

2022-2023 学年九年级数学阶段性质量调研试卷

一、选择题

1. 已知线段 a 、 b 、 c 、 d 是成比例线段，如果 $a=1$ ， $b=2$ ， $c=3$ ，那么 d 的值是 ()

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】利用成比例线段的定义得到 $a:b=c:d$ ，然后根据比例的性质求 d 的值.

【详解】解：根据题意得： $a:b=c:d$ ，

即 $1:2=3:d$ ，

解得 $d=6$.

故选：B.

【点睛】本题考查了比例线段：对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等，如 $a:b=c:d$ （即 $ad=bc$ ），我们就说这四条线段是成比例线段.

2. 下列各组图形中一定是相似形的是 ()

- A. 两个等腰梯形 B. 两个矩形 C. 两个直角三角形 D. 两个等边三角形

【答案】D

【解析】

【分析】根据相似形的形状相同、大小不同的特点，再结合等腰梯形、矩形，直角三角形、等边三角形的性质与特点逐项排查即可.

【详解】解： A 、两个等腰梯形的形状不一定相同，则不一定相似，故本选项错误；

B 、两个矩形的形状不一定相同，则不一定相似，故本选项错误；

C 、两个直角三角形的形状不一定相同，则不一定相似，故本选项错误；

D 、两个等边三角形的大小不一定相同，但形状一定相同，则一定相似，故本选项正确.

故选 D .

【点睛】本题主要考查了相似图形的定义，理解相似形的形状相同、大小不同的特点成为解答本题的关键.

3. 将抛物线 $y=-x^2+4$ 向右平移 1 个单位，那么所得新抛物线的表达式为 ()

- A. $y=-(x-1)^2+4$ B. $y=-(x+1)^2+4$
C. $y=-x^2+5$ D. $y=-x^2+3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次函数图象平移的方法：左加右减，上加下减计算即可.

【详解】解：将抛物线 $y = -x^2 + 4$ 向右平移 1 个单位得到 $y = -(x-1)^2 + 4$ ，故 A 正确.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了二次函数图象的平移，准确运用平移方法求解是解题的关键.

4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，已知 $AC = 3$ ， $AB = 5$ ，那么 $\angle A$ 的余弦值为（ ）

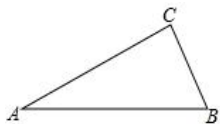
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用锐角三角函数求出结果即可.

【详解】解：如图，



在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $AB = 5$ ，

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故选 C.

【点睛】本题主要考查了锐角三角函数的定义，熟练掌握锐角的对边与斜边的比叫做该锐角的正弦是解题的关键.

5. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，那么 $\frac{AP-BP}{BP}$ 的值为（ ）

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

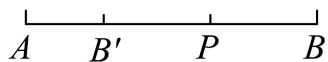
【答案】C

【解析】

【分析】将 B 关于 P 对称得 B' ，可知 B' 是 AP 的黄金分割点，可得 $\frac{AB'}{B'P} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【详解】解：将 B 关于 P 对称得 B' ，根据黄金分割的定义可知 B' 是 AP 的黄金分割点，

$$\frac{AP-BP}{BP} = \frac{AB'}{B'P} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$



答案：C

【点睛】本题考查了黄金分割的定义，熟练掌握黄金分割的定义及黄金比值是解题的关键.

6. 某同学在用描点法画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时，列出了下面的表格：

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-1	0	-3	-4	-3	...

由于粗心，他算错了其中一个 y 值，则这个错误的数值是 ()

- A. -1 B. -3 C. 0 D. -4

【答案】A

【解析】

【分析】假设三点 $(0, -3)$ ， $(1, -4)$ ， $(2, -3)$ 在函数图象上，利用待定系数法求得解析式，然后判断其他两点即可得答案.

【详解】解：假设三点 $(0, -3)$ ， $(1, -4)$ ， $(2, -3)$ 在函数图象上，

把 $(0, -3)$ ， $(1, -4)$ ， $(2, -3)$ 代入函数解析式，得
$$\begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -4 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2, \\ c = -3 \end{cases}$$

函数解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

当 $x = -1$ 时， $y = 0$,

当 $x = -2$ 时， $y = 5$,

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数的图象，待定系数法求二次函数的解析式，二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是能正确求出二次函数的解析式.

