

2023 学年第一学期初三数学教学质量调研试卷

(考试时间: 100 分钟 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本调研卷上答题一律无效
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸相应位置上写出证明或计算的主要步骤

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\angle A = \alpha$, $BC = a$, 那么 AC 等于 ()

- A. $a \cdot \tan \alpha$ B. $a \cdot \cot \alpha$ C. $\frac{a}{\sin \alpha}$ D. $\frac{a}{\cos \alpha}$

【答案】 B

【解析】

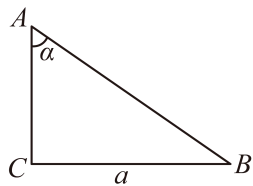
【分析】 本题考查了锐角三角函数的定义的应用, 主要考查学生的理解能力和计算能力.

画出图形, 根据锐角三角函数的定义求出即可.

【详解】 解: $\cot \alpha = \frac{AC}{BC}$,

$\therefore AC = BC \cdot \cot \alpha = a \cdot \cot \alpha$,

故选: B.



2. 下列关于抛物线 $y = 2x^2 + x - 3$ 的描述正确的是 ()

- A. 该抛物线是上升的 B. 该抛物线是下降的
C. 在对称轴的左侧该抛物线是上升的 D. 在对称轴的右侧该抛物线是上升的

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征, 根据抛物线的解析式和二次函数的性质, 可以判断各个选项中的说法是否正确.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = 2x^2 + x - 3$,

∴ $a = 2 > 0$, 在对称轴左侧, 该抛物线下降, 在对称轴右侧上升, 故选项 A、B、C 均错误, 不符合题意, 选项 D 正确, 符合题意;

故选: D.

3. 已知点 C 在线段 AB 上, 且满足 $AC^2 = BC \cdot AB$, 那么下列式子成立的是 ()

A. $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{BC}{AC} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查黄金分割、解一元二次方程, 把 AB 当作已知数求出 AC , 求出 BC , 再分别求出各个比值, 根据结果判断即可.

【详解】解: 令 $AC = x$, $AB = a (a > 0)$, 则 $BC = a - x$,

$$AC^2 = BC \cdot AB \text{ 可变形为 } x^2 = (a-x) \cdot a,$$

$$\text{整理, 得 } x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$\Delta = a^2 - 4 \times 1 \times (-a^2) = 5a^2 > 0,$$

$$\text{解得 } x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2},$$

∵ 边长为正数,

$$\therefore x = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2}, \quad a-x = a - \frac{(\sqrt{5}-1)a}{2} = \frac{(3-\sqrt{5})a}{2},$$

$$\text{即 } AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB, \quad BC = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB}{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ 故 A 选项错误;}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 B 选项正确;}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \text{ 故 C 选项错误;}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot AB}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 故 D 选项错误;}$$

故选 B.

4. 已知 $\vec{a}$ 为非零向量, 且 $\vec{b} = -3\vec{a}$, 那么下列说法错误的是 ()

- A. $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$ B. $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|$ C. $b + 3a = 0$ D. $\vec{b} \parallel \vec{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了实数与向量相乘, 向量的相关定义, 根据其运算法则进行计算即可求解.

【详解】解: A. $\because \vec{a}$ 为非零向量, 且 $\vec{b} = -3\vec{a}$, $\therefore \vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$, 正确, 故本选项不符合题意;

B. $\because \vec{a}$ 为非零向量, 且 $\vec{b} = -3\vec{a}$, $\therefore |\vec{b}| = 3|\vec{a}|$, 正确, 故本选项不符合题意;

C. $\because \vec{a}$ 为非零向量, 且 $\vec{b} = -3\vec{a}$, $\therefore \vec{b} + 3\vec{a} = \vec{0}$, 原说法错误, 故本选项符合题意;

D. $\because \vec{a}$ 为非零向量, 且 $\vec{b} = -3\vec{a}$, $\therefore \vec{b} \parallel \vec{a}$, 故本选项不符合题意;

故选: C.

5. 如果点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的两边 AB、AC 上, 下列条件中可以推出 $DE \parallel BC$ 的是 ()

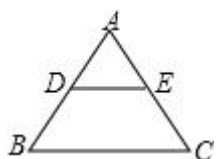
- A. $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}, \frac{CE}{AE} = \frac{2}{3}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$
C. $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{2}, \frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{AB}{AD} = \frac{4}{3}, \frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据各个选项的条件只要能推出 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 或 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$, 即可得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 推出 $\angle ADE = \angle B$, 根据平行线的判定推出即可.

【详解】解:



A、根据 $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ 和 $\frac{CE}{AE} = \frac{2}{3}$ ，不能推出 $DE \parallel BC$ ，故本选项错误；

B、根据 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ 和 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ，不能推出 $DE \parallel BC$ ，故本选项错误；

C、 $\because \frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{3}{2}，$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{3}{2}，$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\therefore \angle A = \angle A，$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE，$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B，$$

$\therefore DE \parallel BC$ ，故本选项正确；

D、根据 $\frac{AB}{AD} = \frac{4}{3}$ 和 $\frac{AE}{EC} = \frac{4}{3}$ ，不能推出 $DE \parallel BC$ ，故本选项错误；

故选 C.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质和判定，平行线的判定的应用，解题的关键是推出 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

6. 已知在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，点 D 、 D' 分别在边 BC 、 $B'C'$ 上，（点 D 不与点 B 、 C 重合，点 D' 不与点 B' 、 C' 重合）. 如果 $\triangle ADC$ 与 $\triangle A'D'C'$ 相似，点 A 、 D 分别对应点 A' 、 D' ，那么添加下列条件可以证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似的是（ ）

① AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线；

② AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的中线；

③ AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的高.

