

2022-2023 学年度学生学习能力诊断练习

初三数学

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

一、选择题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 如果某个斜坡的坡度是 $1:\sqrt{3}$, 那么这个斜坡的坡角为 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

【答案】A

【解析】

【分析】根据坡角的正切=坡度, 列式可得结果.

【详解】设这个斜坡的坡角为 α ,

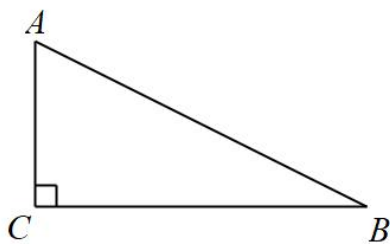
$$\text{由题意得: } \tan\alpha = 1:\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ;$$

故选 A.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-坡度坡角问题, 熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键.

2. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = 2$, 那么 $\cos A$ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】先利用勾股定理求解 AB , 再利用余弦的定义直接求解即可.

【详解】解: $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 1$, $BC = 2$,

$$\therefore AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故选：C.

【点睛】本题考查的是勾股定理，锐角的余弦的定义，解决此类题时，要注意前提条件是在直角三角形中，此外还有熟记三角函数的定义.

3. 已知抛物线 $y = (2-a)x^2 + 1$ 有最低点，那么 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a > 2$ D. $a < 2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据已知条件中二次函数的图象有最低点，可知抛物线的开口方向向上；利用抛物线的开口方向和二次项系数有关，再结合抛物线开口向上，得到 $2-a > 0$ ，由此即可得到 a 的取值范围.

【详解】解： $\because$ 二次函数 $y = (2-a)x^2 + 1$ 的图像有最低点，

$\therefore$ 函数图象开口向上，

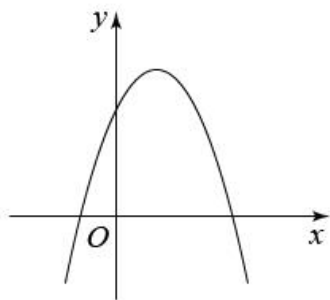
则 $2-a > 0$ ，

解得 $a < 2$.

故选 D.

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质，掌握二次函数的性质是解题关键.

4. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示，那么下列四个结论中，错误的是 ()



- A. $a < 0$ B. $b < 0$ C. $c > 0$ D. $abc < 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的图象与解析式中字母系数之间关系解答即可.

【详解】解：A、图象的开口向下，则 $a < 0$ ，此选项不符合题意；

B、对称轴在 y 轴右边且 $a < 0$ ，则 $b > 0$ ，此选项符合题意；

C、图象与 y 轴正半轴相交，则 $c > 0$ ，此选项不符合题意；

D、 $abc < 0$ ，此选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查二次函数的图象与各项系数间的关系，熟知二次函数的图象与各项字母系数之间关系是解答的关键.

5. 如果点 $A(-2, y_1)$ 与点 $B(-3, y_2)$ 都在抛物线 $y = x^2 + k$ 上，那么 y_1 和 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 < y_2$ C. $y_1 = y_2$ D. 不能确定

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数图像与性质，对于比较二次函数的 y 值大小，只需要比较相应点到对称轴距离即可得到答案.

【详解】解：∵ 点 $A(-2, y_1)$ 与点 $B(-3, y_2)$ 都在抛物线 $y = x^2 + k$ 上，

∴ 抛物线对称轴为 $y = 0$ ，

∴ $A(-2, y_1)$ 到对称轴距离为 2； $B(-3, y_2)$ 到对称轴距离为 3，

∵ 抛物线 $y = x^2 + k$ 中二次项系数为正，开口向上，

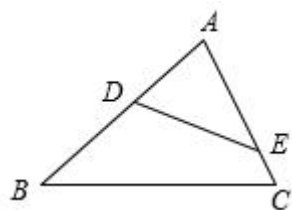
∴ 抛物线上的点离对称轴越近 y 值越小，即 $y_1 < y_2$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查二次函数 y 值大小比较，熟练掌握二次函数图形与性质、掌握二次函数 y 值大小比较的方法步骤是解决问题的关键.

6. 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 边 AB 、 AC 上， $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{CE} = 3$ ，且 $\angle AED = \angle B$ ，那么

$\frac{AD}{AC}$ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $\angle AED = \angle B$ 与 $\angle A = \angle A$ ，即可得到 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，即可得到

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ，结合 $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{CE} = 3$ 即可得到 $\frac{AD}{AC}$ 的值；

【详解】解： $\because \angle AED = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}，$$

$$\because \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{CE} = 3，$$

$$\therefore \frac{AD}{4CE} = \frac{3CE}{3AD}，$$

$$\therefore AD^2 = 4CE^2，$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{4CE} = \frac{1}{2}，$$

故选 A.

