

5 上海市金山区 2023 届初三一模数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列 y 关于 x 的函数中, 属于二次函数的是 ()

- A. $y = 2x + 1$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = 3x^2 + 1$ D. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的定义判断解答即可.

【详解】 $\because y = 2x + 1$ 中 x 的指数是 1,

$\therefore y = 2x + 1$ 是一次函数,

$\therefore$ A 选项不符合题意;

$\because y = \frac{2}{x}$ 中 x 的指数是 -1,

$\therefore y = \frac{2}{x}$ 是反比例函数,

$\therefore$ B 选项不符合题意;

$\because y = 3x^2 + 1$ 中 x 的指数是 2, 且 $3x^2 + 1$ 是整式,

$\therefore y = 3x^2 + 1$ 是二次函数,

$\therefore$ C 选项符合题意;

$\because y = \sqrt{x^2 + 1}$ 不是二次函数,

$\therefore$ D 选项不符合题意;

故选 C.

【点睛】本题考查了二次函数的定义, 熟记二次函数的定义, 从指数, 表达式的整式性两个角度思考是解题的关键.

2. 下列各组中的四条线段成比例的是 ()

- A. 1cm、2cm、3cm、4cm B. 2cm、3cm、4cm、5cm
C. 3cm、4cm、6cm、9cm D. 2cm、3cm、4cm、6cm

【答案】D

【解析】

【分析】根据比例线段的概念, 让最小的和最大的相乘, 另外两条相乘, 看它们的积是否相等即可得出答案.

【详解】解：A、 $\because 1 \times 4 \neq 2 \times 3$ ，

$\therefore$ 四条线段不成比例，不符合题意；

B、 $\because 2 \times 5 \neq 3 \times 4$ ，

$\therefore$ 四条线段不成比例，不符合题意；

C、 $\because 3 \times 9 \neq 4 \times 6$ ，

$\therefore$ 四条线段不成比例，不符合题意；

D、 $\because 2 \times 6 = 3 \times 4$ ，

$\therefore$ 四条线段成比例，符合题意；

故选：D.

【点睛】此题考查了比例线段，理解成比例线段的概念，注意在线段两两相乘的时候，要让最小的和最大的相乘，另外两条相乘，看它们的积是否相等进行判断.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $\tan B =$ ()

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

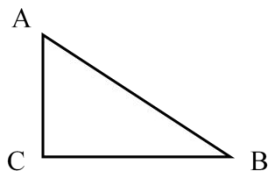
D. $\frac{4}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意及三角函数直接进行求解即可.

【详解】解：如图，由题意得：



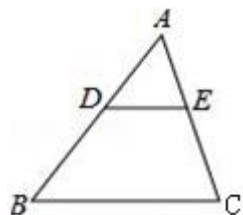
$\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}；$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查三角函数，熟练掌握求一个角的三角函数值是解题的关键.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $AD = 2$ ， $BD = 4$ ，那么由下列条件能够判断 $DE \parallel BC$ 的是()



A. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$

C. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$

D. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$

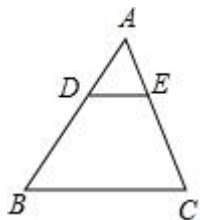
【答案】C

【解析】

【分析】先求出比例式，再根据相似三角形的判定得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似推出 $\angle ADE = \angle B$ ，根据平行线的判定得出即可．

【详解】只有选项C正确，理由：

如图：



$$\because AD=2, BD=4, \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

根据选项A、B、D的条件都不能推出 $DE \parallel BC$ ，

故选C．

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，相似三角形的性质和判定的应用，能灵活运用定理进行推理是解此题的关键．

5. 已知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 是非零向量，下列条件中不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是（ ）

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a} = 3\vec{b}$

C. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

D. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平面向量的定义与性质逐一判断即可得出答案．

【详解】解： $\because \vec{a} \parallel \vec{c}$ ， $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ，

$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b},$$

故 A 选项能判定 $\vec{a} // \vec{b}$;

$$\because \vec{a} = 3\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} // \vec{b},$$

故 B 选项能判定 $\vec{a} // \vec{b}$;

$\because |\vec{a}| = |\vec{b}|$, 不能判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向是否相同,

故 C 选项不能判定 $\vec{a} // \vec{b}$;

$$\because \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{b} = -2\vec{c},$$

$$\therefore \vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{b},$$

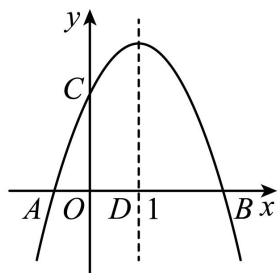
$$\therefore \vec{a} // \vec{b},$$

故 D 选项能判定 $\vec{a} // \vec{b}$,

故正确答案为: C.