A. ①②

B. ②③

C. ①③

D. ①②③

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查添加条件证明三角形相似，根据 $\triangle ADC$ 与 $\triangle A'D'C'$ 相似，可得 $\angle C = \angle C'$ ， $\angle DAC = \angle D'A'C'$ ， $\frac{AC}{A'C'} = \frac{DC}{D'C'}$ ，再根据相似三角形的判定方法逐项判断即可.

【详解】 解： $\because \triangle ADC$ 与 $\triangle A'D'C'$ 相似，点 A 、 D 分别对应点 A' 、 D' ，

$$\therefore \angle C = \angle C'， \angle DAC = \angle D'A'C'， \frac{AC}{A'C'} = \frac{DC}{D'C'}$$

① AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线时: $\angle BAC = 2\angle DAC$, $\angle B'A'C' = 2\angle D'A'C'$,

$$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C',$$

$$\text{又} \therefore \angle C = \angle C',$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; 故①正确;

② AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的中线时, $BC = 2DC$, $B'C' = 2D'C'$,

$$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{DC}{D'C'},$$

$$\therefore \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\text{又} \therefore \angle C = \angle C',$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; 故②正确;

③ AD 、 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的高时, 现有条件不足以证明 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 故③错误;

综上所述, 添加①或②时, 可以证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似

故选 A.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 如果 $5x = 3y$ (x, y 均不为零), 那么 $x:(x+y)$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】本题考查的是比例的基本性质, 令 $x = 3a$, 则 $y = 5a$, 然后化简整理即可求得. 令 $x = 3a$, 则 $y = 5a$,

$$x:(x+y) = 3:(3+5) = 3:8, \text{ 即可作答.}$$

【详解】解: 根据题意, 可令 $x = 3a$, 则 $y = 5a$,

$$\text{因此, } x:(x+y) = 3a:(3a+5a) = 3a:8a = 3:8.$$

故答案为: $\frac{3}{8}$.

8. 式子 $2\cos 30^\circ - \tan 45^\circ$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】直接将特殊角的三角函数值代入计算即可解答.

【详解】解： $2\cos 30^\circ - \tan 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$.

故答案为： $\sqrt{3} - 1$.

【点睛】 本题主要考查了三角函数的混合运算，牢记特殊角的三角函数值成为解答本题的关键.

9. 已知线段 $a=3\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, 那么线段 a 、 b 的比例中项等于_____cm.

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【详解】 试题分析： 根据线段的比例中项的定义列式计算即可得解.

$\because$ 线段 $a=3\text{cm}$, $b=4\text{cm}$,

$\therefore$ 线段 a 、 b 的比例中项 $= \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$.

故答案为 $2\sqrt{3}$.

考点： 比例线段.

10. 若两个相似三角形的周长比为 $2:3$, 则它们的面积比是_____.

【答案】 $4:9$

【解析】

【详解】 解： $\because$ 两个相似三角形的周长比为 $2:3$,

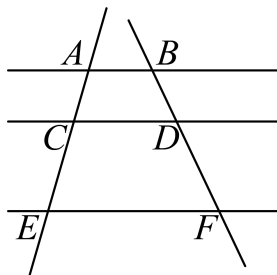
$\therefore$ 这两个相似三角形的相似比为 $2:3$,

$\therefore$ 它们的面积比是 $4:9$.

故答案为： $4:9$.

考点： 相似三角形的性质.

11. 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $AC:CE = 2:3$, $BF = 10$, 那么线段 DF 的长是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】根据平行线分线段成比例定理结合比例解答即可.

【详解】解: $\because AB \parallel CD \parallel EF, AC:CE = 2:3,$

$$\therefore \frac{BD}{DF} = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore BF = 10$$

$$\therefore DF = 10 \times \frac{3}{5} = 6.$$

故答案为 6.

【点睛】本题考查平行线分线段成比例定理, 灵活应用平行线分线段成比例定理列出比例式是解答本题的关键.

12. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 图像上部分点的坐标满足下表: 那么 $f(-5) =$ _____.

x	...	-3	-2	-1	0	1	...
$f(x)$	...	-3	-2	-3	-6	-11	...

【答案】 -11

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了抛物线的对称性. 利用表中数据确定抛物线的对称轴, 然后根据抛物线的对称性求解.

【详解】解: 利用表中数据得抛物线的对称轴为直线 $x = -2$,

所以 $x = -5$ 和 $x = 1$ 时的函数值相等,

即当 $x = -5$ 时, y 的值为 -11.

故答案为: -11.

13. 已知向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3$, 那么 $\vec{a} =$ _____ (用向量 $\vec{e}$ 的式子表示)

【答案】 $-3\vec{e}$

【解析】

【分析】此题考查了平面向量的知识, 由向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3$, 根据单位向量与相反向量的知识, 即可求得答案.

【详解】解: $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且 $|\vec{a}| = 3$,

$$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}.$$

故答案为: $-3\vec{e}$.

14. 已知一条斜坡的长度为 13 米, 高度为 5 米, 那么该斜坡的坡度为_____.

【答案】 1:2.4

【解析】

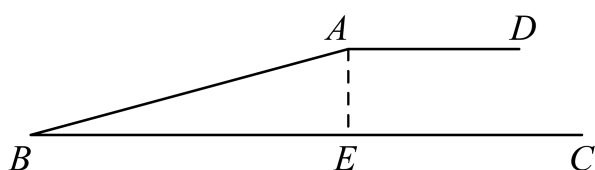
【分析】 本题考查坡度, 先利用勾股定理求出水平距离, 然后利用公式计算是解题的关键.

【详解】 解: 如图, $AB=13$, $AE=5$,

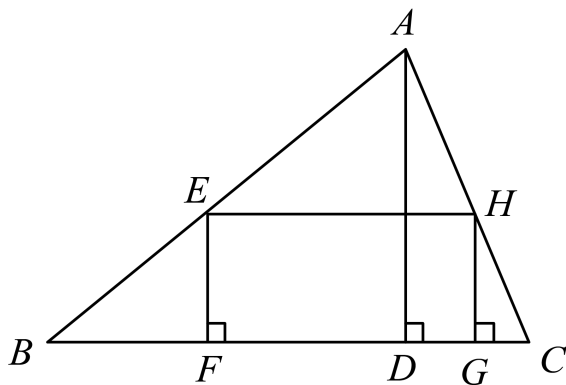
$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\therefore \text{斜坡的坡度为 } i = AE : BE = 5 : 12 = 1 : 2.4,$$

故答案为: 1:2.4.