二、填空题

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ ，那么 $\frac{b}{a+b}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】由 $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$, 得 $b = 4a$, 把 $b = 4a$ 代入 $\frac{b}{a+b}$, 化简即可得出结果.

【详解】解: 由 $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$, 得 $b = 4a$,

把 $b = 4a$ 代入 $\frac{b}{a+b}$,

$$\frac{b}{a+b} = \frac{4a}{a+4a} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5},$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

【点睛】本题主要考查求分式的值, 求出 a, b 之间的关系, 然后代入分式中求解即可.

8. 计算: $-\frac{3}{2}\vec{a} + 2\left(\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$

【解析】

【分析】依据向量的加减计算即可.

【详解】解: $-\frac{3}{2}\vec{a} + 2\left(\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}\right)$
 $= -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{a} - 3\vec{b}$
 $= \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$

【点睛】此题考查向量的加减, 掌握向量加减的法则是解答此题的关键.

9. 两个相似三角形的面积比为 1: 9, 则它们的周长比为_____.

【答案】 1: 3

【解析】

【分析】相似三角形的周长比等于其对应边长比, 而面积比等于对应边长比的平方.

【详解】已知两个相似三角形的面积比为 1: 9, 相似三角形的面积的比等于相似比的平方, 周长的比等于相似比, 由此可得这两个三角形的周长比为 1: 3, 故答案为 1: 3.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质, 主要从三角形其面积比等于周长比的平方来进行考查的, 难度不大.

10. 如果向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反, 且 $|\vec{a}| = 5$, 那么用向量 $\vec{e}$ 表示向量 $\vec{a}$ 为_____.

【答案】 $-5\vec{e}$

【解析】

【分析】根据向量的表示方法可直接得出答案.

【详解】解: $\because |\vec{a}| = 5$, 向量 $\vec{e}$ 是单位向量,

$$\therefore |\vec{a}| = 5|\vec{e}|,$$

$\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 的方向相反,

$$\therefore \vec{a} = -5\vec{e}.$$

故答案为: $-5\vec{e}$.

【点睛】本题考查平面向量有关知识, 难度较小, 解题的关键是掌握单位向量的定义.

11. 小杰沿着坡度 $i = 1:2.4$ 的斜坡向上行走了 130 米, 那么他距离地面的垂直高度升高了_____米.

【答案】50

【解析】

【分析】如图, 由坡度易得 AC 与 BC 的比为 $1:2.4$, 设出相应未知数, 利用勾股定理可得 AC 的长度.

【详解】解: 设他距离地面的垂直高度升高了 x 米,

如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 坡度: $i = 1:2.4$, $AB = 130$,

$\therefore AC$ 与 BC 的比为 $1:2.4$,

$$\therefore AC = x, \quad BC = 2.4x,$$

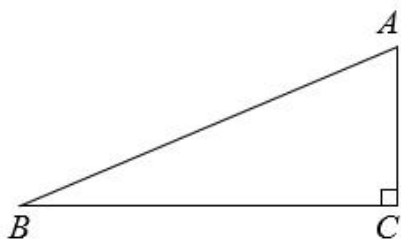
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore x^2 + (2.4x)^2 = 130^2,$$

解得: $x_1 = 50$, $x_2 = -50$ (负值不符合题意, 舍去),

$\therefore$ 他距离地面的垂直高度升高了 50 米.

故答案为: 50.



【点睛】本题考查了解直角三角形及勾股定理, 理解坡度的意义是解题的关键.

12. 已知抛物线 $y = (1+m)x^2$ 在 y 轴左侧的部分是上升的, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】利用二次函数的性质得到抛物线开口向下，则 $m+1<0$ ，然后解不等式即可.

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y=(1+m)x^2$ 在 y 轴左侧的部分是上升的，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore m+1<0$ ，

解得 $m<-1$.

故答案为： $m<-1$.

【点睛】本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下.

13. 已知抛物线 $y=ax^2-2ax+2(a>0)$ 经过点 $(-1,y_1)$ ， $(2,y_2)$ ， 试比较 y_1 和 y_2 的大小：

y_1 _____ y_2 . (填 “>”， “<” 或 “=”)

【答案】>

【解析】

【分析】比较三个点离直线 $x=1$ 的远近即可得到 y_1 、 y_2 的大小关系.