【点睛】本题考查三角形相似的性质与判定，解题的关键是根据分式的性质得到 AD 与 CE 的关系.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，且 $a = 2$ ， $c = 8$ ，那么 $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】4

【解析】

【分析】根据比例中项的概念，可得 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ，可得 $b^2 = ac = 16$ ，即可得到 b 的值，注意线段的长为正数.

【详解】解： $\because$ 线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，且 $a = 2$ ， $c = 8$ ，

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}，$$

$$\therefore b^2 = ac = 16，$$

解得 $b = \pm 4$ ，

又 $\because$ 线段的长度是正数，

$$\therefore b = 4.$$

故答案为：4

【点睛】本题考查了比例中项的概念，注意：求两个数的比例中项的时候，应开平方；求两条线段的比例中项的时候，负数应舍去. 根据比例中项的概念列出比例式是解答本题的关键.

8. 计算: $2\vec{b} - \frac{1}{2}(6\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $3\vec{b} - 3\vec{a}$

【解析】

【分析】 按照向量线性运算法则计算即可.

【详解】 解: $2\vec{b} - \frac{1}{2}(6\vec{a} - 2\vec{b})$,

$$= 2\vec{b} - \frac{1}{2} \times 6\vec{a} + \frac{1}{2} \times 2\vec{b},$$

$$= 2\vec{b} - 3\vec{a} + \vec{b},$$

$$= 3\vec{b} - 3\vec{a},$$

故答案为: $3\vec{b} - 3\vec{a}$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算, 掌握向量的运算法则是解题关键.

9. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 y 轴的交点坐标是_____.

【答案】 $(0, 3)$

【解析】

【分析】 令 $x = 0$ 得出 y 的值, 从而得出与 y 轴的交点坐标.

【详解】 令 $x = 0$,

得 $y = 3$,

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, 3)$,

故答案为: $(0, 3)$.

【点睛】 本题考查二次函数与坐标轴的交点问题, 熟练掌握二次函数与 y 轴交点的求法是解题的关键.

10. 沿着 x 轴正方向看, 抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 在其对称轴右侧的部分是_____的. (填“上升”或“下降”)

【答案】 下降

【解析】

【分析】 根据二次函数的性质解答即可.

【详解】 解: 因为 $a = -1 < 0$,

所以抛物线 $y = -x^2 + 2x$ 在对称轴右侧部分是下降的,

故答案为: 下降.

【点睛】 本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的性质是解题的关键.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 沿着 y 轴向下平移 2 个单位，所得到的新抛物线的表达式为_____.

【答案】 $y = x^2 + 2x - 2$

【解析】

【分析】 根据抛物线的平移规律：左加右减，上加下减，进行计算即可.

【详解】 解：将抛物线 $y = x^2 + 2x$ 沿着 y 轴向下平移 2 个单位长度所得抛物线解析式为：

$$y = x^2 + 2x - 2;$$

故答案为： $y = x^2 + 2x - 2$.

【点睛】 本题考查二次函数图象的平移. 熟练掌握抛物线的平移规律，是解题的关键.

12. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	-1	0	2	3	4	...
y	...	5	2	2	5	10	...

如果点 $(-2, m)$ 在此抛物线上，那么 $m =$ _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 根据题目表中数据，利用待定系数法确定函数关系式，再由点 $(-2, m)$ 在此抛物线上，代值求解即可得到答案.

【详解】 解：由题意可得，

$$\begin{cases} 5 = a - b + c \\ 2 = c \\ 2 = 4a + 2b + c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x + 2$,

$\therefore$ 点 $(-2, m)$ 在此抛物线上，

$$\therefore m = (-2)^2 - 2 \times (-2) + 2 = 10,$$

故答案为：10.

【点睛】 本题考查二次函数求值，涉及待定系数法确定函数关系式，熟练掌握二次函数解析式的求法是解决问题的关键.

13. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ，顶点 A 、 B 、 C 分别与 A_1 、 B_1 、 C_1 对应， $AC = 12$ ， $A_1C_1 = 9$ ，

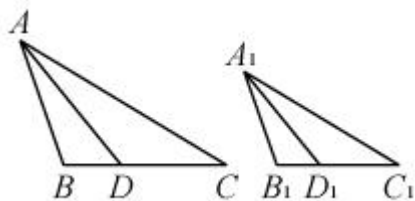
$\angle A_1$ 的平分线的长为 6，那么 $\angle A$ 的平分线的长为_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 根据题意，作出图形，根据 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ，由三角形相似的性质得到 $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ ，再由三角形相似的性质即可得到答案.

