

2023 学年第一学期期末学情诊断

初三数学试卷

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向左平移 1 个单位后得到的抛物线表达式是 ()

- A. $y = 2x^2 - 1$ B. $y = 2x^2 + 1$ C. $y = 2(x+1)^2$ D. $y = 2(x-1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线平移的规律“上加下减, 左加右减”即可选择.

【详解】原抛物线向左平移 1 个单位后得:

$$y = 2(x+1)^2.$$

故选 C.

【点睛】本题考查抛物线平移与抛物线解析式的变化规律. 掌握其规律“上加下减, 左加右减”是解答本题的关键.

2. 已知点 E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 上一点, 连接 CE 和 BD 相交于点 F , 如果 $AE:ED = 1:2$, 那么 $DF:FB$ 为()

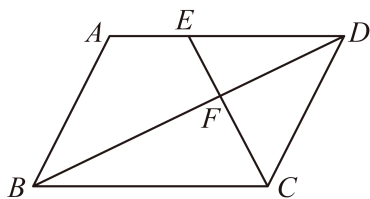
- A. 1:2 B. 1:3 C. 2:3 D. 2:5

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质、相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定是解题关键. 先画出图形, 根据平行四边形的性质可得 $\frac{ED}{BC} = \frac{2}{3}$, $AD \parallel BC$, 再证出 $\triangle DEF \sim \triangle BCF$, 根据相似三角形的性质即可得.

【详解】解: 由题意, 画出图形如下:



$$\because AE:ED = 1:2,$$

$$\therefore \frac{ED}{AD} = \frac{2}{3},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{2}{3}, \triangle DEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{DF}{FB} = \frac{ED}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } DF:FB = 2:3,$$

故选: C.

3. 在直角坐标平面的第一象限内有一点 $A(a, b)$, 如果射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 那么下列各式正确的是()

A. $b = a \cdot \tan \alpha$

B. $b = a \cdot \cot \alpha$

C. $b = a \cdot \sin \alpha$

D. $b = a \cdot \cos \alpha$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了坐标与图形, 解直角三角形, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B , 则 $AB = b$, $OB = a$, 再由正切的定义得到 $\tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{b}{a}$, 则 $b = a \cdot \tan \alpha$.

【详解】 解: 如图所示, 过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ,

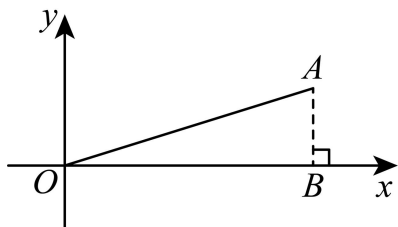
$$\because A(a, b),$$

$$\therefore AB = b, OB = a,$$

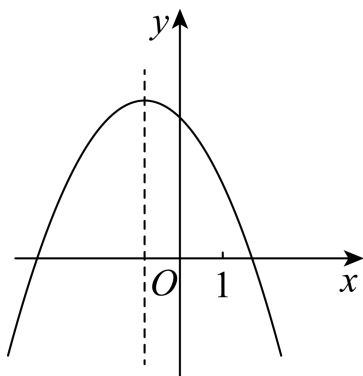
$$\therefore \tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{b}{a},$$

$$\therefore b = a \cdot \tan \alpha,$$

故选 A.



4. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图像如图所示，下列判断中不正确的是()



- A. $a < 0$ B. $b < 0$ C. $c > 0$ D. $a + b + c < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图像与性质，理解并掌握二次函数的图像与性质是解题关键. 由该抛物线开口向下，可知 $a < 0$ ，即可判断选项 A；由该抛物线对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，结合 $a < 0$ ，可得 $b < 0$ ，即可判断选项 B；由图像可知，当 $x = 0$ 时，可有 $y = c > 0$ ，即可判断选项 C；由图像可知，当 $x = 1$ 时，可有 $y = a + b + c > 0$ ，即可判断选项 D.

【详解】 解：A. 该抛物线开口向下，所以 $a < 0$ ，故该选项正确，不符合题意；

B. 该抛物线对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，又因为 $a < 0$ ，所以 $b < 0$ ，故该选项正确，不符合题意；

C. 由图像可知，当 $x = 0$ 时，可有 $y = c > 0$ ，故该选项正确，不符合题意；

D. 由图像可知，当 $x = 1$ 时，可有 $y = a + b + c > 0$ ，故该选项不正确，符合题意.

故选：D.

