

数学练习卷

考生注意:

1. 本考试设试卷和答题纸两部分, 试卷包括试题与答题要求, 所有答题必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上, 做在试卷上一律不得分.
2. 答题前, 务必在答题纸上填写姓名、学校和考号.
3. 答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的, 答题时应特别注意, 不能错位.

一、选择题(本大题共6题)【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 已知 $\tan A = \sqrt{3}$, 则锐角 A 的度数是 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】因为 $\tan A = \sqrt{3}$, A 为锐角, 由特殊角的三角函数值即可解答.

【详解】因为 $\tan A = \sqrt{3}$, A 为锐角

由特殊角的三角函数值知:

$A = 60^\circ$,

故选 C.

【点睛】掌握特殊角的三角函数值是解答本题的关键.

2. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 3$, 那么下列结论正确的是 ()

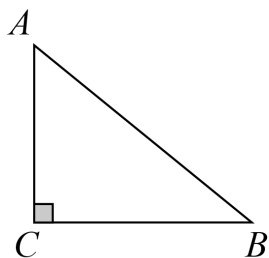
- A. $\tan A = \frac{2}{3}$ B. $\cot A = \frac{2}{3}$ C. $\sin A = \frac{2}{3}$ D. $\cos A = \frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据勾股定理求得斜边长, 进而根据三角函数的定义即可求解.

【详解】解: 如图



$\therefore \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{2}, \quad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}, \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

故选：B.

【点睛】本题考查了三角函数的定义，掌握三角函数的定义是解题的关键.

3. 关于抛物线 $y = -2(x+1)^2 - 3$ ，下列说法正确的是 ()

A. 开口向上

B. 与 y 轴的交点是 $(0, -3)$

C. 顶点是 $(1, -3)$

D. 对称轴是直线 $x = -1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数解析式中系数与图形的关系即可求解.

【详解】解：A 选项，抛物线 $y = -2(x+1)^2 - 3$ 中， $a = -2 < 0$ ，图像开口向下，故 A 选项错误，不符合题意；

B 选项，令 $x = 0$ ，函数值 $y = -2(0+1)^2 - 3 = -5$ ，则抛物线与 y 轴的交点是 $(0, -5)$ ，故 B 选项错误，不符合题意；

C 选项，根据顶点式得，抛物线 $y = -2(x+1)^2 - 3$ 的顶点为 $(-1, -3)$ ，故 C 选项错误，不符合题意；

D 选项，抛物线 $y = -2(x+1)^2 - 3$ 的对称轴是直线 $x = -1$ ，故 D 选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查二次函数系数与图像的关系，理解并掌握二次函数中系数与图像开口，对称轴，与 x, y 轴交点的特点，顶点坐标的计算方法是解题的关键.

4. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 为非零向量，下列判断错误的是 ()

A. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$

D. 如果 $\vec{e}$ 为单位向量，且 $\vec{a} = 2\vec{e}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据单位向量、平行向量以及模的定义进行判断即可.

【详解】解：A、如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选正确；

B、如果 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选正确；

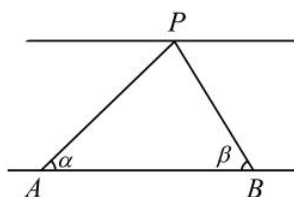
C、如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，没法判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间的关系，故本选项错误

D、如果 $\vec{e}$ 为单位向量，且 $\vec{a} = 2\vec{e}$ ，那么 $|\vec{a}| = 2$ ，故本选正确；

故选：C.

【点睛】本题考查了平面向量，熟记单位向量、平行向量以及模的定义是解题的关键.

5. 如图，为测量一条河的宽度，分别在河岸一边相距 a 米的 A 、 B 两点处，观测对岸的标志物 P ，测得 $\angle PAB = \alpha$ 、 $\angle PBA = \beta$ ，那么这条河的宽度是 ()



A. $\frac{a}{\cot \alpha + \cot \beta}$ 米

B. $\frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta}$ 米

C. $\frac{a}{\tan \alpha + \tan \beta}$ 米

D. $\frac{a}{\tan \alpha - \tan \beta}$ 米

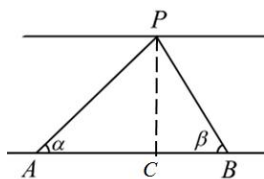
【答案】A

【解析】

【分析】过点 P 作 $PC \perp AB$ 于点 C ，则这条河的宽度是 PC 的长，根据锐角三角函数可得

$$AC = \frac{PC}{\tan \alpha}, BC = \frac{PC}{\tan \beta}, \text{ 从而得到 } PC \cdot \cot \beta + PC \cdot \cot \alpha = a, \text{ 即可求解.}$$