15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 上的高, 且 $BC=5$, $AD=3$, 矩形 $EFGH$ 的顶点 F 、 G 在边 BC 上, 顶点 E 、 H 分别在边 AB 和 AC 上, 如果 $EH=2EF$, 那么 $EH=$ _____.

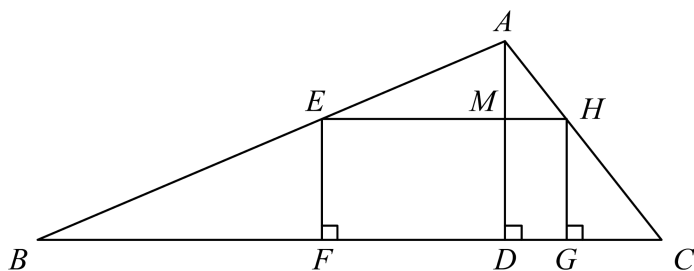


【答案】 $\frac{30}{11}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质及矩形的性质, 通过四边形 $EFGH$ 为矩形推出 $EH \parallel BC$, 因此 $\triangle AEH$ 与 $\triangle ABC$ 两个三角形相似, 将 AM 视为 $\triangle AEH$ 的高, 可得出 $AM : AD = EH : BC$, 再将数据代入计算是本题的关键.

【详解】 解: 设 AD 与 EH 交于点 M .



$\because$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$\therefore EH \parallel BC$,

$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC$,

$\because AM$ 和 AD 分别是 $\triangle AEH$ 和 $\triangle ABC$ 的高,

$\therefore AM : AD = EH : BC, DM = EF$,

$\therefore AM = AD - DM = AD - EF = 3 - EF$,

$\because EH = 2EF$,

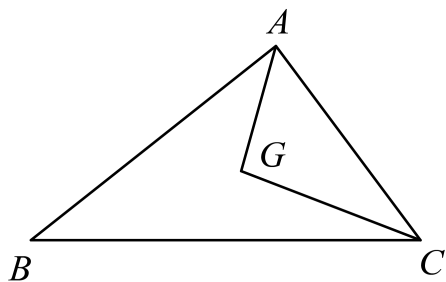
代入可得: $\frac{3 - EF}{3} = \frac{2EF}{5}$,

解得 $EF = \frac{15}{11}$,

$\therefore EH = 2 \times \frac{15}{11} = \frac{30}{11}$,

故答案为: $\frac{30}{11}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 GA 、 GC , 如果 $AC = 3$, $AG = \frac{5}{3}$, 那么 $\angle GCA$ 的余切值为_____.



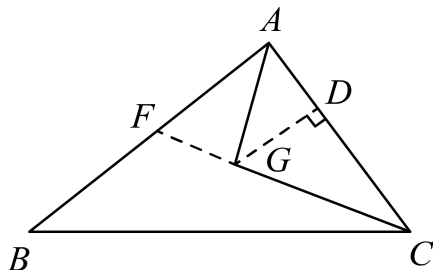
【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 延长 CG 交 AB 于 F , 过 G 作 $GD \perp AC$ 于 D , 直线 DG 交 BC 于 E , 证明 $DCE \sim ACB$, 得 $\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AB}$, 同理可得 $\frac{DG}{AF} = \frac{CD}{AC} = \frac{CG}{CF} = \frac{GE}{BF}$, 即有 $\frac{DE}{AB} = \frac{CG}{CF}$, 根据 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, $AC = 3$, 得

$DE = 2$, 设 $\tan \angle ACG = x$, 根据勾股定理列式计算 $AG = \sqrt{AD^2 + DG^2} = \sqrt{\frac{1}{4x^2} + 1} = \frac{5}{3}$ 可得答案.

【详解】解：过 G 作 $GD \perp AC$ 于 G ，延长 CF 交 AB 于点 F ，如图：



$$\because GD \perp AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel AB, \angle CDE = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle DCE = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle DCG \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{DG}{AF} = \frac{CG}{CF},$$

$$\because G \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心},$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{DG}{AF} = \frac{CG}{CF} = \frac{2}{3},$$

$$\because AC = 3,$$

$$\therefore CD = 2, AD = 1,$$

$$\therefore DG = \sqrt{AG^2 - AD^2} = \frac{4}{3},$$

$$\text{则在直角三角形 } CDG \text{ 中, } \tan \angle ACG = \frac{DG}{CD} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}$$

【点睛】本题考查三角形的重心，涉及相似三角形的判定与性质，勾股定理，解直角三角形，难度较大，综合性较强，解题的关键是作辅助线，构造相似三角形。

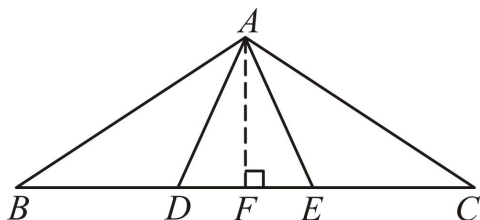
17. 我们把顶角互补的两个等腰三角形叫做友好三角形. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, 点 D 、 E 都在边 BC 上, $AD = AE = 5$, 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是友好三角形, 那么 BC 的长为_____.