5. 将一张矩形纸片沿较长边的中点对折，如果得到的两个矩形都和原来的矩形相似，那么原来矩形较长边和较短边的比是()

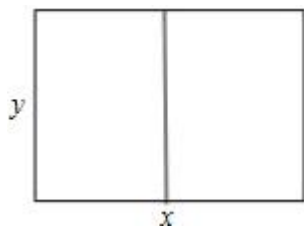
- A. 2:1 B. $\sqrt{2}:1$ C. 3:1 D. $\sqrt{3}:1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了相似多边形的性质，熟练掌握相似多边形对应边成比例的性质是解题关键．表示出对折后的矩形的长和宽，再根据相似矩形对应边成比例列出比例式，然后求解．

【详解】解：设原来矩形的长为 x ，宽为 y ，



则对折后的矩形的长为 y ，宽为 $\frac{x}{2}$ ，

$\therefore$ 得到的两个矩形都和原矩形相似，

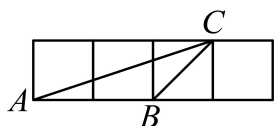
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{1}{2}x},$$

解得 $x = \sqrt{2}y$ ，

$$\therefore x:y = \sqrt{2}y:y = \sqrt{2}:1.$$

故选：B.

6. 如图在 4×1 的方格中，每一个小正方形的顶点叫做格点，以其中三个格点为顶点的三角形称为格点三角形， $\triangle ABC$ 就是一个格点三角形，现从 $\triangle ABC$ 的三个顶点中选取两个格点，再从余下的格点中选取一个格点联结成格点三角形，其中与 $\triangle ABC$ 相似的有()



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定，勾股定理，根据三边对应成比例的三角形相似进行求解即可．

【详解】解：如图所示，由网格的特点可知 $AB = 2$ ， $BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ， $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

$$CE = 1, BC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, BE = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

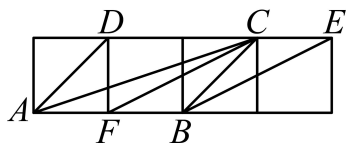
$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{EC} = \frac{AC}{BE},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCE,$$

同理可证明 $\triangle ABC \sim \triangle CDA$ ， $\triangle ABC \sim \triangle CBF$ ，

∴从 $\triangle ABC$ 的三个顶点中选取两个格点, 再从余下的格点中选取一个格点联结成格点三角形, 其中与 $\triangle ABC$ 相似的有 3 个,

故选 C.



二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $\frac{a}{5} = \frac{b}{3}$ ($b \neq 0$), 那么 $\frac{a-b}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了比例的性质, 熟练掌握比例的性质是解题关键. 设 $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = k$, 则有 $a = 5k, b = 3k$, 然后代入求值即可.

【详解】解: 设 $\frac{a}{5} = \frac{b}{3} = k$, 则 $a = 5k, b = 3k$,
 $\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{5k-3k}{3k} = \frac{2k}{3k} = \frac{2}{3}$.

故答案为: $\frac{2}{3}$.

8. 化简: $2(-\vec{a} + 3\vec{b}) - 6\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-2\vec{a}$

【解析】

【分析】本题主要考查向量的加减运算, 理解和掌握向量的加减运算是解题的关键. 先去括号, 然后结合向量的加减运算即可求解.

【详解】解: $2(-\vec{a} + 3\vec{b}) - 6\vec{b} = -2\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{b} = -2\vec{a}$.

故答案为: $-2\vec{a}$.

9. 已知两个相似三角形的相似比为 2:3, 那么这两个三角形的周长比为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2:3

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质, 根据相似三角形的周长之比等于相似比的平方进行求解即可.

【详解】解: $\because$ 两个相似三角形的相似比为 2:3,

$\therefore$ 这两个三角形的周长比为 2:3,

故答案为: 2:3.

10. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点 ($AP > BP$), 如果 $AB = 2$, 那么 $AP =$ ____.

【答案】 $-1 + \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 由题意知, $BP = AB - AP = 2 - AP$, 由点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 可得 $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$, 即 $\frac{AP}{2} = \frac{2 - AP}{AP}$, 整理得 $AP^2 - 2AP + 4 = 0$, 计算求出满足要求的解即可.

【详解】 解: 由题意知, $BP = AB - AP = 2 - AP$,

$\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点,

$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$, 即 $\frac{AP}{2} = \frac{2 - AP}{AP}$, 整理得 $AP^2 - 2AP + 4 = 0$,

解得: $AP = -1 + \sqrt{5}$ 或 $AP = -1 - \sqrt{5}$ (舍去),

故答案为: $-1 + \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考出来黄金分割, 解一元二次方程组. 解题的关键在于对黄金分割的熟练掌握与灵活运用.

11. 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$ 的顶点坐标是_____.

【答案】 $(0, -3)$

【解析】

【分析】 本题考查了抛物线顶点坐标, 根据公式计算即可.

【详解】 抛物线 $y = \frac{2}{3}x^2 - 3$ 的顶点坐标是 $(0, -3)$,

故答案为: $(0, -3)$.

12. 如果点 $A(2, a)$ 、 $B(3, b)$ 在二次函数 $y = x^2 - 3x$ 的图像上, 那么 a _____ b 填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”)

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题主要考查了比较二次函数值的大小, 分别求出当 $x = 2$ 时, 当 $x = 3$ 时的函数值即可得到答案.