【详解】 $\because y=a(x-1)^2-a^2+2(a>0)$

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=1$ ， 开口向上，

$\therefore |-1-1|>|2-1|$

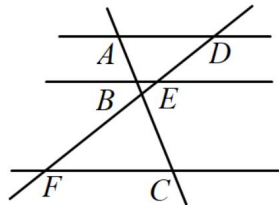
$\therefore (2,y_2)$ 离对称轴较近，

$\therefore y_2<y_1$.

故答案为：>.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，主要考查学生的观察能力和分析能力，本题比较典型，但是一道比较容易出错的题目.

14. 如图 $AD \parallel BE \parallel CF$ ， 已知 $AB=5$ ， $DE=6$ ， $AC=15$ ， 那么 EF 的长等于_____.



【答案】12

【解析】

【分析】根据平行线分线段对应成比例，列式计算即可.

【详解】解： $\because AB=5, AC=15,$

$$\therefore BC=AC-AB=10,$$

$$\therefore AD \parallel BE \parallel CF,$$

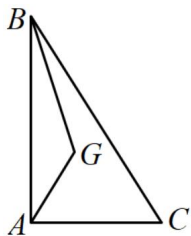
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \text{ 即: } \frac{5}{10} = \frac{6}{EF},$$

$$\therefore EF=12;$$

故答案为：12.

【点睛】本题考查平行线分线段成比例，熟练掌握平行线分线段成比例，是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，若 $AC=6$ ， $\tan \angle ABG = \frac{1}{3}$ ，那么 AG 的长等于_____.



【答案】 $\sqrt{13}$

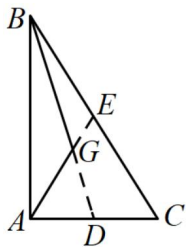
【解析】

【分析】点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，就是三角形的三条中线交点，因此延长 BG ， AG 交 AC 、 BC 于点 D 、 E ，即可得解.

【详解】解：延长 BG ， AG 交 AC 、 BC 于点 D 、 E ，

$$\therefore AD=3, AC=6, BC=3\sqrt{13},$$

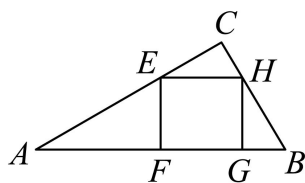
$$\text{则 } AG = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{3}BC = \sqrt{13},$$



答案： $\sqrt{13}$.

【点睛】本题考查重心概念以及性质内容，这是做辅助线的线索，也是本题解题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，正方形 $EFGH$ 的边 FG 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，顶点 E 、 H 分别在边 AC 、 BC 上，如果其面积为 24，那么 $AF \cdot BG$ 的值为_____.



【答案】 24

【解析】

【分析】 通过证明 $\text{Rt}\triangle AFE \sim \text{Rt}\triangle HGB$ ，则 $AF \times BG = EF \times HG$ ，即可得到答案.

【详解】 $\because \angle C = 90^\circ$ ，正方形 $EFGH$ 的四个顶点在三角形的边上，

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\because \angle B + \angle BHG = 90^\circ,$$

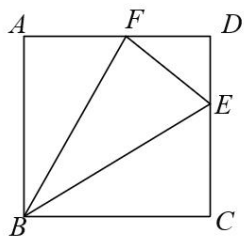
$$\therefore \text{Rt}\triangle AFE \sim \text{Rt}\triangle HGB,$$

$$\therefore AF \times BG = EF \times HG = 24.$$

故答案为 24.

【点睛】 本题主要涉及三角形相似的判定和相似三角形的性质应用，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

17. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上， $\angle ABE$ 的平分线交 AD 边于点 F ，连接 EF ，如果正方形 $ABCD$ 的面积为 12，且 $CE = 2$ ，那么 $\cot(\angle BEF - \angle DFE)$ 的值为_____.

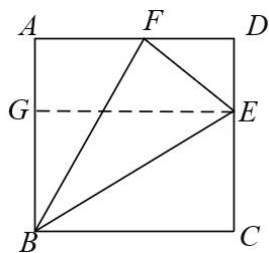


【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 过点 E 作 $EG \parallel BC$ 交 AB 于点 G ，证明 $\angle BEF - \angle DFE = \angle EBC$ ，根据正方形的面积求出 $BC = 2\sqrt{3}$ ，然后求出结果即可.