【点睛】 本题考查了平面向量, 熟练掌握平面向量的定义与性质是解题的关键.

6. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , 对称轴直线 $x = 1$ 与 x 轴交于点 D , 若 $OA < OD$, 那么下列判断正确的是 ()



A. $a + b + c < 0$

B. $a - b + c > 0$

C. $2a + b + c < 0$

D. $9a + 3b + c < 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据图象和二次函数的性质, 逐一进行判断即可.

【详解】 解: A、由图可知: 当 $x = 1$ 时, $y = a + b + c > 0$, 选项错误, 不符合题意;

B、由图可知: $OD = 1$,

$$\therefore OA < OD,$$

$$\therefore OA < 1,$$

∴ 点 A 的横坐标大于 -1,

∵ $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

∴ 当 $x = -1$ 时的函数值小于点 A 的纵坐标 0,

即: $a - b + c < 0$, 选项错误, 不符合题意;

C、∵ 抛物线的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

∴ $b = -2a$, 即: $2a + b = 0$,

由图可知, 当 $x = 0$ 时, $y = c > 0$,

∴ $2a + b + c = c > 0$, 选项错误, 不符合题意;

D、∵ $0 < OA < 1$, $OD = 1$,

∴ $1 < AD < 2$,

∵ A, B 关于对称轴对称,

∴ $1 < BD < 2$, 即 B 点的横坐标在 $x = 2$ 和 $x = 3$ 之间,

∵ $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

∴ 当 $x = 3$ 时的函数值小于点 B 的纵坐标 0,

即: $9a + 3b + c < 0$, 选项正确, 符合题意;

故选 D.

【点睛】 本题考查根据二次函数的图象, 判断式子的符号. 熟练掌握二次函数的性质, 是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{a-b}{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 将 $\frac{a-b}{b}$ 变形为 $\frac{a}{b} - \frac{b}{b}$, 代入条件即可求值.

【详解】 $\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

故答案为: $\frac{1}{3}$

【点睛】 本题考查比例的性质, 根据式子的特征适当的变形, 再采用整体代入是解题的关键.

8. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, 那么 $f(2) =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据把自变量的值代入函数解析式，可得相应的函数值.

【详解】解： $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$.

故答案为：3

【点睛】本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式是解题关键.

9. 已知 α 是锐角，且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，那么 $\alpha =$ _____.

【答案】 45° ## 45 度

【解析】

【分析】直接根据特殊角的三角函数值解答即可.

【详解】 $\because \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \alpha = 45^\circ$.

故答案为： 45° .

【点睛】本题主要考查了特殊角的三角函数值，记忆特殊角的三角函数值是解题的关键.

10. 将抛物线 $y = 2(x+4)^2$ 向右平移 3 个单位，得到新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = 2(x+1)^2$

【解析】

【分析】根据二次函数图象左加右减，上加下减的平移规律进行解答.

【详解】解：二次函数 $y = 2(x+4)^2$ 的图象向右平移 3 个单位，

得： $y = 2(x+4-3)^2 = 2(x+1)^2$,

故答案为： $y = 2(x+1)^2$.

【点睛】本题考查了函数图象的平移，用平移规律“左加右减，上加下减”直接代入函数解析式求得平移后的函数解析式.

11. 抛物线 $y = (k+2)x^2 - 3x - 1$ 有最高点，那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -2$

【解析】

【分析】根据题意可知 $k+2 < 0$ ，解不等式即可求解.

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = (k+2)x^2 - 3x - 1$ 有最高点，

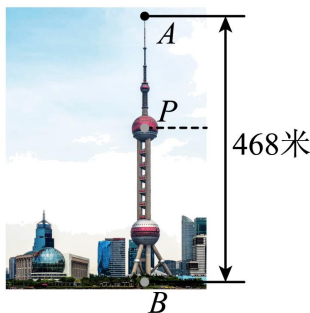
$$\therefore k+2 < 0,$$

解得: $k < -2$,

故答案为: $k < -2$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 掌握二次函数的性质是解题的关键.

12. 如图, 已知上海东方明珠电视塔塔尖 A 到地面底部 B 的距离是 468 米, 第二球体点 P 处恰好是整个塔高的一个黄金分割点 (点 A 、 B 、 P 在一直线), 且 $BP > AP$, 那么底部 B 到球体 P 之间的距离是_____米 (结果保留根号)



【答案】 $(234\sqrt{5} - 234)$

【解析】

【分析】根据黄金分割的定义, 把一条线段分成两部分, 使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项, 这样的线段分割叫做黄金分割, 他们的比值 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ 叫做黄金比.