【详解】解：如图，过点 P 作 $PC \perp AB$ 于点 C ，则这条河的宽度是 PC 的长，



$$\therefore \tan \alpha = \frac{PC}{AC}, \tan \beta = \frac{PC}{BC},$$

$$\therefore AC = \frac{PC}{\tan \alpha}, BC = \frac{PC}{\tan \beta},$$

$$\therefore AB = AC + BC = a \text{ 米,}$$

$$\therefore \frac{PC}{\tan \alpha} + \frac{PC}{\tan \beta} = a,$$

$$\text{即 } PC \cdot \cot \beta + PC \cdot \cot \beta = a,$$

$$\therefore PC(\cot \alpha + \cot \beta) = a,$$

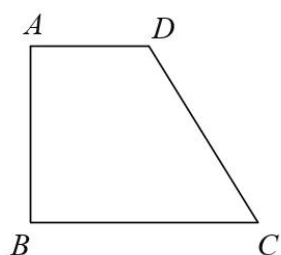
$$\text{即 } PC = \frac{a}{\cot \alpha + \cot \beta} \text{ 米},$$

$$\text{即这条河的宽度是 } \frac{a}{\cot \alpha + \cot \beta} \text{ 米},$$

故选：A.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形的实际应用，明确题意，准确构造直角三角形是解题的关键.

6. 如图，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $AD = 2$ ， $BC = 4$. P 是 BA 延长线上一点，使得 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 相似，这样的点 P 的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由于 $\angle PAD = \angle PBC = 90^\circ$ ，故要使 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 相似，分两种情况讨论：① $\triangle APD \sim \triangle BPC$ ，② $\triangle APD \sim \triangle BCP$ ，这两种情况都可以根据相似三角形对应边的比相等求出 AP 的长，即可得到 P 点的个数.

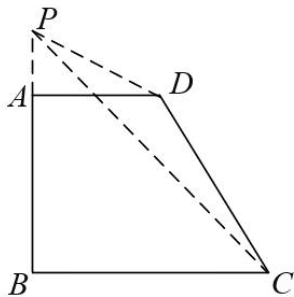
【详解】 $\because AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B = 90^\circ,$$

$$\angle PAD = \angle PBC = 90^\circ.$$

设 AP 的长为 x ，则 $BP = AB + AP = 3 + x$.

若 AB 边上存在 P 点，使 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBC$ 相似，那么分两种情况：



①若 $\triangle APD \sim \triangle BPC$ ，则 $\frac{PA}{BP} = \frac{AD}{BC}$ ，

$$\text{即 } \frac{x}{3+x} = \frac{2}{4},$$

解得： $x = 3$

②若 $\triangle APD \sim \triangle BCP$ ，则 $\frac{PA}{BC} = \frac{AD}{BP}$ ，

$$\text{即 } \frac{x}{4} = \frac{2}{3+x},$$

整理得： $x^2 + 3x - 8 = 0$ ，

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{2} \quad (\text{舍去})$$

$\therefore$ 满足条件的点 P 的个数是 2 个，

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定及性质，难度适中，进行分类讨论是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ，则 $\frac{x-y}{x+y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 根据分式的基本性质，由 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ 可得 $x = \frac{3}{2}y$ ，然后代入式子进行计算即可得解.

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ，

$$\therefore x = \frac{3}{2}y,$$

$$\text{则 } \frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{3}{2}y-y}{\frac{3}{2}y+y} = \frac{\frac{1}{2}y}{\frac{5}{2}y} = \frac{1}{5}.$$

故答案为: $\frac{1}{5}$.

【点睛】本题考查了分式的化简求值，掌握分式的基本性质并能灵活运用性质进行分式的化简求值是解题的关键.

8. 已知线段 $AB=6$ ， P 是 AB 的黄金分割点，且 $PA>PB$ ，那么 PA 的长是_____.

【答案】 $3\sqrt{5}-3$

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义， PA 是较长线段得到 $PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，代入数据即可得出 PA 的长.

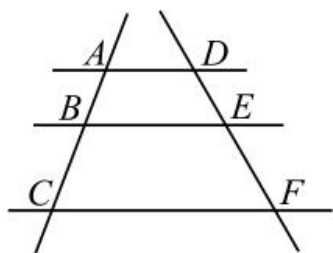
【详解】解: $\because P$ 是 AB 的黄金分割点，且 $PA>PB$ ， $AB=6$ ，

$$\therefore PA = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 6 = 3\sqrt{5}-3.$$

故答案为: $3\sqrt{5}-3$.

【点睛】本题考查了黄金分割的定义，理解黄金分割点的概念. 牢记黄金分割比是解题关键.

9. 如图，已知直线 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，如果 $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ， $DE=3$ ，那么线段 EF 的长是_____.