【详解】 解：如图所示：



$$\because \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1, AC = 12, A_1C_1 = 9,$$

$$\therefore \angle B = \angle B_1, \angle BAC = \angle B_1A_1C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3},$$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线， A_1D_1 是 $\angle B_1A_1C_1$ 的角平分线，

$$\therefore \angle BAD = \angle B_1A_1D_1,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1,$$

$$\therefore \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{4}{3},$$

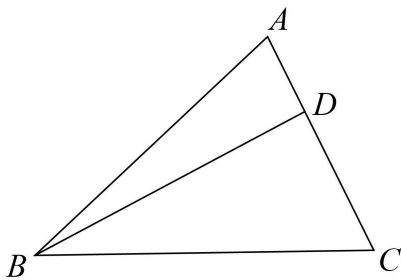
$\because \angle A_1$ 的平分线的长为 6，

$$\therefore \angle A \text{ 的平分线的长为 } AD = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot A_1D_1 = \frac{4}{3} \times 6 = 8,$$

故答案为：8.

【点睛】 本题考查三角形相似的判定与性质，熟练掌握两个三角形相似对应角相等、对应边成比例是解决问题的关键.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上，已知 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是 1:2， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ，那么用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 为_____.

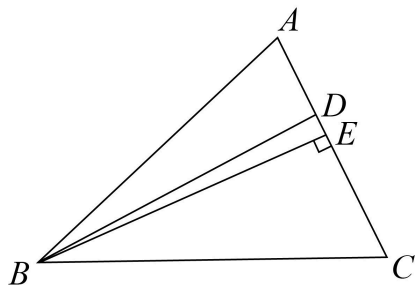


【答案】 $3\vec{a} - 3\vec{b}$

【解析】

【分析】由题中 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是1:2，根据三角形“等高”的面积表示即可知道 $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$ ，根据平面向量的加法运算可知 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$ ，从而得到答案.

【详解】解：过 B 作 $BE \perp AC$ ，如图所示：



$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的面积比是1:2，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BE}{\frac{1}{2}DC \cdot BE} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AC = 3AD,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{DB} = \vec{b},$$

$\therefore$ 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\overrightarrow{AC}$

$$= 3\overrightarrow{AD}$$

$$= 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$$

$$= 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB})$$

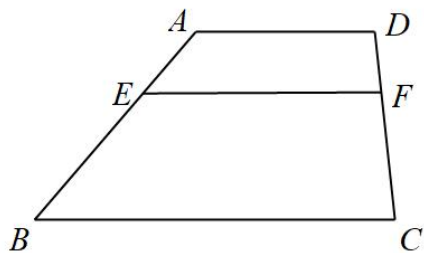
$$= 3(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= 3\vec{a} - 3\vec{b},$$

故答案为： $3\vec{a} - 3\vec{b}$.

【点睛】本题考查向量运算，涉及三角形面积、向量加法运算及向量共线等知识，熟练掌握向量的相关表示是解决问题的关键.

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E, F 分别在边 AB, CD 上且 $EF \parallel AD$ ，已知 $AE:EB = 1:2$ ， $AD = 3, EF = 4$ ，那么 BC 的长是_____.



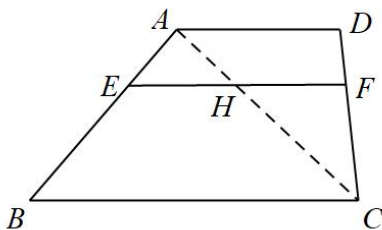
【答案】6

【解析】

【分析】由题中 $AD \parallel BC$ ， $EF \parallel AD$ ，得到 $AD \parallel EF \parallel BC$ ，从而利用平行线分线段成比例定理得到 $\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$ ，连接 AC ，如图所示，由相似三角形的判定得到

$\triangle CFH \sim \triangle CDA$ 、 $\triangle AEH \sim \triangle ABC$ ，利用相似比即可得到答案.

【详解】解：连接 AC ，如图所示：



$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $EF \parallel AD$ ，

$\therefore AD \parallel EF \parallel BC$ ，

$\because AE : EB = 1 : 2$ ，

$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$ ，

$\because EF \parallel AD$ ，

$\therefore \angle D = \angle HFC$ ，

$\because \angle FCH = \angle DCA$ ，

$\therefore \triangle CFH \sim \triangle CDA$ ，

$\therefore \frac{HF}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{2}{3}$ ，

$\because AD = 3, EF = 4$ ，

$\therefore EH = EF - HF = 4 - 3 \times \frac{2}{3} = 2$ ，

$\because EF \parallel BC$ ，

$\therefore \angle B = \angle AEH$ ，

$$\because \angle EAH = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC,$$

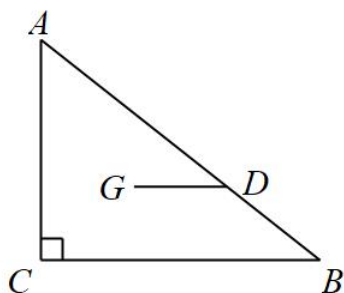
$$\therefore \frac{EH}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = 3EH = 3 \times 2 = 6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题考查相似比求线段长，涉及平行线分线段成比例定理、相似三角形的判定与性质等知识，熟练掌握相似三角形的判定与性质，准确作出辅助线是解决问题的关键.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 作 $GD \parallel BC$ 交 AB 于点 D . 已知 $AB = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$ ，那么 GD 的长为_____.