【答案】 $8\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，学会利用参数构建方程. 如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F . 证明 $\triangle FAD \sim \triangle FBA$, 推出 $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{FB} = \frac{DF}{AF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, 设 $DF = EF = x$, 这 $AF = 2x$, $BF = 4x$, 构建方程求解.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F .



$$\because AB = AC, AD = AE, AF \perp BC,$$

$$\therefore DF = EF, BF = FC, \angle BAF = \angle CAF, \angle DAF = \angle EAF,$$

$$\because \angle BAC + \angle DAE = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle BAF + 2\angle DAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAF + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle B,$$

$$\because \angle AFD = \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FAD \sim \triangle FBA,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{FB} = \frac{DF}{AF} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

设 $DF = EF = x$, 这 $AF = 2x$, $BF = 4x$,

$$\because AB^2 = AF^2 + BF^2,$$

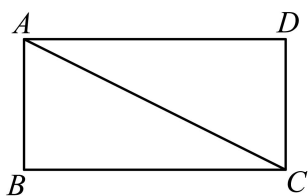
$$\therefore 10^2 = (2x)^2 + (4x)^2,$$

$$\therefore x = \sqrt{5} \quad (\text{负根已经舍去}),$$

$$\therefore BC = 2BF = 8x = 8\sqrt{5}$$

故答案为: $8\sqrt{5}$.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 8, AB = 4, AC$ 是对角线, 点 P 在边 BC 上, 联结 DP , 将 $\triangle DPC$ 沿着直线 DP 翻折, 点 C 的对应点 Q 恰好落在 $\triangle ADC$ 内, 那么线段 BP 的取值范围是_____.



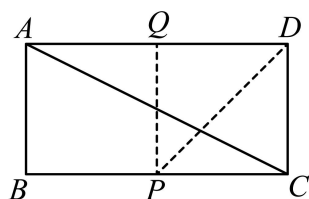
【答案】 $4 < BP < 6$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的折叠问题, 相似三角形的判定和性质等, 计算出点 Q 恰好落在 AD 边上, 以及点 Q

恰好落在 AC 边上时 BP 的值, 即可得出线段 BP 的取值范围.

【详解】解: 当点 C 的对应点 Q 恰好落在 AD 边上时, 如图:



由折叠的性质知 $CD = QD$, $CP = QP$, $\angle PQD = \angle PCD = 90^\circ$,

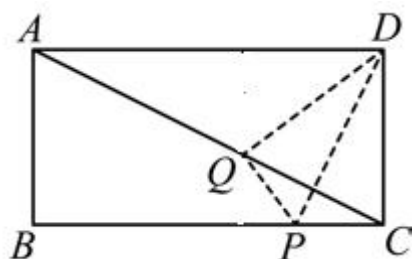
又 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $QDCP$ 是正方形,

$\therefore CP = CD = AB = 4$,

$\therefore BP = BC - CP = AD - CP = 8 - 4 = 4$;

当点 C 的对应点 Q 恰好落在 AC 边上时, 如图,



由折叠的性质知 $PD \perp CQ$,

$\therefore \angle PDC + \angle ACD = 90^\circ$,

又 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore \angle PDC = \angle CAD$,

又 $\because \angle PCD = \angle CDA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle PDC \sim \triangle CAD$,

$\therefore \frac{PC}{CD} = \frac{CD}{AD}$, 即 $\frac{PC}{4} = \frac{4}{8}$,

$\therefore PC = 2$,

$\therefore BP = BC - PC = 8 - 2 = 6$,

$\therefore$ 线段 BP 的取值范围是 $4 < BP < 6$.

故答案为: $4 < BP < 6$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. 已知抛物线 $y = 2x^2 + 4x + 1$.

(1) 用配方法把 $y = 2x^2 + 4x + 1$ 化为 $y = a(x + m)^2 + k$ 的形式, 并写出该抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标;

(2) 如果将该抛物线上下平移, 得到新的抛物线经过点 $(1, 4)$, 求平移后的抛物线的顶点坐标.

【答案】 (1) 该抛物线的开口向上, 对称轴是直线 $x = -1$, 顶点坐标为 $(-1, -1)$

(2) $(-1, -4)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与几何变换, 二次函数的性质, 二次函数图象上点的坐标特征, 掌握二次函数的性质是解题的关键.

(1) 利用配方法把一般式化为顶点式, 根据二次函数的性质写出抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(2) 设平移后的抛物线解析式为 $y = 2(x + 1)^2 - 1 + k$, 代入点 $(1, 4)$, 求得 k 的值即可求解.

【小问 1 详解】

解: $y = 2x^2 + 4x + 1$

$$= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 + 1$$

$$= 2(x + 1)^2 - 1,$$

$\therefore$ 该抛物线的开口向上, 对称轴是直线 $x = -1$, 顶点坐标为 $(-1, -1)$;

【小问 2 详解】

设平移后的抛物线解析式为 $y = 2(x + 1)^2 - 1 + k$,

$\therefore$ 新的抛物线经过点 $(1, 4)$,

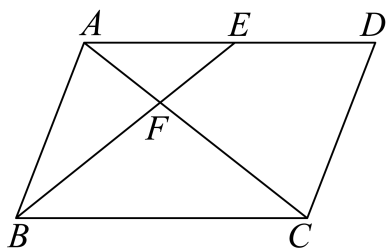
$$\therefore 4 = 2 \times 2^2 - 1 + k,$$

解得 $k = -3$,

$\therefore$ 平移后的抛物线解析式为 $y = 2(x + 1)^2 - 4$,

$\therefore$ 平移后的抛物线的顶点坐标是 $(-1, -4)$.

20. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 AD 的中点, BE 、 AC 相交于点 F .



(1) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{EF}$;

(2) 先化简, 再求作: $(2\vec{a} + \vec{b}) - \frac{3}{2}(2\vec{a} + \vec{b})$ (直接作在图中).

【答案】(1) $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$

(2) $-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, 见详解

【解析】

【分析】 本题主要考查平行四边形的性质、平行线分线段成比例定理和平面向量,

(1) 根据题意得 $AD \parallel BC$ 和 $BC = AD$, 进一步得到 $\frac{AE}{BC} = \frac{EF}{FB}$, 则 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right)$, 代入向量即可.