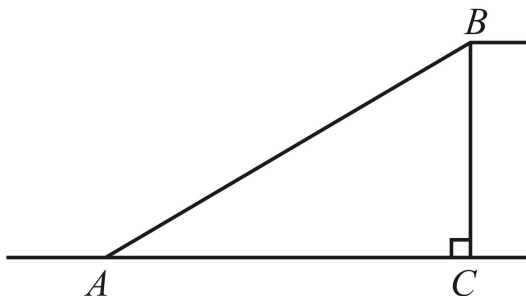
【详解】解: $\because$ 点 P 是线段 AB 上的一个黄金分割点, 且 $AB = 468$ 米, $BP > AP$,

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 468 = (234\sqrt{5} - 234) \text{ 米}.$$

故答案为: $(234\sqrt{5} - 234)$.

【点睛】本题考查了黄金分割的概念, 熟记黄金分割的定义是解题的关键.

13. 某商场营业厅自动扶梯的示意图如图所示, 自动扶梯 AB 坡度 $i = 1:\sqrt{3}$, 自动扶梯 AB 的长度为 12 米, 那么大厅两层之间的高度 $BC =$ _____米.



【答案】6

【解析】

【分析】如图，由坡度易得 BC 与 AC 的比为 $1:\sqrt{3}$ ，设出相应未知数，利用勾股定理可得 BC 的长度.

【详解】解：设大厅两层之间的高度 BC 为 x 米，

如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，坡度： $i = 1:\sqrt{3}$ ， $AB = 12$ ，

$\therefore BC$ 与 AC 的比为 $1:\sqrt{3}$ ，

$\therefore BC = x$ ， $AC = \sqrt{3}x$ ，

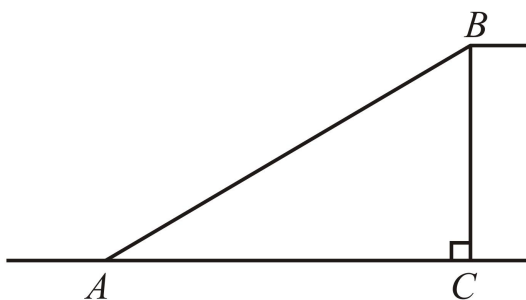
$\therefore BC^2 + AC^2 = AB^2$ ，

$\therefore x^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 12^2$ ，

解得： $x_1 = 6$ ， $x_2 = -6$ （负值不符合题意，舍去），

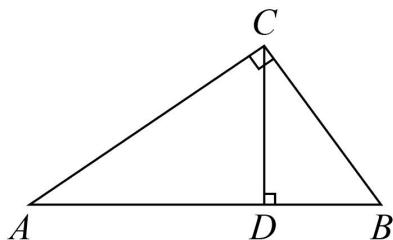
$\therefore$ 大厅两层之间的高度 BC 为 6 米.

故答案为：6.



【点睛】本题考查解直角三角形及勾股定理. 理解坡度的意义是解题的关键.

14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $\tan \angle DCB = \frac{3}{4}$ ， $AC = 12$ ，则 $BC = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】9

【解析】

【分析】根据直角三角形的性质、同角的余角相等得到 $\angle BCD = \angle A$ ，根据正切的定义计算即可

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A,$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中,

$$\therefore \tan A = \tan \angle BCD = \frac{3}{4} = \frac{BC}{AC},$$

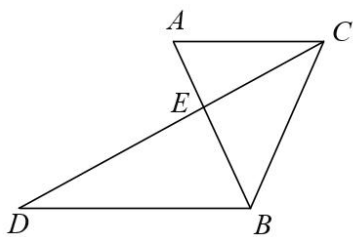
$$\therefore BC = \frac{3}{4} AC = \frac{3}{4} \times 12 = 9.$$

故答案为: 9.

【点睛】 本题考查了解直角三角形: 掌握正切的定义是解题的关键.

15. 如图, AB 与 CD 相交于点 E , $AC \parallel BD$, 联结 BC , 若 $AE = 2, BE = 3$, 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{ED} = \vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{BC} =$ _____ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $-\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】由平行线截线段成比例和平面向量的角形法则解答, 先求出 $\overrightarrow{DE}$ 、 $\overrightarrow{EC}$, 然后表示出 $\overrightarrow{DC}$, 再求出 $\overrightarrow{BD}$,

然后根据 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ 即可求解.

【详解】解: $\because AC \parallel BD$,

$$\therefore \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = -\frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{BD} = -\frac{3}{2}\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = -\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{b}$$

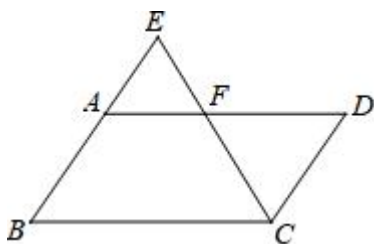
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$$

故答案为: $-\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$

【点睛】 本题考查了平行线的性质和平面向量， 需要掌握平行线截线段成比例和平面向量的三角形法则.