【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】由平行线所截线段对应成比例可知 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ，然后代入 DE 的值求解即可.

【详解】解: $\because AD \parallel BE \parallel CF$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{2}{3}$$

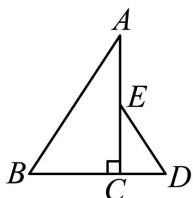
$\because DE=3$

$$\therefore EF = \frac{3}{2}DE = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}.$$

故答案为: $\frac{9}{2}$

【点睛】 本题主要考查平行线所截线段对应成比例, 熟练掌握比例线段的计算是解决本题的关键.

10. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 4$, E 是边 AC 的中点, 延长 BC 到点 D , 使 $BC = 2CD$, 那么 DE 的长是_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 先判断出 $\triangle ACB \sim \triangle ECD$, 再利用相似三角形的性质即可得到 DE .

【详解】: $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ECD,$$

$$\because E \text{ 是边 } AC \text{ 的中点, } BC = 2CD,$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = 2,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DE} = 2$$

$$\because AB = 4$$

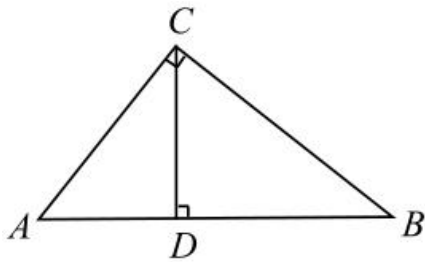
$$\therefore \frac{4}{DE} = 2$$

$$\therefore DE = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键.

11. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , 如果 $AC = 3$, $AB = 5$, 那么 $\cos \angle BCD$ 的值是_____



【答案】 $\frac{3}{5}$ ## 0.6

【解析】

【分析】 根据题意得出 $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle A$ ，继而根据余弦的定义即可求解.

【详解】 解： $\because$ Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle A,$$

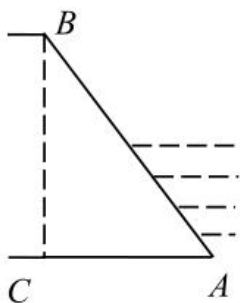
$$\because AC = 3, AB = 5,$$

$$\therefore \cos \angle BCD = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题考查了求余弦，掌握余弦的定义是解题的关键.

12. 如图，河堤横断面迎水坡 AB 的坡比 $i = 1:0.75$ ，堤高 $BC = 4.8$ 米，那么坡面 AB 的长度是_____米.



【答案】 6

【解析】

【分析】 首先根据坡比求出 AC 的长度，然后根据勾股定理求出 AB 的长度.

【详解】 解： $\because$ 迎水坡 AB 的坡比 $i = 1:0.75$ ，

$$\therefore BC : AC = 1 : 0.75$$

$$\because \text{堤高 } BC = 4.8 \text{ 米},$$

$$\therefore AC = 3.6 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6 \text{ 米},$$

故答案为：6.

【点睛】此题考查了解直角三角形的实际应用，熟记坡比的定义是解题的关键.

13. 把抛物线 $y = x^2 + 1$ 向左平移 2 个单位，所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = (x + 2)^2 + 1$

【解析】

【分析】根据抛物线的顶点坐标 $(0, 1)$ ，再左平移 2 个单位即 $(-2, 1)$ ，再利用顶点式抛物线解析式写出即可.

【详解】 $y = x^2 + 1$ 的顶点坐标 $(0, 1)$ ，抛物线 $y = x^2 + 1$ 左平移 2 个单位后的抛物线的顶点坐标为 $(-2, 1)$ ，新的顶点式抛物线为 $y = (x + 2)^2 + 1$.

故答案为： $y = (x + 2)^2 + 1$.

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减. 并根据规律利用点的变化确定函数解析式.

14. 如果一条抛物线经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(4, 0)$ ，那么该抛物线的对称轴是直线_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】根据 A, B 的坐标，利用二次函数的性质求出抛物线的对称轴，即可得出.

【详解】解： $\because$ 抛物线经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(4, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2 + 4}{2} = 1$,

故答案为： $x = 1$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的性质，根据抛物线的对称轴，求出抛物线的对称轴是解题的关键.

15. 已知一个二次函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，且在 y 轴左侧部分是上升的，那么该二次函数的解析式可以是_____ (只要写出一个符合要求的解析式).

【答案】 $y = -x^2 + 2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】由于二次函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，且在 y 轴左侧部分是上升的，由此可以确定抛物线的对称轴为 y 轴或在 y 轴的右侧，且图象开口向下，由此可以确定函数解析式不唯一.