【详解】 解: 在 $y = x^2 - 3x$ 中, 当 $x = 2$ 时, $y = 2^2 - 3 \times 2 = -2$,

当 $x = 3$ 时, $y = 3^2 - 3 \times 3 = 0$,

$$\therefore -2 < 0,$$

$$\therefore a < b,$$

故答案为: $<$.

13. 如果 α 是直角三角形的一个锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 那么 $\tan \alpha =$ _____.

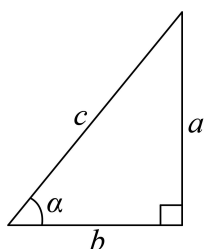
【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正弦和正切的知识, 熟练掌握正弦和正切的定义是解题关键. 由题意可知,

$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$, 可设 $a = 4k, c = 5k$, 则 $b = 3k$, 然后根据正切的定义求解即可.

【详解】 解: 如下图,



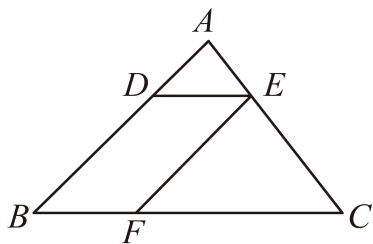
由题意可知, $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$,

设 $a = 4k, c = 5k$, 则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 3k$,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}.$$

故答案为: $\frac{4}{3}$.

14. 如图, 已知 D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 、 BC 上的点, $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$, $\triangle ADE$ 、 $\triangle EFC$ 的面积分别为 1、4, 四边形 $BFED$ 的面积为_____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定, 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle EFC$, 推出

$\frac{AE}{EC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle EFC}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, 进而得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$, 再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 得到 $S_{\triangle ABC} = 9S_{\triangle ADE} = 9$, 则

$$S_{\text{四边形}BFED} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEF} = 4.$$

【详解】解：∵ $DE \parallel BC$, $EF \parallel AB$

$$\therefore \angle AED = \angle C, \angle A = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle EFC,$$

∵ $\triangle ADE$ 的面积为 1, $\triangle CEF$ 的面积为 4,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CEF}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

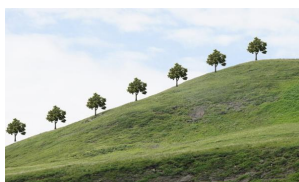
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 9S_{\triangle ADE} = 9,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BFED} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEF} = 4,$$

故答案为：4.

15. 如图，在山坡上种树，要求株距（相邻两树间的水平距离）是 4 米，斜坡的坡度 $i = 1:2$ ，那么相邻两树间的坡面距离为_____米.



【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的实际应用，勾股定理，先根据坡度得到 $BC = \frac{1}{2}AC = 2\text{m}$ ，再利用勾股定理求出 AB 的长即可得到答案.

【详解】解：如图，斜坡 AB 的坡度 $i = 1:2$,

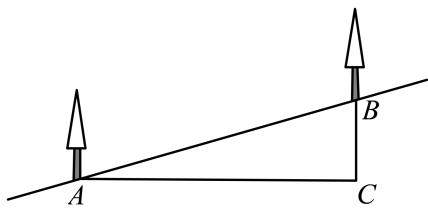
$$\therefore BC: AC = 1:2,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AC = 2\text{m},$$

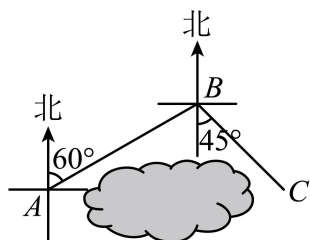
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{5}\text{m},$$

∴ 相邻两树间的坡面距离为 $2\sqrt{5}$ 米,

故答案为: $2\sqrt{5}$.



16. 如图, 为了避开岛礁区, 一艘船从 A 处向北偏东 60° 的方向行驶 8 海里到 B 处, 再从 B 处向南偏东 45° 方向行驶到发点 A 正东方向上的 C 处, 此时这艘船距离出发点 A 处_____海里.

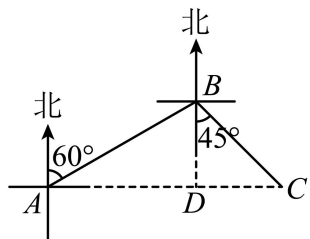


【答案】 $(4\sqrt{3} + 4)$

【解析】

【分析】 根据直角三角形的三角函数得出, $BD = AB \sin 30^\circ = 4$ (海里), $AD = AB \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (海里), 进而得出 $CD = BD = 4$ (海里), 计算即可. 此题考查了方向角、解直角三角形的应用, 解题的关键是根据直角三角形的三角函数解答.

【详解】 解: 如图



根据题意, 得 $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$, $\angle DBC = 45^\circ$, $AB = 8$ 海里,

∴ $BD = AB \sin 30^\circ = 4$ (海里), $AD = AB \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (海里),

$CD = BD = 4$ (海里),

$AC = AD + DC = (4\sqrt{3} + 4)$ (海里),

故答案为: $(4\sqrt{3} + 4)$.