16. 如图， 在平行四边形 $ABCD$ 中， F 是边 AD 上的一点， 射线 CF 和 BA 的延长线交于点 E ， 如果

$C_{\triangle EAF} : C_{\triangle CDF} = 1:2$ ， 那么 $S_{\triangle EAF} : S_{\text{四边形}ABCF} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】 在平行四边形 $ABCD$ 中， 根据 $AB \parallel CD$ ， 得出 $\triangle EAF \sim \triangle CDF$ ， 根据 $\frac{C_{\triangle EAF}}{C_{\triangle CDF}} = \frac{1}{2}$ ， 得出 $\frac{AF}{DF} = \frac{1}{2}$ ，

证明 $\triangle EAF \sim \triangle EBC$ ， 根据相似三角形的性质得到 $\frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{1}{9}$ 即可得到 $S_{\triangle EAF} : S_{\text{四边形}ABCF} = \frac{1}{8}$.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BC$ ， $AF \parallel BC$ ， $AE \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle EAF \sim \triangle CDF$ ，

$$\therefore \frac{C_{\triangle EAF}}{C_{\triangle CDF}} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{1}{3}，$$

$\therefore AF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle EAF \sim \triangle EBC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle EBC}} = \left(\frac{AF}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}，$$

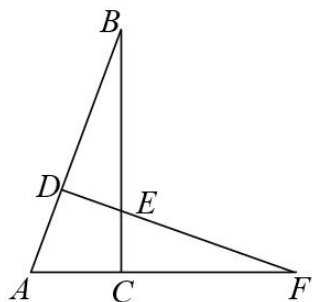
$$\therefore S_{\triangle EAF} : S_{\text{四边形}ABCF} = \frac{1}{8}，$$

故答案为： $\frac{1}{8}$.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质， 相似三角形的性质与判定， 掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

17. 我们把将一个三角形面积分为相等的两个部分的直线称为美丽线. 如图， 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

直线 DE 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的一条美丽线, 直线 DE 分别交边 AB 、 BC 于点 D 、 E , 交 AC 延长线于点 F , 当 $DE \perp AB$, $BD = 2AD$ 时, 那么 $\cos F$ 的值为_____.

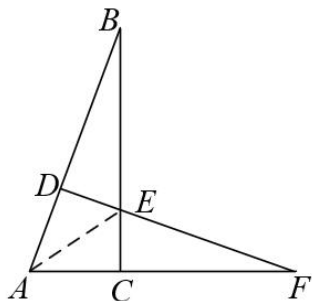


【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】连接 AE , 根据新定义得出 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABE}$, 设 $CE = c$, 则 $BE = 3c$, 根据 $\cos B = \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{AB}$ 得出 $a^2 = 2d^2$, 继而得出 $\frac{a}{d} = \sqrt{2}$, 即可求得 $\cos B = \frac{2a}{3d} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 进而根据等角的余角相等, 得出 $\angle B = \angle F$, 即可求解.

【详解】解: 连接 AE ,



依题意, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 直线 DE 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的一条美丽线,

$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\text{四边形}ACED}$$

$$\because DE \perp AB, BD = 2AD$$

$$\therefore \frac{1}{2}AD \times DE + \frac{1}{2} \times AC \times CE = \frac{1}{2}DE \times BD$$

设 $AD = a$, $DE = b$, 则 $BD = 2a$, .

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2a \times b = \frac{1}{2}ab + S_{\triangle ACE}$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}ab = S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE},$$

设 $CE = d$ ，则 $BE = 3d$ ，

$$\therefore BC = 4d,$$

$$\therefore \cos B = \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{2a}{3d} = \frac{4d}{3a}$$

$$\therefore a^2 = 2d^2,$$

$$\therefore a > 0, d > 0$$

$$\therefore \frac{a}{d} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos B = \frac{2a}{3d} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAC = \angle F + \angle FAD = 90^\circ$$

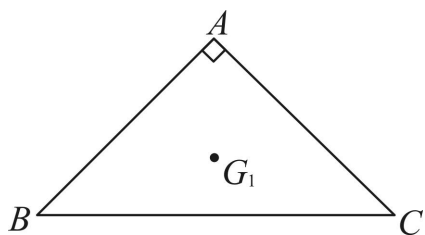
$$\therefore \angle B = \angle F,$$

$$\therefore \cos F = \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】 本题考查了余弦的定义，根据新定义得出 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE}$ 是解题的关键.