【详解】解： $\because$ 二次函数的图像经过点 $(0, 2)$ ，且在 y 轴左侧部分是上升的，

若二次函数的顶点坐标为 $(0, 2)$ ，且图象开口向下，

$\therefore$ 二次函数解析式的二次项系数 $a < 0$ ，

$\therefore$ 二次函数解析式不唯一，如： $y = -x^2 + 2$

故答案为： $y = -x^2 + 2$ （答案不唯一）

【点睛】此题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是会利用函数的性质确定解析式的各项系数.

16. 公园草坪上，自动浇水喷头喷出的水线呈一条抛物线，水线上水珠的离地高度 y （米）关于水珠与喷头的

的水平距离 x （米）的函数解析式是 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x (0 \leq x \leq 4)$. 那么水珠的最大离地高度是_____米.

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】根据二次函数的顶点式即可求解.

【详解】 $\because y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + \frac{4}{3} (0 \leq x \leq 4)$,

$\therefore x = 2$ 时, y 取最大值 $\frac{4}{3}$,

即水珠的高度达到最大 $\frac{4}{3}$ 米时, 水珠与喷头的水平距离是 2 米,

故答案为: $\frac{4}{3}$.

【点睛】本题考查了二次函数的应用，解决本题的关键是掌握把二次函数的解析式化为顶点式.

17. 已知 $\triangle ABC$, P 是边 BC 上一点, $\triangle PAB$ 、 $\triangle PAC$ 的重心分别为 G_1 、 G_2 , 那么 $\frac{S_{\triangle AG_1G_2}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】由重心可知线段 $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$, 得到 $\triangle AG_1G_2 \sim \triangle AEF$, 从而得出面积比, 再利用中线的性质得到最后的面积之比.

【详解】解: $\because G_1, G_2$ 是 $\triangle APB, \triangle APC$ 的重心,

$\therefore \frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$,

$\therefore \angle G_1AG_2 = \angle EAF$,

$\therefore \triangle AG_1G_2 \sim \triangle AEF$,

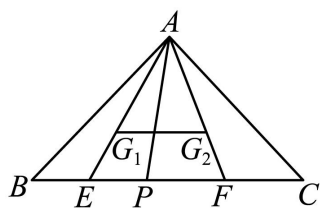
$$\therefore \frac{S_{\triangle AG_1G_2}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{4}{9},$$

$\because E, F$ 分别是 BP, CP 的中点,

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEP}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle APF}}{S_{\triangle APC}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2},$$

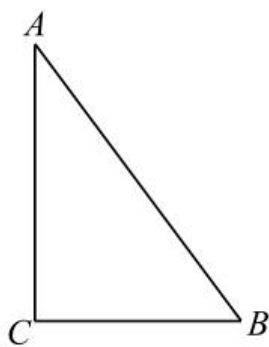
$$\therefore \frac{S_{\triangle AG_1G_2}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9},$$



故答案为: $\frac{2}{9}$.

【点睛】 本题主要考查重心的性质以及线段比与面积的关系, 熟练掌握重心的性质以及利用线段比求面积比是解决本题的关键.

18. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转至 $\triangle A'B'C$, 如果直线 $A'B' \perp AB$, 垂足记为点 D , 那么 $\frac{AD}{BD}$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{4}{21}$ 或 $\frac{28}{3}$

【解析】

【分析】 设 $BC = 3a$, 则 $AB = 5a$, $AC = 4a$, 分两种情况讨论, 画出图形, 利用相似三角形的判定和性质, 列式计算即可求解.

【详解】 解: $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin A = \frac{3}{5}$,

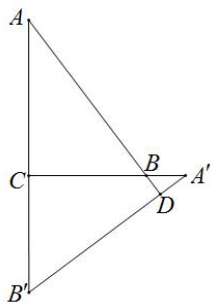
$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

设 $BC = 3a$ ，则 $AB = 5a$ ， $AC = 4a$ ，

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转至 $\triangle A'B'C$ ，

$\therefore B'C = BC = 3a$ ，则 $A'B' = AB = 5a$ ， $A'C = AC = 4a$ ， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ，

如图， $A'B = a$ ， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle ACB = \angle A'DB = 90^\circ$ ，



$\therefore \triangle ACB \sim \triangle A'DB$ ，

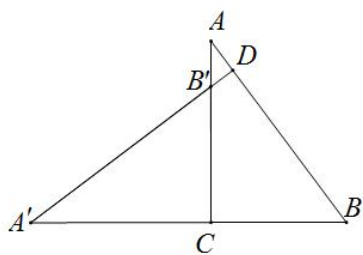
$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{BD}{BC}, \text{ 则 } \frac{a}{5a} = \frac{BD}{3a},$$

$$\therefore BD = \frac{3a}{5},$$

$$\therefore AD = AB + BD = 5a + \frac{3a}{5} = \frac{28a}{5},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{28a}{5}}{\frac{3a}{5}} = \frac{28}{3};$$