【答案】 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】如图所示，连接 CG 并延长交 AB 于 O ，过点 O 作 $OH \perp GD$ 于 H ，先由重心的定义得到 O 为 AB 的中点，则 $OC = OB = \frac{1}{2}AB = 5$ ，得到 $\angle OCB = \angle OBC$ ，再由平行线的性质推出 $\angle OGD = \angle ODG$ ，得到 $OG = OD$ ，则 $GD = 2GH$ ，由重心的性质求出

$$OG = \frac{5}{3}, \text{ 解 } \text{Rt}\triangle OGH \text{ 求出 } GH = \frac{4}{3}, \text{ 则 } GD = 2GH = \frac{8}{3}.$$

【详解】解：如图所示，连接 CG 并延长交 AB 于 O ，过点 O 作 $OH \perp GD$ 于 H ，

$\because$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心， $\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore O$ 为 AB 的中点，

$$\therefore OC = OB = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC,$$

$$\because GD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OGD = \angle OCB, \angle ODG = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle OGD = \angle ODG,$$

$$\therefore OG = OD,$$

$$\because OH \perp GD,$$

$$\therefore GD = 2GH,$$

$$\text{由重心的性质可知 } OG = \frac{1}{3}OC = \frac{5}{3},$$

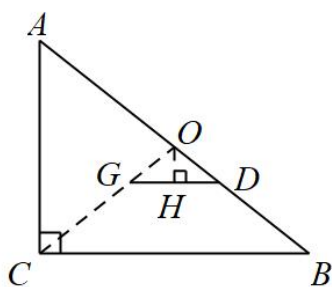
$$\text{在 Rt}\triangle OGH \text{ 中, } \sin \angle OGH = \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OH = OG \cdot \sin \angle OGH = 1,$$

$$\therefore GH = \sqrt{OG^2 - OH^2} = \frac{4}{3},$$

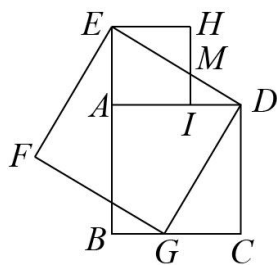
$$\therefore GD = 2GH = \frac{8}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{3}.$$



【点睛】本题主要考查了重心的性质与定义，直角三角形斜边上的中线的性质，解直角三角形，等腰三角形的性质与判定等等，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键。

17. 魏晋时期，数学家刘徽利用如图所示的“青朱出入图”证明了勾股定理，其中四边形 $ABCD$ 、四边形 $EFGD$ 和四边形 $EAIH$ 都是正方形。如果图中 $\triangle EMH$ 与 $\triangle DMI$ 的面积比为 $\frac{16}{9}$ ，那么 $\tan \angle GDC$ 的值为_____。



【答案】 $\frac{4}{7}$

【解析】

【分析】先判定 $\triangle EMH$ 和 $\triangle DMI$ 相似，再根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，容易得到相似比为 $\frac{4}{3}$ ，多次运用正方形的四条边相等，勾股定理，可分别求出 CG 、 CD ，即可求解.

【详解】解：在 $\triangle EMH$ 和 $\triangle DMI$ 中，

$$\because \angle EMH = \angle DMI, \angle EHM = \angle DIM,$$

$$\therefore \triangle EMH \sim \triangle DMI$$

$$\because \triangle EMH \text{ 面积} : \triangle DMI \text{ 面积} = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \frac{EH}{DI} = \frac{4}{3}$$

$\because$ 四边形 $EAIH$ 为正方形

$$\therefore EH = AI, \text{ 即 } \frac{AI}{DI} = \frac{4}{3}$$

$$\text{则 } AD = AI + DI = 7$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, 根据勾股定理: } DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

$\because$ 四边形 $EFGD$ 、 $ABCD$ 为正方形

$$\therefore DG = DE = \sqrt{65}, \quad CD = AD = 7$$

$$\text{根据勾股定理: } CG = \sqrt{DG^2 - CD^2} = \sqrt{65 - 49} = 4$$

$$\therefore \tan \angle GDC = \frac{CG}{CD} = \frac{4}{7}.$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，正方形的性质，勾股定理，解题关键是熟练掌握相似三角形的判定、勾股定理.

18. 我们规定：如果一个三角形一边上的高等于这条边，那么这个三角形叫做“等高底”三角形，这条边叫做这个三角形的“等底”. 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 与 l_2 之间的距离是3，“等高底” $\triangle ABC$ 的“等底” BC 在直线 l_1 上(点 B 在点 C 的左侧)，点 A 在直线 l_2 上， $AB = \sqrt{2}BC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 A 、 C 的对应点分别为点 A_1 、 C_1 ，那么 A_1C 的长为_____.