【详解】 解：过点 E 作 $EG \parallel BC$ 交 AB 于点 G ，如图所示：

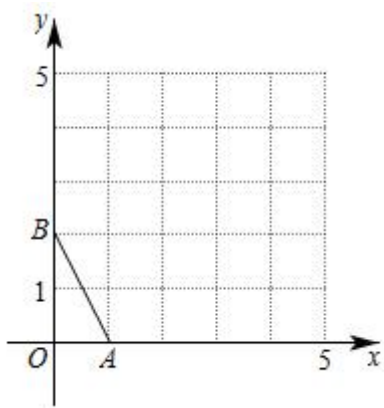


$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,
 $\therefore AD \parallel BC$, $\angle ABC = \angle C = \angle D = \angle A = 90^\circ$,
 $\because EG \parallel BC$,
 $\therefore AD \parallel GE \parallel BC$,
 $\therefore \angle DFE = \angle FEG$, $\angle BEG = \angle EBC$,
 $\therefore \angle BEF - \angle DFE = \angle BEF - \angle FEG = \angle BEG = \angle EBC$,
 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 12,
 $\therefore BC = 2\sqrt{3}$,
 $\because CE = 2$,
 $\therefore \cot(\angle BEF - \angle DFE) = \cot \angle EBC = \frac{BC}{CE} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

答案: $\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质, 平行线的性质, 三角函数的计算, 解题的关键是作出辅助线, 求出 $\angle BEF - \angle DFE = \angle EBC$.

18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(1,0)$, $B(0,2)$, 点 C 为图示中正方形网格交点之一 (点 O 除外), 如果以 A 、 B 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 相似, 那么点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(1,2)$ 、 $(5,2)$ 、 $(4,4)$

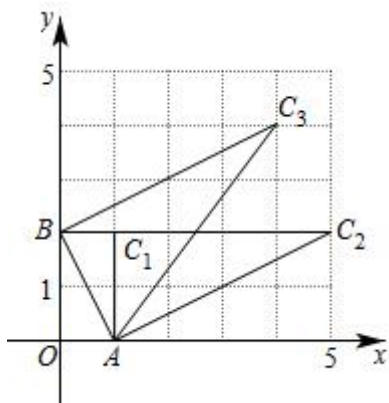
【解析】

【分析】根据 $\triangle OAB$ 是直角三角形，构造 K 字形相似即可得出以 A 、 B 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle OAB$ 相似的点 C 坐标，或直接作出全等三角形。

【详解】解：以 AB 为共同的斜边时， $\triangle CBA \cong \triangle OAB$ ，得 C_1 坐标为 $(1, 2)$ ，

过点 A 作 AB 的垂线，当 $AC = 2AB = 2\sqrt{5}$ 时， $\triangle ABC \sim \triangle OAB$ ，得 $C_2(5, 2)$ ，

过点 B 作 AB 的垂线，当 $BC = 2AB = 2\sqrt{5}$ 时， $\triangle BAC \sim \triangle OAB$ ，得 $C_3(4, 4)$ 。



故答案为： $(1, 2)$ 、 $(5, 2)$ 、 $(4, 4)$

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定，掌握相似三角形的对应边成比例是解题的关键，注意分类讨论。

三、解答题

19. 计算： $\sqrt{\cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{2 + \tan 60^\circ}$ 。

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

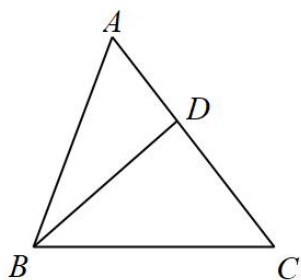
【解析】

【分析】代入特殊角的三角函数值，根据二次根式的运算法则进行计算即可。

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解：原式} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \sqrt{3}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{3} - \frac{3}{2} \\
 &= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{3}{2} \\
 &= \sqrt{3} - 1
 \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了特殊角的三角函数值的混合运算，熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键。

20. 如图, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 边 AC 上一点, 且 $AD:DC = 2:3$, 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{BD}$;

(2) 直接在图中作出向量 $\overrightarrow{BD}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)

【答案】 (1) $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

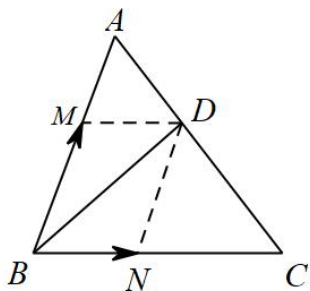
【详解】 解: (1) $\because AD:DC = 2:3$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$



(2) 如图, $\overrightarrow{BM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 即为 $\overrightarrow{BD}$ 在 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

21. 已知 y 关于 x 的函数 $y = (t+2)x^{t^2-2} - 2tx - 3$ 是二次函数.