如图， $AB' = a$ ， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle ACB = \angle ADB' = 90^\circ$ ，



$\therefore \triangle A'CB' \sim \triangle ADB'$ ，

$$\therefore \frac{AB'}{A'B'} = \frac{AD}{A'C}, \text{ 则 } \frac{a}{5a} = \frac{AD}{4a},$$

$$\therefore AD = \frac{4a}{5},$$

$$\therefore BD = AB - AD = 5a - \frac{4a}{5} = \frac{21a}{5},$$

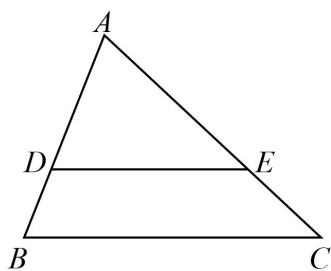
$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{4a}{5}}{\frac{21a}{5}} = \frac{4}{21};$$

故答案为: $\frac{4}{21}$ 或 $\frac{28}{3}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，勾股定理，正弦函数，相似三角形的判定和性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

三、解答题 (本大题共 7 题)

19. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD = 2DB$.



(1) 如果 $BC = 4$ ，求 DE 的长；

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DE} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$.

【答案】(1) $DE = \frac{8}{3}$

(2) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 得到 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，再根据已知条件推出 $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ，得到 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ，

由此即可得到答案；

(2) 先求出 $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\vec{b}$ ，再由 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$\because AD = 2DB$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore DE = \frac{8}{3};$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \overrightarrow{DE} = \vec{b}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

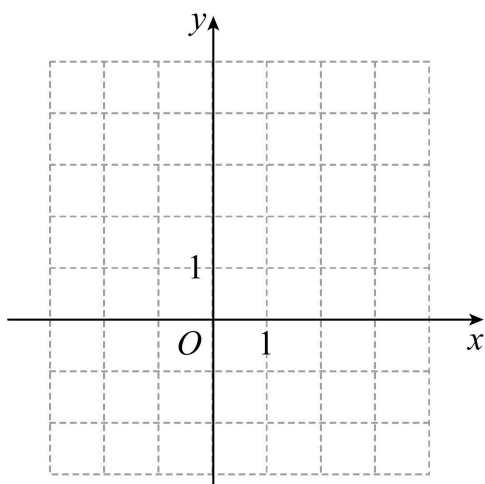
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}.$$

【点睛】本题主要考查了相似三角形的性质与判定，向量的线性运算，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 推出 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ 是解题的关键.

20. 已知二次函数 $y = 2x^2 - 4x - 1$.



(1) 用配方法求这个二次函数的顶点坐标;

(2) 在所给的平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 画出这个二次函数的图像;

(3) 请描述这个二次函数图像的变化趋势.

【答案】(1) 顶点坐标 $(1, -3)$

(2) 见解析 (3) 这个二次函数图像在对称轴直线 $x = 1$ 左侧部分是下降的, 右侧部分是上升的

【解析】

【分析】(1) 将函数解析式化为顶点式，即可得出答案；

(2) 先求出几个特殊的点，然后描点连线即可；

(3) 根据 (2) 函数图像，即可得出结果.

【小问 1 详解】

$$\text{解: (1) } y = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x^2 - 2x) - 1 = 2(x-1)^2 - 3$$

$\therefore$ 二次函数的顶点坐标 $(1, -3)$;

【小问 2 详解】

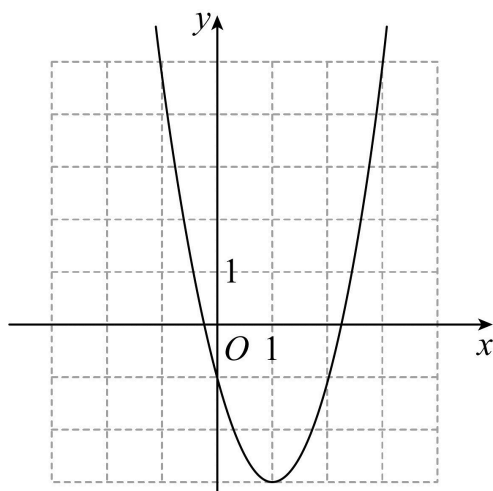
解: 当 $x=0$ 时, $y=-1$,

当 $y=-1$ 时, $x=2$,

经过点 $(0, -1)$, $(2, -1)$,

顶点坐标为: $(1, -3)$

图像如图所示:

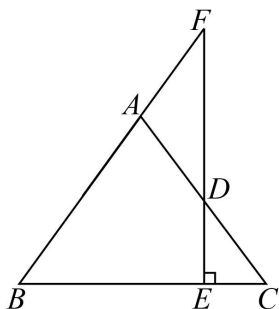


【小问 3 详解】

解: 这个二次函数图像在对称轴直线 $x=1$ 左侧部分是下降的, 右侧部分是上升的.