18. 如图， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， G_1 为 $\triangle ABC$ 的重心， E 为线段 AB 上任意一动点，以 CE 为斜边作等腰 $\text{Rt}\triangle CDE$ （点 D 在直线 BC 的上方）， G_2 为 $\text{Rt}\triangle CDE$ 的重心，设 G_1 、 G_2 两点的距离为 d ，那么在点 E 运动过程中 d 的取值范围是_____.

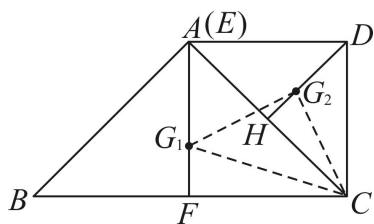


【答案】 $0 \leq d \leq \sqrt{10}$

【解析】

【分析】当点 E 与点 B 重合时, $d = 0$, 当点 E 与点 A 重合时, d 的值最大, 利用重心的性质以及勾股定理求得 $CG_1 = 2\sqrt{5}$, $CG_2 = \sqrt{10}$, 证明 $\triangle CG_1G_2 \sim \triangle BCA$, 推出 $\triangle CG_1G_2$ 是等腰直角三角形, 据此求解即可.

【详解】解: 当点 E 与点 B 重合时, $d = 0$,
当点 E 与点 A 重合时, d 的值最大, 如图, 点 F, H 分别为 BC, AC 的中点,
 $\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$, G_1 为 $\triangle ABC$ 的重心,



$$\therefore AF = BF = FC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore G_1F = \frac{1}{3}AF = \sqrt{2}, \quad CG_1 = \sqrt{CF^2 + G_1F^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{同理 } DH = AH = HC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB = 3,$$

$$\therefore G_2H = \frac{1}{3}DH = 1, \quad CG_2 = \sqrt{CH^2 + G_2H^2} = \sqrt{10},$$

$$\angle BAC = \angle G_1CG_2 = 45^\circ, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{CG_2}{CG_1} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{即 } \frac{CG_2}{CG_1} = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \triangle CG_1G_2 \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \triangle CG_1G_2 \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore G_1G_2 = CG_2 = \sqrt{10},$$

$$\therefore 0 \leq d \leq \sqrt{10},$$

故答案为: $0 \leq d \leq \sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质, 重心的性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的判定和性质, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 10+10+10+10+12+12+14=78 分)

19. 计算: $\frac{4\sin^2 45^\circ - \tan 45^\circ}{2\cos 60^\circ} + 2\cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$.

【答案】 4

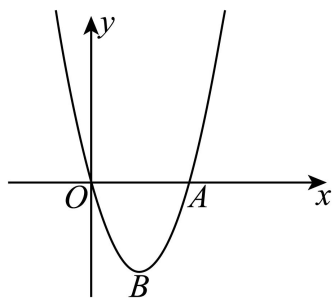
【解析】

【分析】先将特殊角的三角函数值代入，再进行二次根式的计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \frac{4\sin^2 45^\circ - \tan 45^\circ}{2\cos 60^\circ} + 2\cot 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}{2 \times \frac{1}{2}} + 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4 \times \frac{1}{2} - 1}{1} + 3 \\ &= 1 + 3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值，以及二次根式的混合运算，熟记特殊角的三角函数值是解答本题的关键.

20. 如图，已知抛物线 $y = a(x-2)^2 - 4 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于原点 O 与点 A ，顶点为点 B .



- (1) 求抛物线的表达式以及点 A 的坐标;
- (2) 已知点 $P(2, m) (m > 0)$ ，若 $\triangle PAB$ 的面积为 6，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x$, $A(4, 0)$

(2) $P(2, 2)$

【解析】

【分析】(1) 将原点代入解析式求出 a 即可求出表达式，并令 $y = 0$ 求出点 A 坐标;

(2) 先求出顶点 B 的坐标，表示出 BP ，根据三角形面积公式列出等式，解得 m 即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线经过坐标原点 O ，代入得 $4a - 4 = 0$,

解得 $a = 1$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴正半轴交于点 A ,

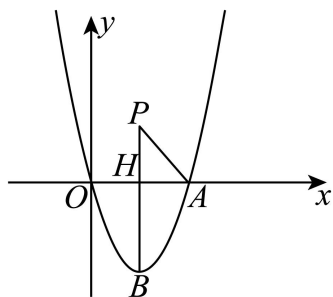
$$\therefore x^2 - 4x = 0,$$

解得 $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = 4$,

$\therefore$ 点 $A(4, 0)$;

【小问 2 详解】

设 PB 与 OA 交于点 H ,



$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x$,

$\therefore$ 顶点 $B(2, -4)$,

$\therefore P(2, m)$,

$\therefore BP = 4 + m, AH = 2$,

$\therefore S_{\triangle PAB} = 6$,

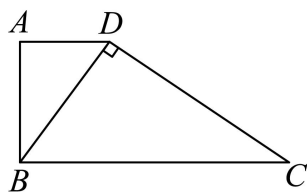
$$\text{即 } \frac{1}{2} \cdot (4 + m) \cdot 2 = 6,$$

解得 $m = 2$,

$\therefore$ 点 $P(2, 2)$.