17. 把矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到矩形 $A'B'CD'$, 其中点 A 对应点 A' 在 BD 的延长线上, 如果

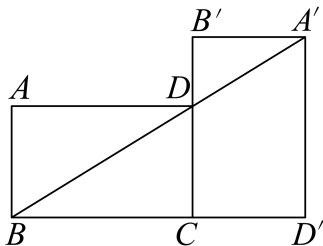
$AB = 1$, 那么 $BC =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是旋转的性质，矩形的性质，相似三角形的判定与性质，一元二次方程的解法，本题先画出图形，再证明 $\triangle BCD \sim \triangle B'A'D$ ，再建立方程求解即可.

【详解】 解：如图，矩形 $ABCD$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到矩形 $A'B'CD'$,



$\therefore AB = CD = A'B' = CD' = 1$, 设 $BC = B'C = x$,

$\therefore$ 点 A 对应点 A' 在 BD 的延长线上,

$\therefore B'D = x - 1$, $BC \parallel A'B'$,

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle B'A'D$,

$$\therefore \frac{BC}{A'B'} = \frac{CD}{B'D},$$

$$\therefore \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}, \text{ 即 } x^2 - x - 1 = 0,$$

解得: $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根舍去), 经检验符合题意;

$$\therefore BC = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 6$, P 是 AB 上的一点, Q 为 AC 上一点, 直线 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分, 且 $\triangle APQ$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 如果这样的直线 PQ 有两条, 那么边 AB 长度的取值范围是_____.

【答案】 $3\sqrt{2} \leq AB \leq 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质, 当 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ 时, 只要满足 $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 都能满足

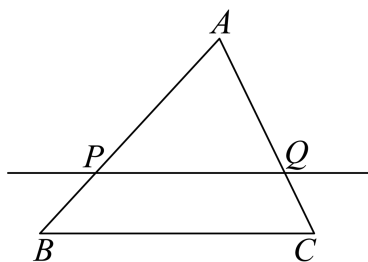
题意：当 $\triangle APQ \sim \triangle ACB$ 时，得到 $\frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $AP = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 3\sqrt{2}$ ， $AQ = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$ ，再由

$AP \leq AB$ ， $AQ \leq AC$ ，可得 $3\sqrt{2} \leq AB \leq 6\sqrt{2}$ ，据此可得答案.

【详解】解：如图所示，当 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ 时，

$$\therefore \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AQ}{AC}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 只要满足 $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，都能满足题意；



如图所示，当 $\triangle APQ \sim \triangle ACB$ 时，

$\therefore$ 直线 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AP}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AQ}{AB}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 3\sqrt{2}, \quad AQ = \frac{\sqrt{2}}{2} AB,$$

$\therefore AP \leq AB$ ， $AQ \leq AC$ ，

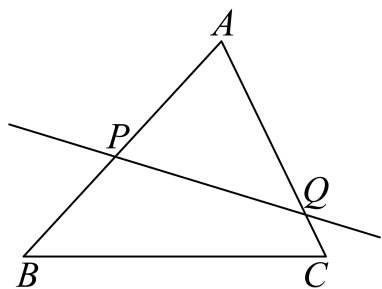
$$\therefore AB \geq 3\sqrt{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} AB \leq 6,$$

$$\therefore 3\sqrt{2} \leq AB \leq 6\sqrt{2};$$

综上所述，直线 PQ 把 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分，且 $\triangle APQ$ 和 $\triangle ABC$ 相似，如果这样的直线 PQ 有两

条，那么边 AB 长度的取值范围是 $3\sqrt{2} \leq AB \leq 6\sqrt{2}$ 。

故答案为: $3\sqrt{2} \leq AB \leq 6\sqrt{2}$



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\frac{\sin^2 45^\circ - 1}{\tan 45^\circ} + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

【答案】 0

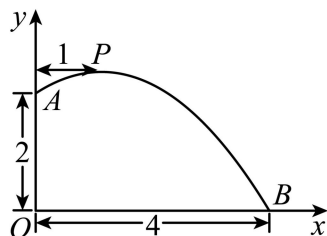
【解析】

【分析】 本题主要考查了锐角三角函数的混合运算. 先将特殊角锐角三角函数值代入, 再合并, 即可求解.

【详解】 解: $\frac{\sin^2 45^\circ - 1}{\tan 45^\circ} + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1}{1} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

20. 某学校有一喷水池, 如果以喷水口 (点 A) 所在的铅垂线为 y 轴, 相应的地面水平线为 x 轴, 1 米为单位长度建立直角坐标系 xOy , 喷出的抛物线形水柱在最高处 (点 P) 距离 y 轴 1 米, 水柱落地处 (点 B) 距离 y 轴 4 米, 喷水口距离地面为 2 米, 求抛物线形水柱的最高处距离地面的高度.