(2) 化解得 $-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, 将对应线段代入得到 $-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$, 过点 E 作 $EG \parallel AB$, 则 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BG}$,

$-\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{GA}$, 连接 GA 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $BC = AD$,

$\therefore \triangle AFE \sim \triangle CFB$,

则 $\frac{AE}{BC} = \frac{EF}{FB}$,

$\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$\therefore AE = \frac{1}{2}AD$,

则 $EF = \frac{1}{2}FB$,

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right)$,

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$.

【小问2 详解】

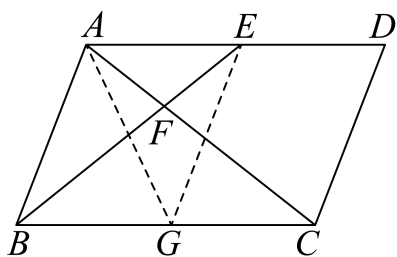
$$(2\vec{a} + \vec{b}) - \frac{3}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$$

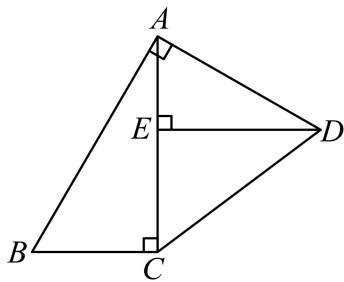
$$\therefore -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}),$$

过点 E 作 $EG \parallel AB$, 则 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BG}$,

$$\therefore -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = -\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GA}, \text{ 如图, } \overrightarrow{GA} \text{ 即为所求.}$$



21. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BC$, $DE \perp AC$, 垂足为点 E , $AC = 4$, $DE = 3$.



(1) 求 $AD:AB$ 的值;

(2) BD 交 AC 于点 F , 如果 $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$, 求 CF 的长.

【答案】(1) 3:4

(2) $CF = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质与判定、解直角三角形:

(1) 根据 $\angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BC$, $DE \perp AC$, 得 $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle EAD = \angle ABC$, 证明 $\triangle AED \sim \triangle BCA$, 结合相似三角形的性质, 得 $AD:AB$ 的值;

(2) 根据相似三角形的性质且 $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$, 得 $BC = 2$, $AE = 1.5$, 再证明 $\triangle BCF \sim \triangle DEF$, 列式代数计算, 即可作答.

【小问1 详解】

解: $\because \angle BAD = 90^\circ$, $AC \perp BC$, $DE \perp AC$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB = 90^\circ, \angle BAC + \angle DAE = 90^\circ = \angle BAC + \angle ABC$$

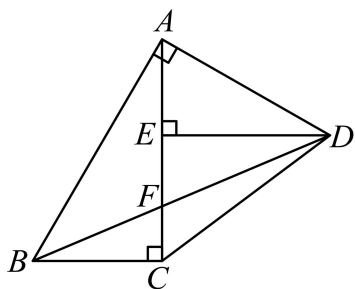
$$\therefore \angle EAD = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle BCA$$

$$\text{则 } AD : AB = DE : AC = 3 : 4$$

【小问 2 详解】

解：如图：



$$\because \triangle AED \sim \triangle BCA, \tan \angle BAC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{4} = \frac{1}{2}, \angle BAC = \angle ADE,$$

$$\therefore BC = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ADE = \frac{AE}{ED} = \frac{AE}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\text{得 } AE = 1.5,$$

$$\therefore EC = AC - AE = 4 - 1.5 = 2.5,$$

$$\because AC \perp BC, DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\because \angle BFC = \angle DFE,$$

$$\therefore \triangle BCF \sim \triangle DEF,$$

$$\text{即 } \frac{BC}{DE} = \frac{CF}{EF},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{CF}{2.5 - CF},$$

$$\text{解得 } CF = 1.$$

22. 小明为测量河对岸大楼的高度，利用量角器和铅锤自制了一个简易测角仪，如图 1 所示.

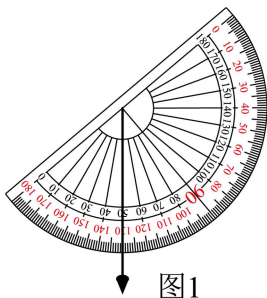


图1

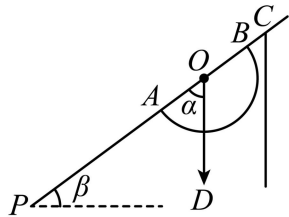


图2

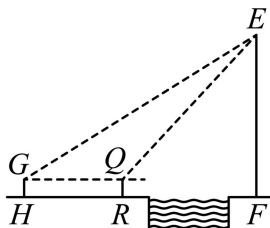


图3

测量方法：如图2，人眼在 P 点观察所测物体最高点 C ，量角器零刻度线上 A, B 两点均在视线 PC 上，将铅锤悬挂在量角器的中心点 O 。当铅锤静止时，测得视线 PC 与铅垂线 OD 所夹的角为 α ，且此时的仰角为 β 。

实践操作：如图3，小明利用上述工具测量河对岸垂直于水平地面的大楼 EF 的高度。他先站在水平地面的点 H 处，视线为 GE ，此时测角仪上视线与铅垂线的夹角为 60° ；然后他向前走 10 米靠近大楼站在水平地面的点 R 处，视线为 QE ，此时测角仪上视线与铅垂线的夹角为 45° 。

问题解决：

(1) 请用含 α 的代数式表示仰角 β ；

(2) 如果 GH 、 QR 、 EF 在同一平面内，小明的眼睛到水平地面的距离为 1.6 米，求大楼 EF 的高度。（结果保留根号）

【答案】 (1) $\beta = 90^\circ - \alpha$

(2) $(5\sqrt{3} + 6.6)$ 米

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形—仰角俯角问题，列代数式，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键。