(1) 求 t 的值并写出函数解析式;

(2) 用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式, 并写出该二次函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴.

【答案】(1) 2, $y = 4x^2 - 4x - 3$

(2) $y = 4(x - \frac{1}{2})^2 - 4$, 开口向上, 顶点 $(\frac{1}{2}, -4)$, 对称轴: $x = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据二次函数定义直接列式求解即可得到答案;

(2) 将 (1) 中解析式配方结合函数性质即可得到答案;

【小问 1 详解】

解: $\because$ 函数 $y = (t+2)x^{t^2-2} - 2tx - 3$ 是二次函数,

$$\therefore \begin{cases} t^2 - 2 = 2 \\ t + 2 \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore t = 2,$$

$$\therefore \text{函数解析式为: } y = 4x^2 - 4x - 3;$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 得,

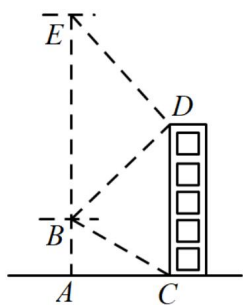
$$y = 4x^2 - 4x - 3 = 4\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4,$$

$$\therefore a = 4 > 0,$$

$$\therefore \text{开口向上, 顶点 } \left(\frac{1}{2}, -4\right), \text{ 对称轴: } x = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查二次函数定义及二次函数的性质, 解题的关键是根据定义列式求出 t 值及熟练掌握函数的性质.

22. 某校开展数学周系列活动, 举办了“测量”为主题的实践活动. 小杰所在小组准备借助无人机来测量小区内的一座大楼高度. 如图所示, 无人机从地面点 A 处沿着与地面垂直的方向上升, 至点 B 处时, 测得大楼底部 C 的俯角为 30° , 测得大楼顶部 D 的仰角为 45° . 无人机保持航向不变继续上升 50 米到达点 E 处, 此时测得大楼顶部 D 的俯角为 45° . 已知 A, C 两点在同一水平线上, 根据以上信息, 请帮小杰小组计算大楼的高度. (结果保留根号)

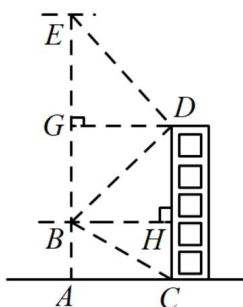


【答案】 $\left(25 + \frac{25}{3}\sqrt{3}\right)$ 米

【解析】

【分析】分析图形，根据题意作辅助线构造直角三角形，即作 $DG \perp AE$ ， $BH \perp CD$ ，由题意可以得到 $\triangle DBE$ 是等腰直角三角形，利用其性质求出 BH ， DH 的长，然后解直角三角形 BCH ，求出 CH 的长，从而可求出大楼的高度.

【详解】如图，过点 D 作 $DG \perp AE$ 交 AE 于点 G ，过点 B 作 $BH \perp CD$ 交 CD 于点 H ，则四边形 $GBHD$ 是矩形，



$$\therefore BH = DG, \quad BG = DH.$$

由题意可知 $\angle EDG = 45^\circ$ ， $\angle GDB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle DEG = 45^\circ, \quad \angle GBD = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle DBE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore DG$ 为 $\triangle DBE$ 的中线，

$$\therefore DG = GB = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \times 50 = 25 \text{ (米)},$$

$$\therefore BH = DH = 25 \text{ 米}.$$

由题意可知 $\angle CBH = 30^\circ$ ，

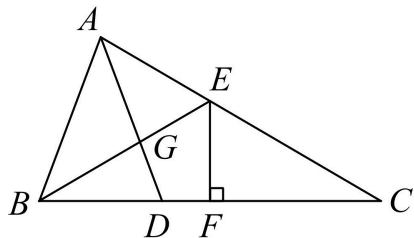
$$\therefore CH = BH \cdot \tan \angle CBH = BH \cdot \tan 30^\circ = \frac{25}{3}\sqrt{3} \text{ (米)}.$$

$$\therefore CD = DH + CH = 25 + \frac{25}{3}\sqrt{3} \text{ (米)}.$$

答：大楼的高度为 $\left(25 + \frac{25}{3}\sqrt{3}\right)$ 米.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用——仰角、俯角问题，解直角梯形可以通过作垂线转化为解直角三角形和矩形的问题.