【点睛】 本题考查待定系数法求二次函数解析式，二次函数的性质，解题的关键是熟知二次函数的性质.

21. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ, AD = 2, BC = 6, BD$ 是对角线， $BD \perp DC$.



(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle DCB$;

(2) 求 CD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】(1) 由题意易知 $\angle A = \angle BDC = 90^\circ$, 由 $AD \parallel BC$, 可知 $\angle ADB = \angle DBC$, 即可证明结论;

(2) 由 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$, 可列比例式 $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$, 即 $BD^2 = BC \cdot AD$, 进而求得 $BD = 2\sqrt{3}$, 再由勾股定理即可 CD 的长度.

【小问 1 详解】

解: $\because BD \perp DC, \angle A = 90^\circ$,

$$\angle A = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABD \sim \triangle DCB$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD},$$

$$\text{即 } BD^2 = BC \cdot AD,$$

$$\because AD = 2, \quad BC = 6,$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{3} \quad (\text{负值舍去}),$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle BDC = 90^\circ$,

$$\therefore BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{6}.$$

【点睛】本题考查相似三角形的判定及性质, 勾股定理, 掌握证明两个三角形相似的方法是解决问题的关键.

22. 如图, 小睿为测量公园的一凉亭 AB 的高度, 他先在水平地面点 E 处用高 1.5m 的测角仪 DE 测得顶部 A 的仰角为 31° , 然后沿 EB 方向向前走 3m 到达点 G 处, 在点 G 处用高 1.5m 的测角仪 FG 测得顶部 A 的仰角为 42° . 求凉亭 AB 的高度 ($AB \perp BE, DE \perp BE, FG \perp BE$, 结果精确到 0.1m).

(参考数据: $\sin 31^\circ \approx 0.52$, $\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.60$, $\sin 42^\circ \approx 0.67$, $\cos 42^\circ \approx 0.74$, $\tan 42^\circ \approx 0.90$)

(1) 求证: $FG = BF$;

(2) 联结 AC 交 DE 于点 O , 联结 BO , 当 $\angle FOB = \angle DAO$ 时, 求证: $DO^2 = AB \cdot GF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 首先证明 $GF \parallel AD$, 再证明 $\frac{GF}{AD} = \frac{BF}{CD}$ 即可解决问题.

(2) 证明 $\triangle OFB \sim \triangle AOB$, 可得 $\frac{BO}{AB} = \frac{BF}{BO}$, 即可解决问题.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AD = CD$

$\because GF \parallel BE$

$\therefore GF \parallel AD$

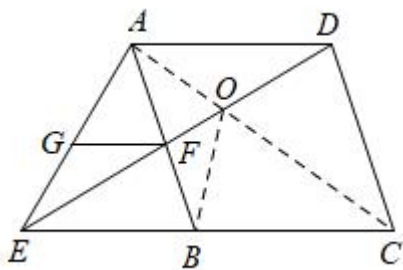
$\therefore \frac{GF}{AD} = \frac{EF}{ED}$, 同理 $\frac{BF}{CD} = \frac{EF}{ED}$

$\therefore \frac{GF}{AD} = \frac{BF}{CD}$

$\because AD = CD$

$\therefore GF = BF$

【小问 2 详解】



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore AC$ 垂直平分 BD

$\therefore BO = DO$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$\therefore \angle FAO = \angle DAO$

$\because \angle FOB = \angle DAO$

$\therefore \angle FAO = \angle FOB$

$$\because \angle FBO = \angle ABO$$

$$\therefore \triangle OFB \sim \triangle AOB$$

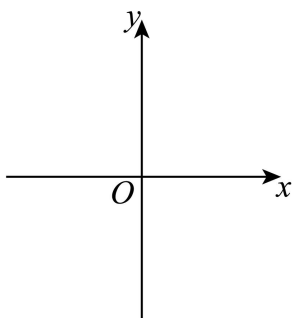
$$\therefore \frac{BO}{AB} = \frac{BF}{BO} \text{ 即 } BO^2 = AB \cdot BF$$

$$\because BO = DO, \quad GF = BF$$

$$\therefore DO^2 = AB \cdot GF$$

【点睛】本题考查菱形的性质和判定，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识属于中考常考题型.

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过点 $A(1, 0)$ ， $B(-2, -3)$ ，顶点为点 P ，与 y 轴交于点 C .