(1) 延长 OD 交 PK 于 L ，根据题意可得： $OL \perp PK$ ，从而可得： $\angle OLP = 90^\circ$ ，然后利用直角三角形的两个锐角互余进行计算，即可解答；

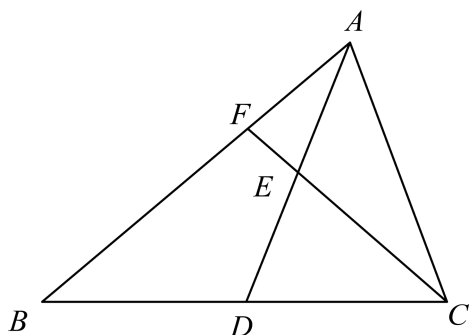
(2) 延长 GQ 交 EF 于点 M ，根据题意可得： $GM \perp EF$ ， $GH = QR = MF = 1.6$ 米， $GQ = HR = 10$ 米，然后设 $EM = x$ 米，分别在 $Rt\triangle EGM$ 和 $Rt\triangle EQM$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 GM 和 QM 的长，从而列出关于 x 的方程，进行计算即可解答。

【小问 1 详解】

解：如图：延长 OD 交 PK 于 L ，

∴ 大楼 EF 的高度为 $(5\sqrt{3} + 6.6)$ 米.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别是 BC, AD 的中点, 且 $AD = AC$, 连接 CE 并延长交 AB 于点 F .



(1) 证明: $\triangle ABC \sim \triangle ECD$;

(2) 证明: $BF = 4EF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质:

(1) 根据等边对等角可得 $\angle EDC = \angle ACB$, 再证这组夹角的两边成比例即可;

(2) 作 $DH \parallel CF$ 交 AB 于点 H , 可证 $\triangle BHD \sim \triangle BFC$, $\triangle AFE \sim \triangle AHD$, 推出 $\frac{HD}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}$, $\frac{FE}{HD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$,

进而可得 $FC = 4EF$, 再根据 $\triangle ABC \sim \triangle DCE$ 得出 $\angle FBC = \angle FCB$, 推出 $CF = BF$, 等量代换可证 $BF = 4EF$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD = AC$,

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$, 即 $\angle EDC = \angle ACB$,

又 $\because$ 点 D, E 分别是 BC, AD 的中点,

$\therefore DC = \frac{1}{2}CB$, $ED = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AC$,

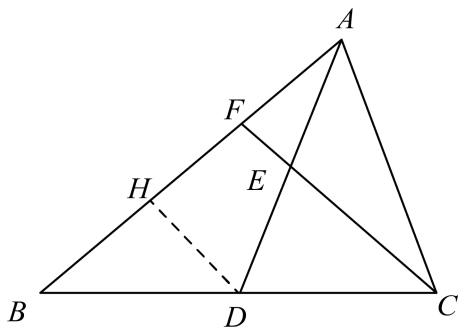
$\therefore \frac{DC}{CB} = \frac{ED}{AC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{AC}{CB} = \frac{ED}{DC}$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECD$;

【小问 2 详解】

证明: 如图, 作 $DH \parallel CF$ 交 AB 于点 H ,



$\because DH \parallel CF$,

$\therefore \angle BHD = \angle BFC$, $\angle BDH = \angle BCF$; $\angle AFE = \angle AHD$, $\angle AEF = \angle ADH$,

$\therefore \triangle BHD \sim \triangle BFC$, $\triangle AFE \sim \triangle AHD$,

又 $\because$ 点 D, E 分别是 BC, AD 的中点,

$$\therefore \frac{HD}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2}, \quad \frac{FE}{HD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore FC = 2HD, \quad HD = 2FE,$$

$$\therefore FC = 4EF,$$

由 (1) 得 $\triangle ABC \sim \triangle ECD$,

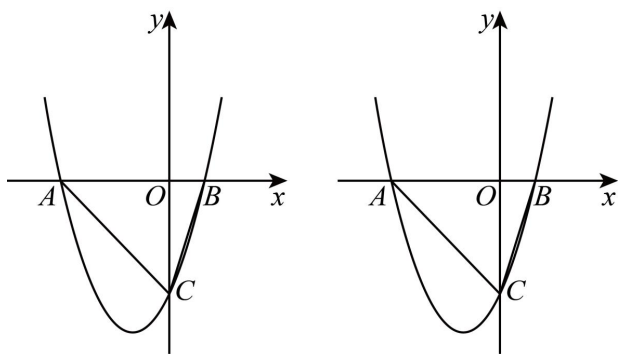
$$\therefore \angle ABC = \angle ECD, \text{ 即 } \angle FBC = \angle FCB,$$

$$\therefore CF = BF,$$

$$\therefore BF = 4EF.$$

24. 已知抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 直线

$y = -x - 6$ 经过点 A 与点 C .



备用图

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 在线段 AC 下方的抛物线上, 过点 P 作 BC 的平行线交线段 AC 于点 D , 交 y 轴于点 E .

①如果 C, F 两点关于抛物线的对称轴对称, 联结 DF , 当 $DF \perp CF$ 时, 求 $\angle PDF$ 的正切值;

②如果 $PD : DE = 3 : 5$, 求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

(2) ① $\frac{1}{3}$ ② $\left(-3, \frac{15}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先由一次函数求出 $A(-6, 0)$, $C(-6, 0)$, 再运用待定系数法求二次函数解析式, 即可作答.