_____ l_2

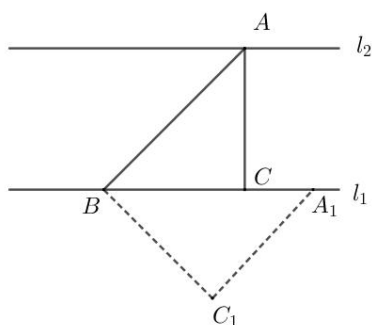
_____ l_1

【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}-3$

【解析】

【分析】 根据题意分情况画出相应图，然后根据旋转性质找到线段对应关系求解即可．

【详解】 解：当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

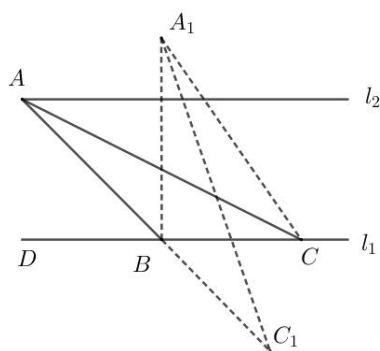
$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$A_1C = A_1B - BC = 3\sqrt{2} - 3;$$

当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ, \quad \angle ABC = 135^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle ABA_1 = 45^\circ$, $A_1B = AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle A_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_1BC \text{ 中, } A_1C = \sqrt{A_1B^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}-3$.

【点睛】本题考查了旋转性质、勾股定理、二次根式的运算等知识,分情况讨论并画出相应图像是解题关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{2\sin 60^\circ} + \cot^2 30^\circ$.

【答案】 $\frac{19}{6}$.

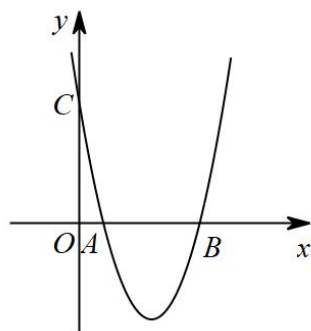
【解析】

【分析】把各特殊角度的三角函数值代入进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】原式} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + (\sqrt{3})^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3 \\ &= \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值,解题关键是熟记各特殊角度的三角函数值.

20. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和 $B(5,0)$, 与 y 轴交于点 C .



(1) 求此抛物线的表达式及点 C 的坐标;

(2) 将此抛物线沿 x 轴向左平移 m ($m > 0$) 个单位得到新抛物线, 且新抛物线仍经过点 C ,

求 m 的值.

【答案】(1) $y = x^2 - 6x + 5$, 点 C 的坐标是 $(0, 5)$

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求出二次函数的解析式, 进而求出点 C 的坐标;

(2) 把二次函数配方得到顶点式, 根据题目进行平移解题即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(1, 0)$ 和 $B(5, 0)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$

$$\begin{cases} 0 = 1 + b + c \\ 0 = 25 + 5b + c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -6 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 - 6x + 5$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 5$

$\therefore$ 点 C 的坐标是 $(0, 5)$

【小问 2 详解】

$$y = x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$$

设平移后的抛物线表达式为 $y = (x - 3 + m)^2 - 4$

把 $C(0, 5)$ 代入得 $5 = (0 - 3 + m)^2 - 4$

解得 $m_1 = 6, m_2 = 0$

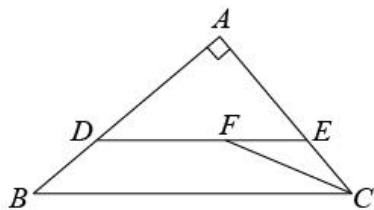
$\because m > 0,$

$\therefore m = 6$

【点睛】本题考查二次函数的解析式和抛物线的平移, 掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

21. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, BC = 9, \sin B = \frac{2}{3}$, 点 E 在边 AC 上, 且

$AE = 2EC$, 过点 E 作 $DE \parallel BC$ 交边 AB 于点 D , $\angle ACB$ 的平分线 CF 交线段 DE 于点 F , 求 DF 的长.



【答案】4

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，得出 AC ，由 $DE \parallel BC$ 得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质得出 $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$ ，得出 $DE = 6$ ，由 CF 平分 $\angle ACB$ ，得出 $\angle ACF = \angle BCF$ ，继而得出 $EF = EC = 2$ ，即可求解。