【答案】 $\frac{9}{4}$ 米

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的应用，利用待定系数法解得抛物线解析式是解题关键．设该抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 + k$ ，结合题意，将点 $(0,2)$ ， $(4,0)$ 代入并求解，即可确定该抛物线解析式，即可获得答案．

【详解】 解：设该抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 + k$ ，

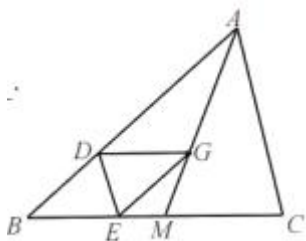
将点 $(0,2)$ ， $(4,0)$ 代入，

$$\text{可得} \begin{cases} 2 = a + k \\ 0 = 9a + k \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ k = \frac{9}{4} \end{cases},$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{9}{4}$ ，其顶点坐标为 $(1, \frac{9}{4})$ ，

$\therefore$ 抛物线形水柱的最高处距离地面的高度为 $\frac{9}{4}$ 米．

21. 已知：如图， AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 G 是重心，点 D 、 E 分别在边 AB 和 BC 上，四边形 $BEGD$ 是平行四边形．



(1) 求证： $DE \parallel AC$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{DE} =$ _____．

【答案】 (1) 证明见解析；

(2) $\frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$ ．

【解析】

【分析】 (1) 由三角形重心的性质得到 $AG = 2GM$ ，由平行四边形的性质得到 $GE \parallel AB$ ， $DG \parallel BM$ ，推出 $BE : EM = AG : GM$ ，得到 $BE = \frac{2}{3}MB$ ，而 $MB = \frac{1}{2}BC$ ，得到 $BE = \frac{1}{3}BC$ ，由 $DG \parallel BM$ ，推出 $BD : AD = MG : AG$ 得到 $BD = \frac{1}{3}BA$ ，因此 $BD : BA = BE : BC = \frac{1}{3}$ ，而 $\angle DBE = \angle ABC$ ，推出 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，得到 $\angle BDE = \angle BAC$ ，即可证明 $DE \parallel AC$ ，

(2) 由平面向量的运算法则，即可求解；

本题考查三角形的重心，相似三角形的判定和性质，平行四边形的性质，平面向量，关键是证明

$\triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，掌握平面向量的运算法则.

【小问 1 详解】

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG = 2GM,$$

$\because$ 四边形 $BEGD$ 是平行四边形,

$$\therefore GE \parallel AB, DG \parallel BM,$$

$$\therefore BE : EM = AG : GM$$

$$\therefore BE = 2ME,$$

$$\therefore BE = \frac{2}{3}MB,$$

$\because AM$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$$\therefore MB = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{3}BC,$$

$$\because DG \parallel BM,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABM,$$

$$\therefore AD : AB = AG : AM,$$

$$\therefore BD : AD = MG : AG,$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore MG = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{3}BA,$$

$$\therefore BD : BA = BE : BC = \frac{1}{3},$$

$$\because \angle DBE = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BAC$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

【小问 2 详解】

$$\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore DE:AC = BD:BA = 1:3,$$

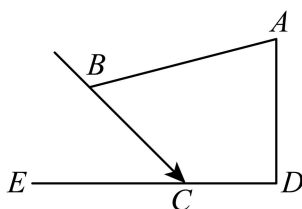
$$\therefore DE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}).$$

22. 随着人民生活水平的日益提高,许多农村的房屋普遍进行了改造,小明家改造时在门前安装了一个遮阳棚,如图,在侧面示意图中,遮阳篷 AB 长为 4 米,与墙面 AD 的夹角 $\angle BAD = 75.5^\circ$,靠墙端 A 离地高 AD 为 3 米,当太阳光线 BC 与地面 DE 的夹角为 45° 时,求阴影 CD 的长.(结果精确到 0.1 米;参考数据: $\sin 75.5^\circ \approx 0.97$, $\cos 75.5^\circ \approx 0.25$, $\tan 75.5^\circ \approx 3.87$)



【答案】 1.9m

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的实际应用,矩形的性质与判定,过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G , $BF \perp CE$ 于点 F , 则四边形 $DGBF$ 是矩形, 据此可得 $BF = DG$, $BG = DF$, 解 $\text{Rt}\triangle ABG$ 得到 $AG \approx 1.0\text{m}$, $BG \approx 3.9\text{m}$, 进而求出 $BF = 2.0\text{m}$, 再解 $\text{Rt}\triangle BCF$ 得到 $CF = 2.0\text{m}$, 则 $CD = DF - CF = BG - CF = 1.9\text{m}$.