(2) ①依题意, 得 $DF \perp CF$, $PE \parallel BC$, $\angle PDF = \angle ACB$, 根据角的等量代换, 即 $\angle PDF = \angle OCB$, 先求出点 B 的坐标. $\angle PDF$ 的正切值等于 $\tan \angle OCB = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$;

② 先表达出 $E\left(0, \frac{1}{2}p^2 - p - 6\right)$, $D\left(-\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p, \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p - 6\right)$, $P\left(p, \frac{1}{2}p^2 + 2p - 6\right)$, $EN = \frac{3}{8}p^2 - \frac{3}{4}p$, $EM = -3p$ 再根据相似三角形的性质与判定, 列式化简计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -x - 6$ 经过点 A 与点 C

则当 $x = 0$, $y = -6$; $y = 0$, $x = -6$

$\therefore A(-6, 0)$, $C(-6, 0)$

$$\therefore \begin{cases} c = -6, \\ 0 = 18 - 6b + c, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} c = -6 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6;$$

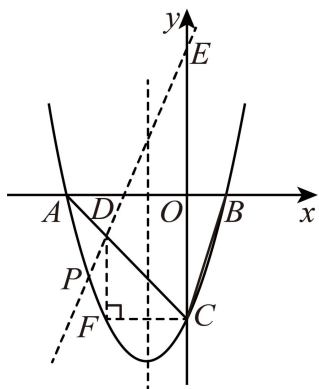
【小问 2 详解】

解: ①如图:

$\because A(-6, 0)$, $C(-6, 0)$, 且 C 、 F 两点关于抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ 的对称轴对称,

$$\therefore y_F = y_C = -6, \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = -2$$

则 $x_F = -4$



$$\therefore DF \perp CF$$

$$\therefore DF \parallel y \text{ 轴}$$

$$\text{则 } \angle FDC = \angle OCA$$

$\therefore$ 过点 P 作 BC 的平行线交线段 AC 于点 D ，交 y 轴于点 E 。

$$\therefore PE \parallel BC, \angle PDF = \angle ACB$$

$$\text{则 } \angle PDF = \angle OCB$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \text{ } x \text{ 轴交于 } A, B \text{ 两点 (点 } A \text{ 在点 } B \text{ 的左侧),}$$

$$\therefore 0 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$$

$$\therefore x = -6, \quad x = 2$$

$$\therefore B(2, 0)$$

$$\therefore \angle PDF = \angle OCB$$

$$\text{则 } \angle PDF \text{ 的正切值等于 } \tan \angle OCB = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 设 } P\left(p, \frac{1}{2}p^2 + 2p - 6\right), \quad BC \text{ 的解析式为 } y = mx + n$$

$$\therefore \text{把 } C(0, -6), \quad B(2, 0) \text{ 代入 } y = mx + n$$

$$\text{得 } \begin{cases} n = -6 \\ 0 = 2m + n \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} n = -6 \\ m = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 过点 P 作 BC 的平行线交线段 AC 于点 D ，交 y 轴于点 E

$$\therefore \text{设 } PE \text{ 的解析式为 } y = 3x + b$$

把 $P\left(p, \frac{1}{2}p^2 + 2p - 6\right)$ 代入 $y = 3x + b$

$$\text{得 } b = \frac{1}{2}p^2 - p - 6$$

$$\therefore y = 3x + \frac{1}{2}p^2 - p - 6$$

$$\text{令 } x = 0, \quad y = \frac{1}{2}p^2 - p - 6$$

$$\text{即 } E\left(0, \frac{1}{2}p^2 - p - 6\right)$$

$$\text{当 } \begin{cases} y = -x - 6 \\ y = 3x + \frac{1}{2}p^2 - p - 6 \end{cases}$$

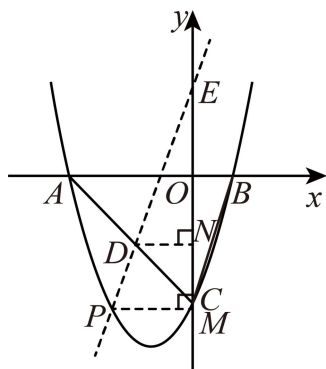
$$\text{解得 } x = -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p$$

$$\text{则把 } x = -\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p \text{ 代入 } y = 3x + \frac{1}{2}p^2 - p - 6$$

$$\text{得 } y = \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p - 6$$

$$\therefore D\left(-\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p, \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p - 6\right)$$

$\therefore$ 过点 P 作 $PM \perp y$ 轴, 过点 D 作 $DN \perp y$ 轴,



$$\therefore \triangle EDN \sim \triangle EPM$$

$$\therefore \frac{EN}{EM} = \frac{DE}{EP}$$

$$\therefore PD : DE = 3 : 5$$

$$\therefore EN : EM = 5 : 8$$

$$\therefore E\left(0, \frac{1}{2}p^2 - p - 6\right), \quad D\left(-\frac{1}{8}p^2 + \frac{1}{4}p, \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p - 6\right), \quad P\left(p, \frac{1}{2}p^2 + 2p - 6\right)$$

$$\therefore EN = \frac{1}{2}p^2 - p - 6 - \left(\frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p - 6\right) = \frac{3}{8}p^2 - \frac{3}{4}p, \quad EM = \frac{1}{2}p^2 - p - 6 - \left(\frac{1}{2}p^2 + 2p - 6\right) = -3p$$

$$\therefore \frac{3}{8}p^2 - \frac{3}{4}p : -3p = 5:8$$

$$\text{解得 } p_1 = 0, \quad p_2 = -3$$

$\therefore$ 点 P 在线段 AC 下方的抛物线上,

$$\therefore p_1 = 0 \quad (\text{舍去})$$

$$\therefore p = -3.$$

$$\text{把 } p = -3 \text{ 代入 } y = \frac{1}{2}p^2 + 2p - 6$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 9 - 2 \times 3 - 6 = \frac{9}{2} - \frac{24}{2} = -\frac{15}{2}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标} \left(-3, -\frac{15}{2}\right)$$

【点睛】本题考查了二次函数的几何综合，相似三角形的判定与性质，解直角三角形，勾股定理等，综合性强，难度较大，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

25. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 2\angle C$ ， BG 平分 $\angle ABC$ ， $AB = 8$ ， $AG = \frac{16}{3}$ ，点 D ， E 分别是边 BC ， AC 上的点（点 D 不与点 B ， C 重合），且 $\angle ADE = \angle ABC$ ， AD ， BG 相交于点 F 。