(1) 求该抛物线的表达式以及顶点 P 的坐标;

(2) 将抛物线向上平移 $m(m > 0)$ 个单位后，点 A 的对应点为点 M ，若此时 $MB \parallel AC$ ，求 m 的值;

(3) 设点 D 在抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 上，且点 D 在直线 BC 上方，当 $\angle DBC = \angle BAC$ 时，求点 D 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 3$ ， $P(-1, -4)$

(2) $m = 6$

(3) $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 由题意可得 $C(0, -3)$ ，由此可求得直线 AC 的解析式为 $y = 3x - 3$ ，由 $MB \parallel AC$ ，可设直线 MB 解析式为 $y = 3x + b_2$ ，进而求得其解析式为 $y = 3x + 3$ ，由 $M_x = 1$ ，代入直线 MB 的表达式求得 $M(1, 6)$ ，即可求得 m 的值;

(3) 由点 $A(1, 0)$ ， $B(-2, -3)$ ， $C(0, -3)$ ，易知 $AB = 3\sqrt{2}$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，作 $DH \perp$ 直线 BC 于 H ，作

$CK \perp AB$ 于 K , 在 $Rt\triangle BCK$ 中, $\sin \angle ABC = \frac{CK}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 进而可求得 $CK = BK = \sqrt{2}$, $AK = 2\sqrt{2}$,

可得 $\tan \angle CAK = \frac{1}{2}$, 由 $\angle DBC = \angle BAC$, 可得 $\tan \angle DBC = \frac{1}{2}$, 在 $Rt\triangle DBH$ 中, 可设 $DH = k$, 则

$BH = 2k$, 可知 $D(2k-2, k-3)$, 将其代入 $y = x^2 + 2x - 3$, 求出 k 即可得点 D 坐标.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 抛物线经过 A 、 B , 代入得 $\begin{cases} a+b-3=0 \\ 4a-2b-3=-3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$,

$\therefore$ 顶点 $P(-1, -4)$;

【小问 2 详解】

令 $x=0$, 则 $y=-3$, 即 $C(0, -3)$

$\therefore$ 直线 AC 经过点 A 、 C , 设其解析式为 $y = k_1x + b_1$,

则 $\begin{cases} k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = -3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k_1 = 3 \\ b_1 = -3 \end{cases}$

$\therefore$ 直线 $AC: y = 3x - 3$,

$\therefore MB \parallel AC$, 且直线 MB 经过点 $B(-2, -3)$, 设解析式为 $y = 3x + b_2$,

则 $-3 = 3 \times (-2) + b_2$, 解得 $b_2 = 3$,

$\therefore$ 直线 $MB: y = 3x + 3$,

$\therefore$ 点 M 是点 A 向上平移 m 个单位所得

$\therefore M_x = 1$, 代入直线 MB 的表达式, 得 $M(1, 6)$

$\therefore m = 6$;

【小问 3 详解】

由点 $A(1, 0)$, $B(-2, -3)$, $C(0, -3)$,

则 $|x_A - x_B| = |y_A - y_B| = 3$, 易知 $AB = 3\sqrt{2}$, $\angle ABC = 45^\circ$,

作 $DH \perp$ 直线 BC 于 H , 作 $CK \perp AB$ 于 K ,

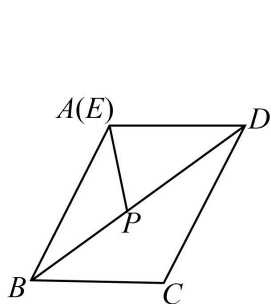


图1

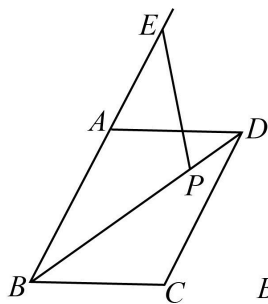
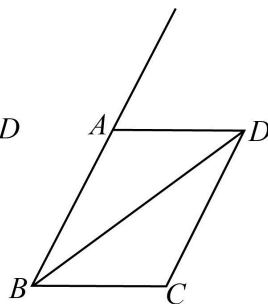


图2



备用图

- (1) 如图 1, 当点 E 与点 A 重合时, 证明: $\triangle ABP \sim \triangle BCD$;
- (2) 如图 2, 点 E 在 BA 的延长线上, 当 $EP = AD$ 时, 求 AE 的长;
- (3) 当 $\triangle APE$ 是以 AP 为底的等腰三角形时, 求 AE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $10 - 3\sqrt{5}$

(3) $3\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 由平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$, 则 $\angle ABP = \angle BDC$, 由角之间的关系得到 $\angle BAP = \angle DBC$, 即可证明 $\triangle ABP \sim \triangle BCD$;