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，且 $AD = AB$ ，边 BC 的垂直平分线 EF 交边 AC 于点 E ， BE 交 AD 于点 G .



(1) 求证： $\triangle BDG \sim \triangle CBA$ ；

(2) 如果 $\triangle ADC$ 的面积为 180，且 $AB = 18$ ， $DG = 6$ ，求 $\triangle ABG$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $S_{\triangle ABG} = 60$

【解析】

【分析】 (1) 由 $AD = AB$ 得 $\angle ADB = \angle ABD$ ，由垂直平分线的性质得到 $\angle DBG = \angle C$ ，即可证明 $\triangle BDG \sim \triangle CBA$ ；

(2) 根据相似三角形的性质得到 $\frac{BD}{CB} = \frac{1}{3}$ ，则 $CD = 2BD$ ， $BC = 3BD$ ，作 $AH \perp BC$ 于点 H ，分别求得 $S_{\triangle ABC}$ 和 $S_{\triangle BDG}$ ，即可得到 $\triangle ABG$ 的面积.

【小问 1 详解】

解： $\because AD = AB$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$ ，

$\because$ 边 BC 的垂直平分线 EF 交边 AC 于点 E ，

$\therefore EB = EC$ ，

$\therefore \angle DBG = \angle C$ ，

$\therefore \triangle BDG \sim \triangle CBA$ ；

【小问 2 详解】

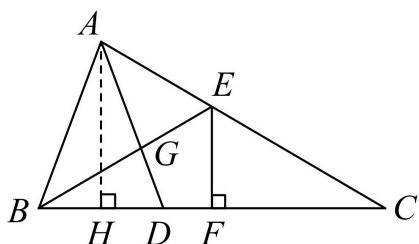
$\because \triangle BDG \sim \triangle CBA$ ，

$\therefore \frac{BD}{CB} = \frac{DG}{BA} = \frac{6}{18}$ ，

$$\therefore \frac{BD}{CB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CD = 2BD, \quad BC = 3BD,$$

作 $AH \perp BC$ 于点 H ,



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot DC} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{3}{2} \times 180 = 270,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BDG}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle BDG} = 30,$$

$$\therefore S_{\triangle ABG} = 270 - 180 - 30 = 60$$

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、垂直平分线的性质、等腰三角形的性质等知识，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键

24. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$ ， $BC = 16$ ，点 P 、 D 分别在射线 CB 、射线 AC 上，且满足 $\angle APD = \angle ABC$ 。

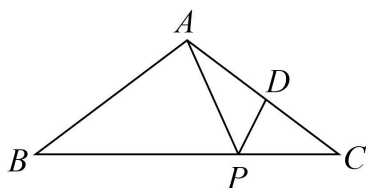
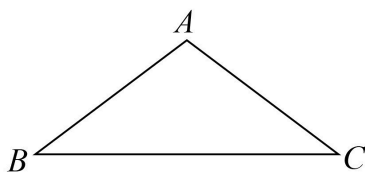


图1



备用图

(1) 当点 P 在线段 BC 上时，如图 1.

①如果 $CD = 4.8$ ，求 BP 的长：

②设 B 、 P 两点的距离为 x ， $AP = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域.

(2) 当 $BP = 1$ 时，求 $\triangle CPD$ 的面积。（直接写出结论，不必给出求解过程）

【答案】(1) ① BP 为 4 或 12；② $y = \sqrt{x^2 - 16x + 100}$ ($0 \leq x < 16$)

$$(2) \frac{27}{4} \text{ 或 } \frac{867}{100}$$

【解析】

【分析】(1) ①设 $BP = x$, $PC = 16 - x$, 证明 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$, 再根据相似三角形的性质, 即可求解;
②过点 A 作 $AG \perp CB$ 于点 G , 根据等腰三角形的性质以及勾股定理可得 $BG = CG = 8$, $AG = 6$, $GP = |8 - x|$, 再由勾股定理, 即可求解;

(2) 分两种情况讨论: 当点 P 在线段 CB 上时; 当点 P 在 CB 延长线上时, 结合相似三角形的性质, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: ①设 $BP = x$, $PC = 16 - x$,