【详解】解： $\because BC = 9, \sin B = \frac{2}{3}$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = BC \cdot \sin B = 9 \times \frac{2}{3} = 6$

$$\therefore AE = 2EC,$$

$$\therefore EC = 2,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore BC = 9,$$

$$\therefore DE = 6,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle BCF,$$

$$\therefore CF \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle EFC = \angle ACF$$

$$\therefore EF = EC = 2,$$

$$\therefore DF = 4$$

【点睛】本题考查了解直角三角形，相似三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 是解题的关键。

22. 如图 1 是钢琴缓降器，图 2 和图 3 是钢琴缓降器两个位置的示意图。 AB 是缓降器的底板，压柄 BC 可以绕着点 B 旋转，液压伸缩连接杆 DE 的端点 D 、 E 分别固定在压柄 BC 与底板 AB 上，已知 $BE = 12\text{cm}$ 。



图1

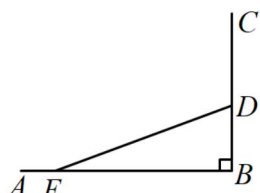


图2

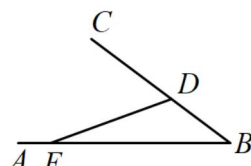


图3

(1) 如图 2，当压柄 BC 与底座 AB 垂直时， $\angle DEB$ 约为 22.6° ，求 BD 的长；

(2) 现将压柄 BC 从图 2 的位置旋转到与 AB 成 37° 角 (即 $\angle ABC = 37^\circ$), 如图 3 的所示, 求此时液压伸缩连接杆 DE 的长. (结果保留根号)

(参考数据: $\sin 22.6^\circ \approx \frac{5}{13}, \cos 22.6^\circ \approx \frac{12}{13}, \tan 22.6^\circ \approx \frac{5}{12}$;

$\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}, \cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}, \tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$)

【答案】(1) 5 cm

(2) $\sqrt{73}$ cm

【解析】

【分析】(1) 根据正切即为对边与邻边的比可得答案;

(2) 过点 D 作 $DH \perp BE$, 垂足为 H , 在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, 根据三角函数解直角三角形求出 BH, DH 的值, 根据 $EH = BE - BH$ 求出 EH 的长度, 然后根据勾股定理可得 DE 的长度.

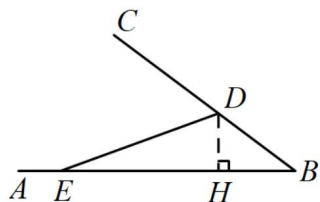
【小问 1 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $BD = BE \cdot \tan \angle BED = 12 \times \tan 22.6^\circ \approx 12 \times \frac{5}{12} = 5$,

答: 此时 BD 的长约为 5cm;

【小问 2 详解】

过点 D 作 $DH \perp BE$, 垂足为 H ,



在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, $BH = BD \cdot \cos \angle DBE = 5 \cos 37^\circ \approx 4$,

$DH = BD \cdot \sin \angle DBE = 5 \sin 37^\circ \approx 3$,

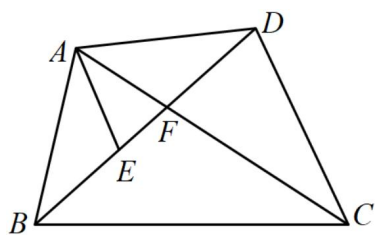
$\therefore EH = BE - BH = 12 - 4 = 8$,

在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中, $DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{73}$,

答: 此时液压伸缩连接杆 DE 的长约为 $\sqrt{73}$ cm.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用以及勾股定理, 熟练利用三角函数解直角三角形是解本题的关键.

23. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 与 AC 交于点 F , $\angle ADB = \angle ACB$.



(1) 求证: $\angle ABD = \angle ACD$;

(2) 过点 A 作 $AE \parallel DC$ 交 BD 于点 E , 求证: $EF \cdot BC = AD \cdot AF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle AFD \sim \triangle BFC$, 再证明 $\triangle ABF \sim \triangle DCF$, 即可求证;

(2) 先证明 $\triangle FAE \sim \triangle FBA$, 再证明 $\triangle AFD \sim \triangle BFC$, 即可求证.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ADB = \angle ACB, \angle AFD = \angle BFC$,

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle BFC$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{CF}, \text{ 即 } \frac{AF}{DF} = \frac{BF}{CF},$$

$$\because \angle AFB = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DCF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD.$$

【小问 2 详解】

证明: $\because AE \parallel DC$,

$$\therefore \angle FAE = \angle ACD,$$

$$\because \angle ACD = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle ABF,$$

$$\because \angle AFE = \angle AFB,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle FBA,$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{AF}{BF}$$

$$\because \triangle AFD \sim \triangle BFC,$$

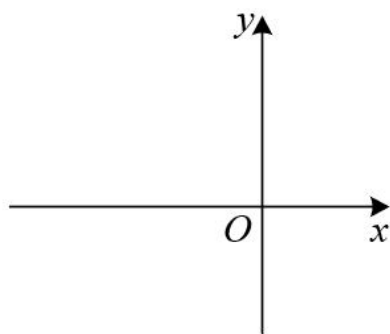
$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BC}$$

$$\therefore \frac{EF}{AF} = \frac{AD}{BC}$$

$$\text{即 } EF \cdot BC = AD \cdot AF.$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定是解题关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = -x^2 + 2kx - 4k$ ($k < 0$) 的顶点为 P , 抛物线与 y 轴交于点 A .