【详解】 解: 如图所示, 过点 B 作 $BG \perp AD$ 于点 G , $BF \perp CE$ 于点 F , 则四边形 $DGBF$ 是矩形,
 $\therefore BF = DG$, $BG = DF$,

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, $\angle BAD = 75.5^\circ$, $\angle AGB = 90^\circ$, $AB = 4\text{m}$,

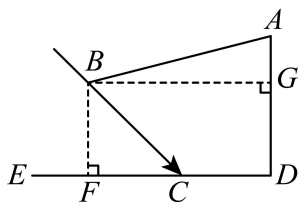
$$\therefore AG = AB \cdot \cos \angle BAG = 4 \times \cos 75.5^\circ \approx 1.0\text{m}, \quad BG = AB \cdot \sin \angle BAG = 4 \times \sin 75.5^\circ \approx 3.9\text{m},$$

$$\therefore BF = DG = AD - AG = 2.0\text{m},$$

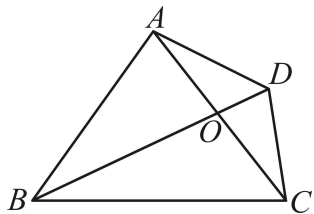
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中, } CF = \frac{BF}{\tan \angle BCF} = \frac{2.0}{\tan 45^\circ} = 2.0\text{m},$$

$$\therefore CD = DF - CF = BG - CF = 3.9 - 2.0 = 1.9\text{m},$$

$\therefore$ 阴影 CD 的长为 1.9m.



23. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $\angle BAC = \angle BDC$ 。



(1) 求证： $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ ；

(2) 过点 A 作 $AE \parallel CD$ ， AE 交 BD 于点 E 。求证： $AB \cdot AD = AE \cdot BC$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是相似三角形的判定与性质，熟练的证明两个三角形相似是解本题的关键。

(1) 先证明 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，可得 $\frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO}$ ，结合 $\angle AOD = \angle BOC$ ，可得 $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ ；

(2) 证明 $\angle AED = \angle BDC$ ，可得 $\angle AED = \angle BAC$ ，证明 $\angle ADE = \angle ACB$ ，可得 $\triangle EDA \sim \triangle ACB$ ，再利用相似三角形的性质可得结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle BAC = \angle BDC$ ， $\angle AOB = \angle DOC$ ，

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC$ ，

$\therefore \frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO}$ ，

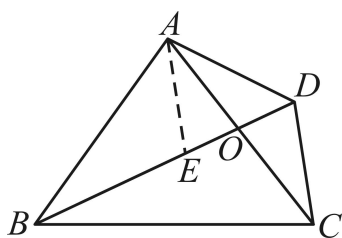
$\because \angle AOD = \angle BOC$ ，

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC$ 。

【小问 2 详解】

如图，过点 A 作 $AE \parallel CD$ ，

$\therefore \angle AED = \angle BDC$ ，



$$\therefore \angle BAC = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC,$$

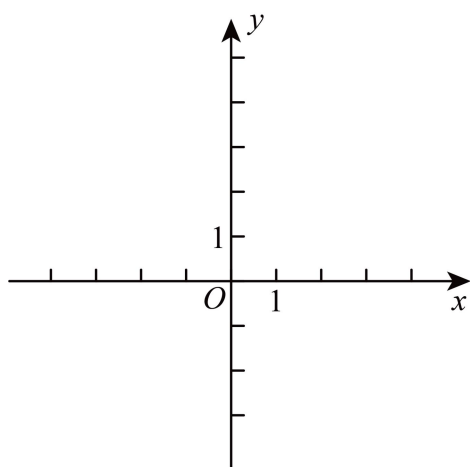
$$\therefore \angle ADE = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle EDA \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot BC = AB \cdot AD.$$

24. 已知：在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, -3)$ 。



(1) 求抛物线的表达式和顶点 P 的坐标；

(2) 点 D 在抛物线对称轴上， $\angle PAD = 90^\circ$ ，求点 D 的坐标；

(3) 抛物线的对称轴和 x 轴相交于点 M ，把抛物线平移，得到新抛物线的顶点为点 Q ， $QB = QM$ ， QO 的延长线交原抛物线为 E ， $QO = OE$ ，求新抛物线的表达式。

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ ， $(1, -4)$

(2) $(1, 1)$

(3) $y = x^2 - 4x - 1$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法解得该抛物线解析式，并将其转化为顶点式，即可确定点 P 的坐标；

(2) 设点 $D(1, m)$ ，根据勾股定理可得 $AP^2 = 20$ ， $AD^2 = m^2 + 4$ ， $PD^2 = m^2 + 8m + 16$ ，在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中，由勾股定理可得 $AP^2 + AD^2 = PD^2$ ，然后代入求值，即可获得答案；

(3) 首先过点 Q 作 $QH \perp MB$ 于点 H ，根据等腰三角形“三线合一”的性质确定点 H 为 MB 中点，易得

$H(2,0)$ ；过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G ，证明 $\triangle OEG \cong \triangle OQH$ ，由全等三角形的性质可得 $OG = OH = 2$ ， $EG = QH$ ，易知点 E 的横坐标为 -2 ，进而确定点 $E(-2,5)$ ，点 $Q(2,-5)$ ，然后根据平移的性质，即可获得答案.