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle APD + \angle CPD = \angle APC = \angle B + \angle BAP, \quad \angle APD = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CPD = \angle BAP,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CD},$$

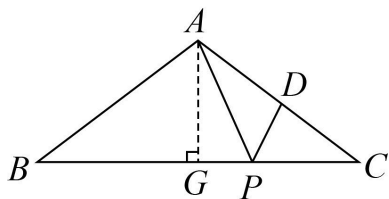
$$\therefore \frac{10}{16-x} = \frac{x}{4.8},$$

$$\therefore x^2 - 16x + 48 = 0,$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 12$$

$$\therefore BP \text{ 为 } 4 \text{ 或 } 12$$

②过点 A 作 $AG \perp CB$ 于点 G ,



$$\therefore AB = AC = 10, \quad BC = 16,$$

$$\therefore BG = CG = 8,$$

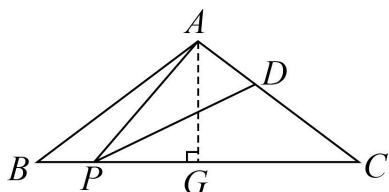
$$\therefore AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = 6, \quad GP = |8 - x|,$$

$$\therefore AP^2 = AG^2 + GP^2,$$

$$\therefore y = \sqrt{6^2 + (|8-x|)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 100} \quad (0 \leq x < 16)$$

【小问2详解】

解：当点 P 在线段 CB 上时，此时 $PC = 15$ ，



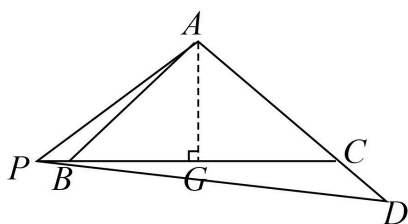
由 (1) 得： $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PCD}} = \left(\frac{AB}{PC}\right)^2 = \left(\frac{10}{15}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} BP \times AG = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{9}{4} \times 3 = \frac{27}{4};$$

当点 P 在 CB 延长线上时， $PC = 17$ ，如图，



$$\therefore \angle APD = \angle CPD + \angle APC, \angle ABC = \angle APC + \angle BAP, \quad \angle APD = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle CPD = \angle BAP,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle PCD,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PCD}} = \left(\frac{AB}{PC}\right)^2 = \left(\frac{10}{17}\right)^2 = \frac{100}{289},$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} BP \times AG = 3,$$

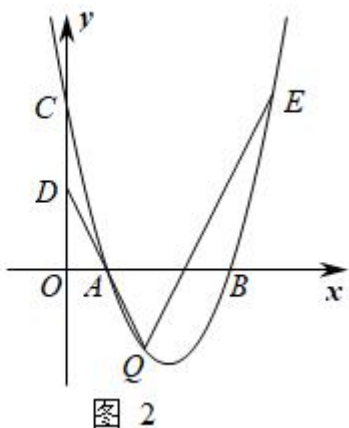
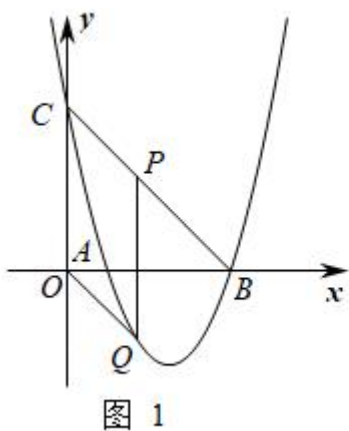
$$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{289}{100} \times 3 = \frac{867}{100};$$

综上所述， $\triangle CPD$ 的面积 $\frac{27}{4}$ 或 $\frac{867}{100}$ 。

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，列函数关系式等知识，

熟练掌握相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理是解题的关键.

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和 $B(4, 0)$, 与 y 轴交于点 C , O 为坐标原点, 且 $OB = OC$.



- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 如图 1, 点 P 是线段 BC 上的一个动点 (不与点 B 、 C 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线交抛物线于点 Q , 连接 OQ . 当四边形 $OCPQ$ 恰好是平行四边形时, 求点 Q 的坐标;
- (3) 如图 2, 在 (2) 的条件下, D 是 OC 的中点, 过点 Q 的直线与抛物线交于点 E , 且 $\angle DQE = 2\angle ODQ$, 在直线 QE 上是否存在点 F , 使得 $\triangle BEF$ 与 $\triangle ADC$ 相似? 若存在, 求点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 5x + 4$;

(2) $Q(2, -2)$

(3) 存在, $F_1(4, 2)$, $F_2\left(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)(x-4)$, 利用待定系数法即可求解;

(2) 先求得直线 BC 的解析式, 利用 $CO = PQ$, 得出方程, 解方程即可求解;

(3) 证明 $\angle DAC = \angle HEB$, 分两种情况讨论, 当 $\triangle DAC \sim \triangle FEB$ 时, 当 $\triangle DAC \sim \triangle BEF$ 时, 利用相似三角形的性质列式计算, 即可求解.

【小问 1 详解】

解：设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)(x-4)$,

$$\because OB = OC = 4, \quad a > 0,$$

$$\therefore C(0,4)$$

代入 $C(0,4)$, 得 $4 = 4a$,

解得 $a = 1$,

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 5x + 4;$$

【小问 2 详解】

解：设直线 BC 的解析式为 $y = kx + 4$,

代入 $B(4,0)$ 得 $0 = 4k + 4$,

$$\therefore k = -1,$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为 } y = -x + 4,$$

设, $P(p, -p+4)(0 < p < 4)$, 则 $Q(p, p^2 - 5p + 4)$,

$$\text{则 } QP = -p + 4 - p^2 + 5p - 4 = -p^2 + 4p,$$

$\because COQP$ 是平行四边形,

$$\therefore CO = PQ, \text{ 即 } -p^2 + 4p = 4,$$

$$\therefore p = 2,$$

$$\therefore Q(2, -2);$$

【小问 3 详解】

解：由题意得 $D(0,2)$, $Q(2,-2)$, $A(1,0)$,

$\therefore$ 点 D 、 A 、 Q 在同直线上,

设 $\angle ODA = \theta$, $\angle OAD = x$,

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2}, \quad \tan x = 2,$$

作 $QG \perp x$ 轴, 故 $QG \parallel y$ 轴, 则 $G(2,0)$,

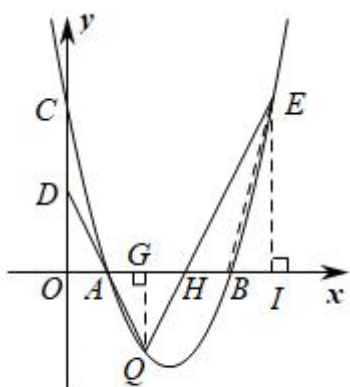


图 2

$$\therefore \angle AQG = \angle ODQ = \theta,$$

$$\therefore \angle DQE = 2\theta,$$

$$\therefore \angle AQG = \angle HQG,$$

可知 $AG = GH = 1$,

$$\therefore H(3,0),$$

同理可得直线 QH 的解析式为 $y = 2x - 6$,

解方程 $2x - 6 = x^2 - 5x + 4$, 得 $x = 2$ 或 $x = 5$,

$$\therefore E(5,4),$$

连接 BE , 作 $EI \perp x$ 轴,

$$\text{可知: } \tan \angle BEI = \frac{1}{4} = \tan \angle OCA,$$

$$\therefore \angle BEI = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle HEI = \angle ODA = \theta,$$

$$\therefore \angle OCA + \angle DAC = \angle HEB + \angle BEI,$$

即 $\angle DAC = \angle HEB$, 故 F 在 E 的左侧,

$$\text{此时: } \angle FEB = \angle DAC,$$

$$\text{设 } F(f, 2f - 6) (f < 5),$$

$$\therefore AD = \sqrt{5}, \quad AC = \sqrt{17}, \quad BE = \sqrt{17}, \quad EF = \sqrt{5}(5 - f),$$

I. 当 $\triangle DAC \sim \triangle FEB$ 时,

$$\frac{AD}{FE} = \frac{AC}{EB},$$

$$\therefore EF = \sqrt{5}, \quad f = 4,$$

$$\therefore F_1(4, 2),$$

II. 当 $\triangle DAC \sim \triangle BEF$ 时,

$$\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{EF},$$

$$\therefore EF = \frac{17}{5}\sqrt{5}, \quad f = \frac{8}{5},$$

$$\therefore F_2\left(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求二次函数的解析式、二次函数的图象与性质、平行四边形的判定和相似三角形的性质等. 解题的关键是会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.

