEH = \angle EAC,$$

$$\text{又} \therefore \angle ACE = \angle EHD = 90^\circ,$$

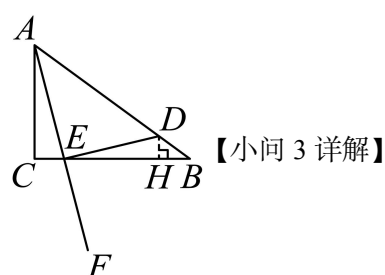
$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle EHD,$$

$$\therefore \frac{AC}{EH} = \frac{CE}{DH},$$

$$\text{即 } \frac{6}{x - \frac{8}{5}} = \frac{8 - x}{\frac{6}{5}},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{24 + 2\sqrt{19}}{5}, \quad x_2 = \frac{24 - 2\sqrt{19}}{5},$$

$$\therefore BE = \frac{24 + 2\sqrt{19}}{5} \text{ 或 } BE = \frac{24 - 2\sqrt{19}}{5};$$



解: 以点 E 为原点建立平面直角坐标系, 令 AF、DE 相交于点 G, 过点 D 作 y 轴的垂线, 垂足为 P, 过点 F 作 y 轴的垂线, 垂足为点 Q,

$$\therefore BC = 8, CE = 2,$$

$$\therefore BE = 6, \text{ 则 } B(6, 0),$$

$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore A(-2, 6),$$

$$\because DA = DB,$$

$$\therefore D(2, 3),$$

$$\therefore DE = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

设 DE 的函数解析式为 $y = kx$,

$$\text{将 } D(2, 3) \text{ 代入得: } 3 = 2k,$$

$$\text{解得: } k = \frac{3}{2},$$

$$\therefore DE \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{3}{2}x,$$

$\because$ 线段 ED 绕点 E 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 EF ,

$$\therefore DE = EF = \sqrt{13}, \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\because \angle DEP + \angle FEQ = 90^\circ, \quad \angle DEP + \angle EDP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEQ = \angle EDP,$$

$$\because \angle FEQ = \angle EDP, \quad \angle DPE = \angle EQF, \quad DE = EF,$$

$$\therefore \triangle DEP \cong \triangle EFQ,$$

$$\therefore QF = PE = 3, EQ = DP = 2,$$

$$\therefore F(3, -2),$$

设 AF 的函数解析式为 $y = mx + n$,

把 $A(-2, 6)$, $F(3, -2)$ 代入得:

$$\begin{cases} 6 = -2m + n \\ -2 = 3m + n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -\frac{8}{5} \\ n = \frac{14}{5} \end{cases},$$

$$\therefore AF \text{ 的函数解析式为 } y = -\frac{8}{5}x + \frac{14}{5},$$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = -\frac{8}{5}x + \frac{14}{5} \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

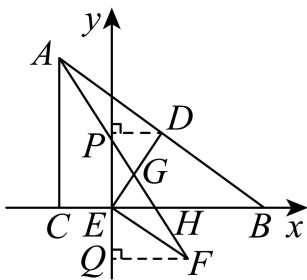
解得: $\begin{cases} x = \frac{28}{31} \\ y = \frac{42}{31} \end{cases}$,

$$\therefore G\left(\frac{28}{31}, \frac{42}{31}\right),$$

$$\therefore GE = \sqrt{\left(\frac{28}{31}\right)^2 + \left(\frac{42}{31}\right)^2} = \frac{14}{31}\sqrt{13},$$

$$\therefore \tan \angle AFE = \frac{GE}{EF} = \frac{\frac{14}{31}\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{14}{31}.$$

The image is a promotional graphic for 'You Jian Sheng Education' (优尖升教育). It features a large, stylized illustration of a person sitting on a giant yellow pencil, reading a book. The background is a vibrant blue with white clouds and a large screen displaying educational content. The text '电子版资料 小学 初中 高中' (Electronic materials for primary, middle, and high school) is visible on the screen. To the right, there is a QR code and text promoting '优尖升教育' (You Jian Sheng Education) and their online education services. The text '淘宝搜索店铺: 优尖升教育' (Search for the store on Taobao: You Jian Sheng Education) and '客服微信: DEM2008' (Customer service WeChat: DEM2008) are prominently displayed. Below the QR code, it says '手机淘宝扫一扫: 扫描二维码进本店' (Scan with mobile Taobao to enter the store). At the bottom, it says 'ONLINE EDUCATION 为您的课程, 我们一直在努力' (ONLINE EDUCATION For your course, we are always working hard). The bottom left corner has the text '最新资料请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版' (For the latest materials, please recognize 'You Jian Sheng Education', the only one on Taobao, others are old versions). The bottom right corner has the text '淘宝店铺网址: shop492842749.taobao.com' (Taobao store URL: shop492842749.taobao.com). The overall design is clean and modern, with a focus on education and online learning.



【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，旋转的性质，解直角三角

形，熟练掌握相关性质定理，正确作出辅助线是解题的关键.