【小问 1 详解】

解：将点 $A(-1,0)$ 、 $B(3,0)$ 、 $C(0,-3)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$$\text{可得} \begin{cases} 0 = a - b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ -3 = c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases},$$

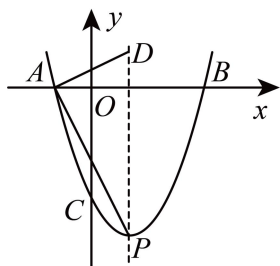
$\therefore$ 该抛物线的表达式为 $y = x^2 - 2x - 3$ ，

又 $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ ，

$\therefore$ 顶点 P 的坐标为 $(1, -4)$ ；

【小问 2 详解】

如下图，



根据题意，点 D 在抛物线对称轴上， $\angle PAD = 90^\circ$ ，

设点 $D(1, m)$ ，

$\because A(-1, 0)$ ， $P(1, -4)$ ，

$\therefore AP^2 = [1 - (-1)]^2 + [0 - (-4)]^2 = 20$ ， $AD^2 = m^2 + [1 - (-1)]^2 = m^2 + 4$ ，

$PD^2 = [m - (-4)]^2 = m^2 + 8m + 16$ ，

在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中，由勾股定理可得 $AP^2 + AD^2 = PD^2$ ，

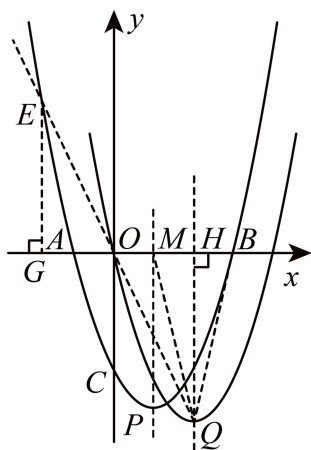
即 $20 + m^2 + 4 = m^2 + 8m + 16$ ，

解得 $m = 1$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, 1)$ ；

【小问 3 详解】

如下图,



$$\because \text{原抛物线 } y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{其对称轴为 } x = 1,$$

$$\therefore M(1, 0),$$

$$\because \text{新抛物线的顶点为点 } Q, \quad QB = QM,$$

过点 Q 作 $QH \perp MB$ 于点 H , 则 $BH = MH$, 即点 H 为 MB 中点,

$$\therefore B(3, 0), \quad M(1, 0),$$

$$\therefore H(2, 0),$$

$$\therefore OH = 2,$$

过点 E 作 $EG \perp x$ 轴于点 G ,

$$\because \angle OGE = \angle OHQ = 90^\circ, \quad \angle GOE = \angle HOQ, \quad QO = OE,$$

$$\therefore \triangle OEG \cong \triangle OQH (\text{AAS}),$$

$$\therefore OG = OH = 2, \quad EG = QH,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的横坐标为 } -2,$$

$$\therefore y_E = (-2)^2 - 2 \times (-2) - 3 = 5,$$

$$\therefore E(-2, 5),$$

$$\therefore EG = QH = 5,$$

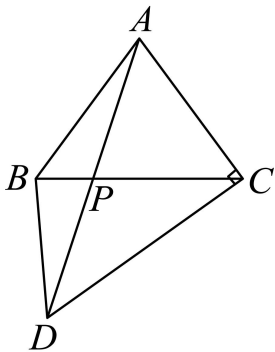
$$\therefore Q(2, -5),$$

$\therefore$ 把原抛物线 $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 平移, 得到新抛物线,

$\therefore$ 新抛物线解析式为 $y = (x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x - 1$.

【点睛】 本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式、利用二次函数解决几何问题、勾股定理、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识, 解题关键是运用数形结合的思想分析问题.

25. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle CAD = \angle ABC$, $DC \perp AC$, AD 与边 BC 相交于点 P .



(1) 求证: $AB^2 = \frac{1}{2} AD \cdot BC$;

(2) 如果 $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$, 求 $BP:PC$ 的值;

(3) 如果 $\triangle BCD$ 是直角三角形, 求 $\angle ABC$ 的正切值.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $\frac{11}{25}$

(3) $\sqrt{2}$ 或 1

【解析】

【分析】 (1) 根据等边对等角可得 $\angle ACB = \angle ABC$; 推得 $\angle ACB = \angle CAD$; 根据等角对等边可得 $AP = PC$; 根据直角三角形两锐角互余, 等角的余角相等可得 $\angle PDC = \angle PCD$; 根据等角对等边可得 $PD = PC$; 根据有两个角对应相等的两个三角形是相似三角形, 相似三角形的对应边成比例, 且都等于相似比即可证明 $AB^2 = \frac{1}{2} AD \cdot BC$.

(2) 结合题意可得 $CD = \frac{4}{5} AD$, 根据直角三角形中两直角边的平方和等于斜边的平方求得 $AC = \frac{3}{5} AD$; 结合 (1) 中结论可求得 $BC = \frac{18}{25} AD$; 分别求出 BP 和 PC , 即可求解.