(1) 如果点 A 的坐标为 $(0, 4)$, 点 $B(-3, m)$ 在抛物线上, 连接 AB .

①求顶点 P 和点 B 的坐标;

②过抛物线上点 D 作 $DM \perp x$ 轴, 垂足为 M , DM 交线段 AB 于点 E , 如果 $DE = EM$, 求点 D 的坐标;

(2) 连接 OP , 如果 OP 与 x 轴负半轴的夹角等于 $\angle APO$ 与 $\angle POA$ 的和, 求 k 的值.

【答案】 (1) ①顶点 $P(-1, 5)$; 点 $B(-3, 1)$; ②点 $D(-2, 4)$;

(2) $k = 2 - \sqrt{5}$.

【解析】

【分析】 (1) ①把 $A(0, 4)$ 代入 $y = -x^2 + 2kx - 4k$ 求出解析式, 化为一般式, 即可求出顶点坐标; 把 $B(-3, m)$ 代入求出 m 的值即可得点 B 坐标; ②先求出 AB 的解析式, 根据 $DE = EM$, 列出等式即可求点 D 的坐标.

(2) 过点 P 分别作 $PQ \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴, 垂足为 Q 、 N , 构建直角三角形, 从而得到 $\angle POQ = \angle PAN$, $\tan \angle POQ = \tan \angle PAN$, 即可建立等式求出 k 的值.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, ① 把 $A(0, 4)$ 代入 $y = -x^2 + 2kx - 4k$,

$$\therefore -4k = 4, \text{ 解得 } k = -1,$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = -x^2 - 2x + 4 = -(x+1)^2 + 5$$

$$\therefore \text{顶点 } P(-1, 5)$$

把 $B(-3, m)$ 代入 $y = -x^2 - 2x + 4$, 得 $m = 1$,

$$\therefore \text{点 } B(-3, 1),$$

② $\because A(0, 4), B(-3, 1)$

可得直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$,

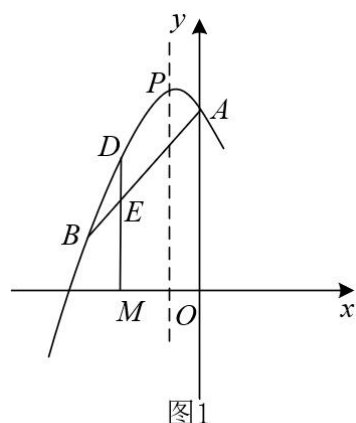
设 $D(t, -t^2 - 2t + 4)$, 则 $E(t, t + 4), M(t, 0)$,

$$\because DE = EM,$$

$$\therefore -t^2 - 3t = t + 4,$$

解得 $t_1 = t_2 = -2$

$\therefore$ 点 $D(-2, 4)$.



【小问 2 详解】

解: 如图 2, 过点 P 分别作 $PQ \perp x$ 轴, $PN \perp y$ 轴, 垂足为 Q 、 N ,

由题意可得, 点 $A(0, -4k)$,

$$\because y = -x^2 + 2kx - 4k = -(x - k)^2 + k^2 - 4k,$$

$$\therefore P(k, k^2 - 4k),$$

由题意可得 $\angle POQ = \angle APO + \angle POA$,

$$\because \angle PAN = \angle APO + \angle POA,$$

$$\therefore \angle POQ = \angle PAN, \text{ 即 } \tan \angle POQ = \tan \angle PAN,$$

$$\therefore \frac{k^2 - 4k}{-k} = \frac{-k}{k^2 - 4k + 4k}, \text{ 解得 } k_1 = 2 + \sqrt{5}, k_2 = 2 - \sqrt{5},$$

$$\because k < 0,$$

$$\therefore k = 2 - \sqrt{5}$$

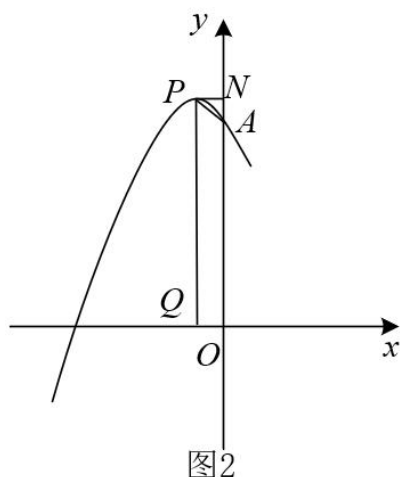
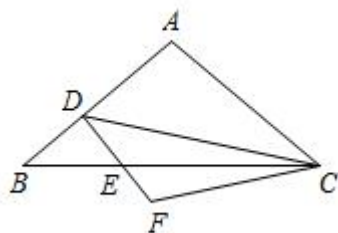


图2

【点睛】本题主要考查二次函数与一次函数、角的和差等综合内容，准确理解题干信息并正确作图是解题的关键.