【点睛】本题主要考查二次函数的基本性质及作图方法, 熟练掌握二次函数的基本性质是解题关键.

21. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 12$, D 是 AC 的中点, $DE \perp BC$ 于点 E , ED 、 BA 的延长线交于点 F .



(1) 求 $\angle ABC$ 的正切值;

(2) 求 $\frac{DF}{DE}$ 的值.

【答案】 (1) $\tan B = \frac{4}{3}$

(2) $\frac{DF}{DE} = 2$

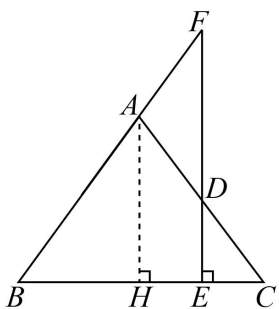
【解析】

【分析】 (1) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H, 由 $AB = AC = 10$ 得到 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 由三线合一得到 $BH = CH = 6$, 由勾股定理求得 $AH = 8$, 根据正切的定义即可得到答案;

(2) 由 $AH \perp BC$, $FE \perp BC$ 得到 $AH \parallel FE$, 则 $\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{EH}$, 由 D 是 AC 的中点, 得到 DE 是 $\triangle ACH$ 的中位线, 求得 $DE = 4$, 进一步得到 $\frac{AH}{FE} = \frac{BH}{BE} = \frac{2}{3}$, 求得 $EF = 12$, 得到 $DF = 8$, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H,



$$\because AB = AC = 10,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形,

$$\because BC = 12, AH \perp BC,$$

$$\therefore BH = CH = 6,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABH \text{ 中, } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

【小问2详解】

解: $\because AH \perp BC, FE \perp BC,$

$$\therefore AH \parallel FE,$$

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{CE}{EH},$$

$\because D$ 是 AC 的中点,

$$\therefore EH = CE,$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \triangle ACH \text{ 的中位线, } DE = \frac{1}{2}AH = 4,$$

$$\therefore BH = CH,$$

$$\therefore \frac{AH}{FE} = \frac{BH}{BE} = \frac{2}{3},$$

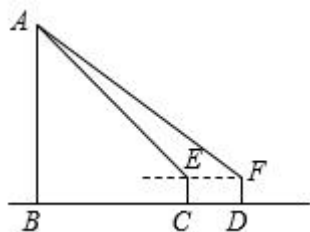
$$\therefore EF = 12,$$

$$\therefore DF = 8$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = 2.$$

【点睛】此题考查了平行线分线段成比例定理、三角形中位线定理、等腰三角形的判定和性质、三角函数的定义、勾股定理等知识, 熟练掌握相关定理是解题的关键.

22. 小明想利用测角仪测量操场上旗杆 AB 的高度. 如图, 他先在点 C 处放置一个高为 1.6 米的测角仪 (图中 CE), 测得旗杆顶部 A 的仰角为 45° , 再沿 BC 的方向后退 3.5 米到点 D 处, 用同一个测角仪 (图中 DF), 又测得旗杆顶部 A 的仰角为 37° . 试求旗杆 AB 的高度. (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

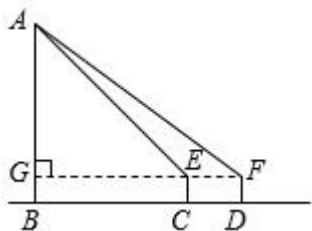


【答案】旗杆的高度 AB 约为 12.1 米

【解析】

【分析】如图所示, 延长 FE , 交 AB 于点 G , 则 $FG \perp AB$, 设 $EG = x$, 则 $AG = GE = x$, $FG = GE + EF = x + 3.5$, 在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, 根据三角函数值的计算方法即可求解.

【详解】解：如图所示，延长 FE ，交 AB 于点 G ，则 $FG \perp AB$ ，



由题意得， $\angle AEG = 45^\circ$ ， $\angle AFG = 37^\circ$ ， $FE = 3.5$ ， $CE = 1.6$ ，

设 $EG = x$ ，则 $AG = GE = x$ ， $FG = GE + EF = x + 3.5$ ， $GB = CE = 1.6$

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中， $\tan \angle AFG = \tan 37^\circ = \frac{AG}{FG} = 0.75$ ，

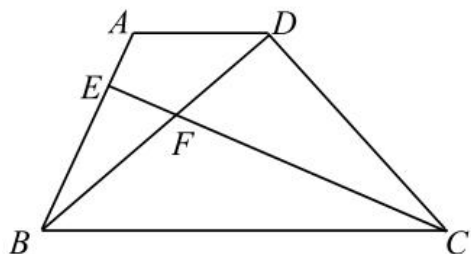
$\therefore \frac{x}{x+3.5} = 0.75$ ，解得 $x = 10.5$ ，即 $AG = GE = 10.5$ （米），

$\therefore AB = AG + GB = 10.5 + 1.6 = 12.1$ （米）.