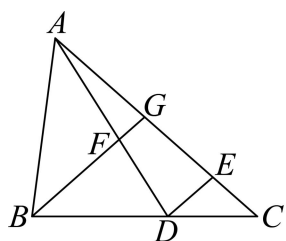
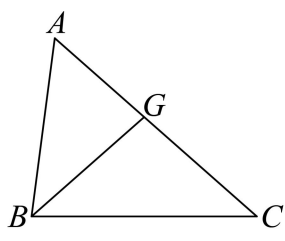
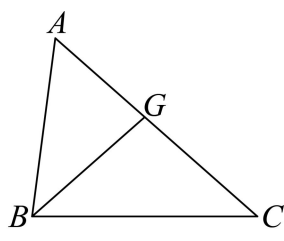


图1



备用图



备用图

- (1) 求 BC 的长；
- (2) 如图 1，如果 $BF = 2CE$ ，求 $BF : GF$ 的值；
- (3) 如果 $\triangle ADE$ 是以 AD 为腰的等腰三角形，求 BD 长。

【答案】(1) 10

$$(2) \frac{27}{8}$$

$$(3) \frac{32}{5}$$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABG \sim \triangle CAB$ ，再根据相似三角形的性质，等腰三角形的判定与性质，即可得到答案；

(2) 过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M , $FN \perp BD$ 于点 N , 先证明 $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, 进一步求得 $BD = 6$, 接着利用面积法证明 $\frac{AF}{DF} = \frac{4}{3}$, 设 $AF = 4x$, 证明 $\triangle FAG \sim \triangle EAD$, 求得 $FG = \frac{32}{21}$, 即可进一步求得答案;

(3) 先证明 $\triangle CDE \sim \triangle CBG$, 可得 $CD = \frac{3}{2}CE$, 再利用等腰三角形的判定与性质以及平行线的性质逐步求得 $FG = \frac{4}{3}$, 最后证明 $\triangle AFG \sim \triangle ADE$, 进一步求出 $CE = \frac{12}{5}$, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

$\because BG$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABG = 2\angle GBC,$$

$\because \angle ABC = 2\angle C$,

$$\therefore \angle ABG = \angle C = \angle GBC,$$

$\because \angle BAG = \angle CAB$,

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AB} = \frac{BG}{CB},$$

$$\therefore \frac{8}{AC} = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{BG}{CB},$$

$$\therefore AC = 12, \quad BC = \frac{3}{2}BG,$$

$$\therefore CG = AC - AG = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3},$$

$\because \angle C = \angle GBC$,

$$\therefore BG = CG = \frac{20}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{3}{2}BG = 10;$$

【小问 2 详解】

过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M , $FN \perp BD$ 于点 N ,

$\because \angle ADE = \angle ABC$, $\angle ADE + \angle CDE = \angle ABC + \angle FAB$,

$$\therefore \angle FAB = \angle EDC,$$

又 $\because \angle ABG = \angle C$,

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AF}{DE} = \frac{BF}{CE},$$

$\because BF = 2CE$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 4, \quad AF = 2DE,$$

$$\therefore BD = BC - CD = 10 - 4 = 6,$$

$\therefore BG$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore FM = FN,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DBF}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot FM}{\frac{1}{2}BD \cdot FN} = \frac{4}{3} = \frac{AF}{DF},$$

设 $AF = 4x$, 则 $DF = 3x$, $AD = 7x$, $DE = 2x$,

$\therefore \angle AGF = \angle GBC + \angle C = 2\angle C = \angle ABC$, $\angle ADE = \angle ABC$,

$$\therefore \angle AGF = \angle ADE,$$

又 $\therefore \angle FAG = \angle EAD$,

$$\therefore \triangle FAG \sim \triangle EAD,$$

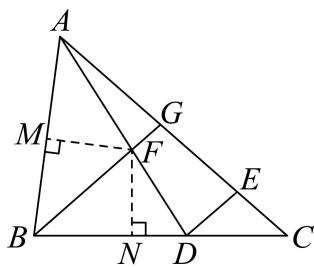
$$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{ED},$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{3}}{7x} = \frac{FG}{2x},$$

$$\therefore FG = \frac{32}{21},$$

$$\therefore BF = BG - FG = \frac{36}{7},$$

$$\therefore \frac{BF}{GF} = \frac{\frac{36}{7}}{\frac{32}{21}} = \frac{27}{8};$$



【小问 3 详解】

$\therefore \triangle ADE$ 是以 AD 为腰的等腰三角形,

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$\therefore \angle AGF = \angle ADE$,

$$\therefore \angle AGF = \angle AED,$$

$$\therefore BG \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore \frac{CE}{CG} = \frac{CD}{CB},$$

$$\therefore \frac{CE}{\frac{20}{3}} = \frac{CD}{10},$$

$$\therefore CD = \frac{3}{2}CE,$$

$$\because BG \parallel DE,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle ADE, \quad \angle GBC = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle AFG = \angle AGF,$$

$$\therefore AF = AG = \frac{16}{3},$$

$$\because \angle FAB = \angle EDC, \quad \angle ABG = \angle GBC = \angle C,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle ABG, \quad \angle EDC = \angle C,$$

$$\therefore BF = AF = \frac{16}{3}, \quad CE = DE,$$

$$\therefore FG = BG - BF = \frac{4}{3},$$

$$\because BG \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle AFG \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{FG}{DE},$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{3}}{12 - CE} = \frac{\frac{4}{3}}{CE},$$

$$\text{解得 } CE = \frac{12}{5},$$

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

电子版资料 小学 初中 高中

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com




$$\therefore BD = BC - CD = 12 - \frac{3}{2}CE = \frac{32}{5}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，平行线的判定与性质，利用面积比求线段比等知识与方法，灵活运用相关知识与方法是解答本题的关键.