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上，满足 $\angle CDE = \angle B$. 点 F 是 DE 延长线上一点，且 $\angle ECF = \angle ACD$.



(1) 当点 D 是 AB 的中点时，求 $\tan \angle BCD$ 的值；

(2) 如果 $AD = 3$ ，求 $\frac{CF}{DE}$ 的值；

(3) 如果 $\triangle BDE$ 是等腰三角形，求 CF 的长.

【答案】(1) $\tan \angle BCD = \frac{1}{4}$

(2) $\frac{CF}{DE} = \frac{10}{7}$

(3) $CF = 2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AG \perp BC$ ，过点 D 作 $DH \perp BC$ ，垂足分别为 G 、 H ，利用 $AB = AC = 10$, $\sin B = \frac{3}{5}$ 求出 BG 、 BH 、 DH 的长，即可得出结论；

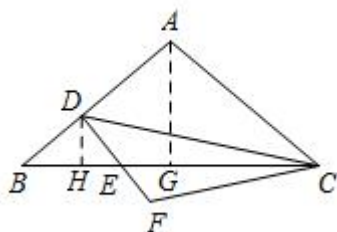
(2) 证明 $\triangle DCE \sim \triangle BCD$ 和 $\triangle CFD \sim \triangle CAB$, 得出 $\frac{CF}{DE} = \frac{CA}{BD}$, 代入数值即可得出结论;

论;

(3) 分三种情况讨论, $\angle DEB = \angle B$, $\angle BDE = \angle B$, $\angle BDE = \angle DEB$, 进而得出结论.

【小问 1 详解】

过点 A 作 $AG \perp BC$, 过点 D 作 $DH \perp BC$, 垂足分别为 G 、 H ,



$$\because AB = AC = 10, \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABG \text{ 中, } BG = AB \cdot \cos B = 8,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BC = 2BG = 16,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore BD = 5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDH \text{ 中, } BH = BD \cdot \cos B = 4, \quad DH = BD \cdot \sin B = 3,$$

$$\therefore CH = 16 - 4 = 12,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDH \text{ 中, } \tan \angle BCD = \frac{DH}{CH} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

【小问 2 详解】

$$\because \angle CDE = \angle B, \angle DCE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{CD}{BC},$$

$$\because \angle ECF = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCF,$$

$$\because \angle CDE = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CFD \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CB},$$

$$\therefore \frac{CF}{CA} = \frac{DE}{BD}, \text{ 即 } \frac{CF}{DE} = \frac{CA}{BD},$$

$$\because AD = 3,$$

$$\therefore BD = 7,$$

$$\therefore \frac{CF}{DE} = \frac{10}{7};$$

【小问3详解】

$\because \triangle BDE$ 是等腰三角形,

$$\textcircled{1} \angle DEB = \angle B,$$

$$\because \angle CDE = \angle B,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle DEB,$$

$$\therefore CD \parallel BC, \therefore \text{舍去};$$

$$\textcircled{2} \angle BDE = \angle B,$$

$$\because \angle CDE = \angle B,$$

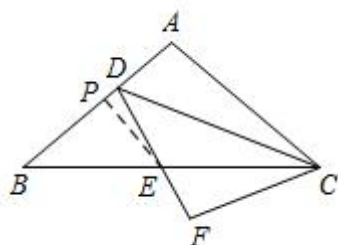
$$\therefore \angle CDB = 2\angle B < 90^\circ,$$

$$\because \angle CDB > \angle A > 90^\circ, \therefore \text{舍去};$$

$$\textcircled{3} \angle BDE = \angle DEB,$$

$$\therefore BD = BE,$$

过点 E 作 $EP \perp BD$, 垂足为 P ,



$$\text{可得 } BP = \frac{4}{5}BE = \frac{4}{5}BD, EP = \frac{3}{5}BE = \frac{3}{5}BD, DP = \frac{1}{5}BD,$$

$$\therefore DE = \sqrt{DP^2 + EP^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}BD,$$

$$\text{由 } \triangle DCE \sim \triangle BCD \text{ 得 } \frac{DE}{BD} = \frac{CD}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}BD}{BD} = \frac{CD}{16},$$

$$\therefore CD = \frac{16}{5}\sqrt{10},$$

由 (2) 可得, $\triangle CFD \sim \triangle CAB$, $\frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CB}$,

$$\therefore \frac{CF}{10} = \frac{\frac{16\sqrt{10}}{5}}{16},$$

可得 $CF = 2\sqrt{10}$,

综合①②③, $CF = 2\sqrt{10}$.

【点睛】 本题考查解直角三角形、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定与性质.