$\therefore$ 旗杆的高度 AB 约为 12.1 米.

【点睛】本题主要考查仰俯角测量高度，理解图示中角与线的关系，掌握仰俯角测量高度的方法，三角函数值的计算方法是解题的关键.

23. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$. E 是边 AB 上一点， CE 与对角线 BD 交于点 F ，且 $BE^2 = EF \cdot EC$.



求证：

(1) $\triangle ABD \sim \triangle FCB$ ；

(2) $BD \cdot BE = AD \cdot CE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $BE^2 = EF \cdot EC$ 可证 $\triangle BEF \sim \triangle CEB$ ，得到 $\angle EBF = \angle ECB$ ，再由 $AD \parallel BC$ 得到 $\angle ADB = \angle DCB$ ，即可证明 $\triangle ABD \sim \triangle FCB$ ；

(2) 由 $\triangle BEF \sim \triangle CEB$ 得到 $\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{CE}$ ， $\triangle ABD \sim \triangle FCB$ 得到 $\frac{AB}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BF}$ ，进而得到 $\frac{BE}{CE} = \frac{AD}{BD}$ ，

即可得到 $BD \cdot BE = AD \cdot CE$.

【小问 1 详解】

$$\because BE^2 = EF \cdot EC,$$

$$\therefore \frac{BE}{EF} = \frac{CE}{BE}$$

$$\because \angle BEF = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle CEB$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ECB$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DCB$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle FCB;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle BEF \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{BE}{CE}$$

$$\because \triangle ABD \sim \triangle FCB,$$

$$\therefore \frac{AB}{FC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{BF}$$

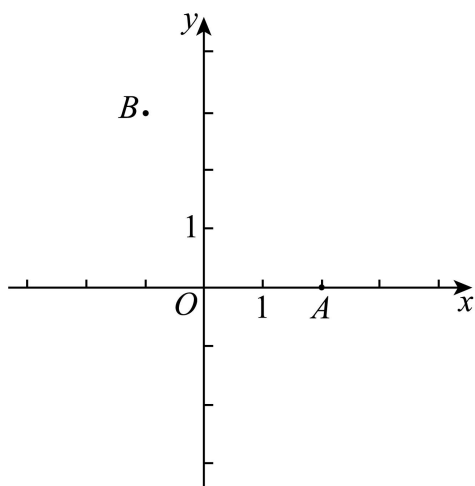
$$\therefore \frac{BF}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{AD}{BD}$$

$$\therefore BE \cdot BD = AD \cdot CE.$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，相似三角形判定方法是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知抛物线 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $B(-1, 3)$.



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 平移这条抛物线, 所得新抛物线的顶点为 $P(m, n)$.

①如果 $PO = PA$, 且新抛物线的顶点在 $\triangle AOB$ 的内部, 求 $m + n$ 的取值范围;

②如果新抛物线经过原点, 且 $\angle POA = \angle OBA$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) 抛物线的表达式 $y = -x^2 + 4$

(2) ① $m + n$ 的取值范围是 $1 < m + n < 2$; ② $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 根据抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $B(-1, 3)$, 待定系数法求解析式即可求解;

(2) ①新抛物线的顶点为 $P(m, n)$, $A(2, 0)$, 由 $PO = PA$ 得出 $m = 1$, 待定系数法求解析式得直线 AB 的解析式: $y = -x + 2$, 根据题意, 当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 新抛物线的顶点在 $\triangle AOB$ 的内部, 得出 $0 < n < 1$, 继而即可求解;

②新抛物线的顶点为 $P(m, n)$, 设抛物线解析式为 $y = -(x - m)^2 + n$, 由新抛物线经过原点, 得出 $n = m^2$,

根据 $\angle POA = \angle OBA$, 得出 $\tan \angle POA = \frac{m^2}{m} = \frac{1}{2}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(2, 0)$ 和点 $B(-1, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a + c = 0 \\ a + c = 3 \end{cases}, \therefore \begin{cases} a = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式 $y = -x^2 + 4$