(3) 分两种情况讨论: 当 $\angle DBC = 90^\circ$ 时, 根据相似三角形的判定和性质可求得 $BC = \frac{CD^2}{AD}$; 根据勾股

定理和 (1) 中结论可求得 $BC = \frac{2(AD^2 - CD^2)}{AD}$, 即可列出等式, 求得 $CD^2 = \frac{2}{3} AD^2$, 根据勾股定理求

出 $AC^2 = \frac{1}{3}AD^2$ ，分别求出 CD 、 AC 与 AD 的关系，根据锐角三角函数的定义即可求解；当 $\angle BDC=90^\circ$ 时，根据同旁内角互补，两直线平行可得 $AC \parallel BD$ ；根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle DBC = \angle ACB = \angle CAD$ ；根据锐角三角函数的定义可推得 $AC = BD$ ，根据正方形的判定和性质即可求出 $\angle ABC=45^\circ$ ，根据特殊角的锐角三角函数值即可求解；当 $\angle BCD = 90^\circ$ 时，分析可得 $\triangle ABC$ 不存在，即可推得该情况不存在。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\because \angle CAD = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\therefore AP = PC,$$

$$\because DC \perp AC,$$

$$\therefore \angle ACD=90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ACP + \angle PCD = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle DAC + \angle PDC = 90^\circ, \quad \angle ACP = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle PDC = \angle PCD,$$

$$\therefore PD = PC,$$

$$\text{即 } AP = PD = PC,$$

$$\because \angle CAP = \angle ABC, \quad \angle ACB = \angle ACP,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PAC,$$

$$\therefore \frac{AB}{PA} = \frac{BC}{AC},$$

$$\because AB = AC, \quad PA = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \frac{AB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{即 } AB^2 = \frac{1}{2}AD \cdot BC.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解： } \because \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \sin \angle CAD = \frac{4}{5},$$

$$\text{即 } \sin \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore CD = \frac{4}{5}AD,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{4}{5}AD\right)^2} = \frac{3}{5}AD,$$

$$\therefore AB = \frac{3}{5}AD,$$

$$\text{又} \because AB^2 = \frac{1}{2}AD \cdot BC,$$

$$\text{即} \left(\frac{3}{5}AD\right)^2 = \frac{1}{2}AD \cdot BC,$$

$$\text{整理得: } BC = \frac{18}{25}AD;$$

$$\therefore PC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore BP = BC - PC = \frac{18}{25}AD - \frac{1}{2}AD = \frac{11}{50}AD,$$

$$\therefore \frac{BP}{PC} = \frac{\frac{11}{50}AD}{\frac{1}{2}AD} = \frac{11}{25}.$$

【小问 3 详解】

解: 当 $\angle DBC = 90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle PCD = \angle PDC, \quad \angle DBC = \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AD},$$

$$\text{即 } BC = \frac{CD^2}{AD},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AC^2 = AD^2 - CD^2,$$

$$\text{即 } AB^2 = AD^2 - CD^2,$$

$$\text{又} \because AB^2 = \frac{1}{2}AD \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot BC = AD^2 - CD^2,$$

$$\text{故 } BC = \frac{2(AD^2 - CD^2)}{AD},$$

$$\text{则 } \frac{CD^2}{AD} = \frac{2(AD^2 - CD^2)}{AD},$$

$$\text{整理得: } CD^2 = \frac{2}{3} AD^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AC^2 = AD^2 - CD^2 = AD^2 - \frac{2}{3} AD^2 = \frac{1}{3} AD^2,$$

$$\text{即 } CD = \frac{\sqrt{6}}{3} AD, \quad AC = \frac{\sqrt{3}}{3} AD,$$

$$\tan \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} AD}{\frac{\sqrt{3}}{3} AD} = \sqrt{2},$$

$$\text{即 } \tan \angle ABC = \sqrt{2};$$

当 $\angle BDC = 90^\circ$ 时,

$$\because \angle BDC = \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ACB = \angle CAD,$$

$$\because \tan \angle CAD = \frac{CD}{AC}, \quad \tan \angle DBC = \frac{CD}{DB},$$

$$\text{故 } \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{DB},$$

$$\therefore AC = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形,

又 $\because \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $ABDC$ 是矩形,

又 $\because AB = AC$,

$\therefore$ 四边形 $ABDC$ 是正方形;

则 AD 和 BC 是正方形的对角线,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ$$

故 $\tan \angle ABC = 1$.

当 $\angle BCD = 90^\circ$ 时, 点 A 在 BC 上, 即 $\triangle ABC$ 不存在,

故不存在 $\angle BCD = 90^\circ$ 这种情况.

【点睛】 本题考查了等边对等角，等角对等边，直角三角形两锐角互余，等角的余角相等，相似三角形的判定和性质，勾股定理，平行线的判定和性质，锐角三角函数等；结合第 1 问中的结论通过 BC 列出等式，求出

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：

扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

最新资料请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

$CD^2 = \frac{2}{3} AD^2$ 是解题的关键.