(2) 设 AD 、 EP 交于点 O . 先证明 $\triangle EBP \cong \triangle DBA$, 得到 $BD = BE$, 过点 D 作 $DH \perp BC$ 延长线于 H , 由 $ABCD$ 得到 $\angle DCH = \angle ABC$, 则 $\tan \angle DCH = \tan \angle ABC = 2$, 在 $\text{Rt}\triangle DCH$ 中, $\cos \angle DCH = \frac{CH}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 由 $AB = CD = 3\sqrt{5}$, 得到 $CH = 3$, $DH = 6$, $BH = 8$, 在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, 由

勾股定理得到 $BD = 10$, 则 $BE = 10$, 即可得到 $AE = 10 - 3\sqrt{5}$;

(3) 当点 E 在边 BA 延长线上或在边 BA 上两种情况, 分别求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABP = \angle BDC$,

$\because \angle ABP + \angle BAP = \angle APD$,

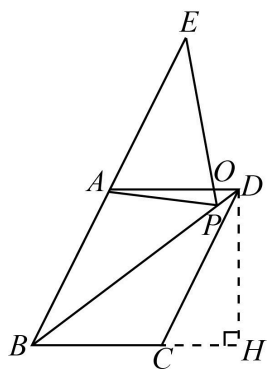
又 $\angle ABP + \angle DBC = \angle ABC$ 且 $\angle EPD = \angle ABC$,

$\therefore \angle BAP = \angle DBC$,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle BCD$;

【小问 2 详解】

设 AD 、 EP 交于点 O 。



$$\because ABCD,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle ABC,$$

$$\because \angle EPD = \angle ABC$$

$$\therefore \angle EPD = \angle EAD,$$

$$\because \text{在 } \triangle AOE \text{ 中, } \angle EAO + \angle AEO + \angle AOE = 180^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle PDO \text{ 中, } \angle DPO + \angle PDO + \angle DOP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle DOP,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle PDO,$$

$$\because \angle EBP = \angle DBA, \quad AD = PE,$$

$$\therefore \triangle EBP \cong \triangle DBA,$$

$$\therefore BD = BE,$$

过点 D 作 $DH \perp BC$ 延长线于 H ,

$$\because ABCD,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCH = \angle ABC,$$

$$\therefore \tan \angle DCH = \tan \angle ABC = 2,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DCH \text{ 中, } \cos \angle DCH = \frac{CH}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\because AB = CD = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore CH = 3,$$

$$\therefore DH = 6,$$

$$\therefore BC = 5,$$

$$\therefore BH = 8,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle BDH \text{ 中, } DH^2 + BH^2 = BD^2,$$

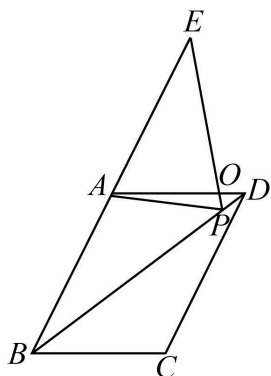
$$\therefore BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 10,$$

$$\therefore BE = 10,$$

$$\therefore AE = 10 - 3\sqrt{5};$$

【小问 3 详解】

$\triangle AEP$ 是以 AP 为底的等腰三角形时,



$\therefore$ 当点 E 在边 BA 延长线上时,

$$\text{设 } EA = EP = x, \text{ 则 } BE = 3\sqrt{5} + x,$$

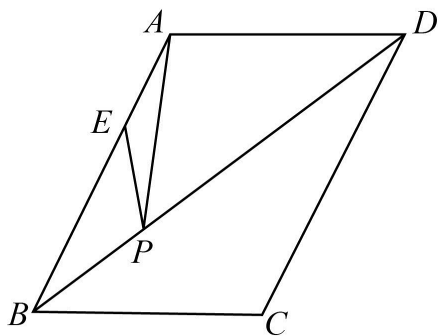
$$\text{由 } \triangle EBP \sim \triangle BDC \text{ 得, } \frac{EP}{BC} = \frac{BE}{BD},$$

$$\text{即 } \frac{x}{5} = \frac{3\sqrt{5} + x}{10},$$

$$\text{解得 } x = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AE = 3\sqrt{5};$$

当点 E 在边 BA 上时, 设 $EA = EP = x$,



$$\text{则 } BE = 3\sqrt{5} - x,$$

由 $\triangle EBP \sim \triangle BDC$ 得,

$$\frac{EP}{BC} = \frac{BE}{BD}, \text{ 即 } \frac{x}{5} = \frac{3\sqrt{5}-x}{10},$$

解得 $x = \sqrt{5}$,

$$\therefore AE = \sqrt{5},$$

$\therefore$ 综上所述, AE 长为 $3\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}$.

【点睛】 此题考查了相似三角形的判定和性质、平行四边形的性质、解直角三角形、全等三角形的判定和性质等知识, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