【小问 2 详解】

①新抛物线的顶点为 $P(m, n)$, $A(2, 0)$

$$\because PO = PA,$$

$$\therefore m = 1$$

$$\because A(2, 0)、B(-1, 3),$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} 2k + b = 0 \\ -k + b = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得:} \begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式: } y = -x + 2$$

当 $x = 1$ 时, $y = 1$, 新抛物线的顶点在 $\triangle AOB$ 的内部,

$$\therefore 0 < n < 1$$

$$\therefore m + n \text{ 的取值范围是 } 1 < m + n < 2$$

② $\because$ 新抛物线的顶点为 $P(m, n)$,

$$\therefore y = -(x - m)^2 + n$$

$\because$ 新抛物线经过原点,

$$\therefore -m^2 + n = 0, \text{ 即 } n = m^2$$

可知点 P 在第一象限, $P(m, m^2)$

作 $OQ \perp AB$ 于点 Q , 则 $OQ = \sqrt{2}$, $BQ = 2\sqrt{2}$, $\tan \angle OBA = \frac{1}{2}$

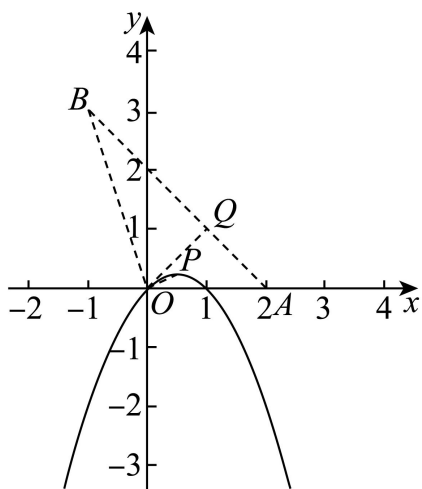
$$\therefore \angle POA = \angle OBA,$$

$$\therefore \tan \angle POA = \frac{m^2}{m} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}$$

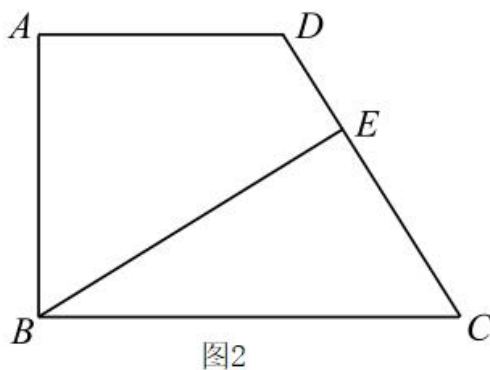
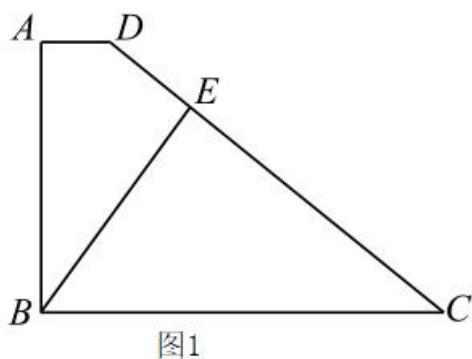
$$\therefore m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$



【点睛】本题考查了二次函数综合运用，平移问题，角度问题，正切的定义，掌握二次函数图象的性质是解题的关键.

25. 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 6$, E 是线段 CD 上一点, 连接 BE .



- (1) 如图 1, 如果 $AD = 1$, 且 $CE = 3DE$, 求 $\angle ABE$ 的正切值;
- (2) 如图 2, 如果 $BE \perp CD$, 且 $CE = 2DE$, 求 AD 的长;
- (3) 如果 $BE \perp CD$, 且 $\triangle ABE$ 是等腰三角形, 求 $\triangle ABE$ 的面积.

【答案】(1) $\tan \angle ABE = \frac{3}{4}$

(2) $AD = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

(3) $\triangle ABE$ 的面积是 $6 + 2\sqrt{5}$, $\frac{16}{3}$ 或 $\frac{192}{25}$

【解析】

【分析】(1) 延长 AD 、 BE , 交于点 F , 根据 $AD \parallel BC$ 求出 $DF = 2$, 最后根据 $\tan \angle ABE = \frac{AF}{AB}$ 求解即可;

(2) 延长 AD 、 BE , 交于点 F , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H , 根据 $AD \parallel BC$ 求出 $DF = 3$, 再由 $\angle ABE = \angle C$ 可得 $\tan \angle ABE = \tan C = \frac{AF}{AB} = \frac{DH}{CH}$, 设 $AD = x$, 则 $CH = 6 - x$,

代入后列方程求解即可；

(3) 分 $EA = EB$ 、 $AB = BE$ 、 $AB = AE$ 三种情况分别求解即可.

【小问 1 详解】

延长 AD 、 BE ，交于点 F

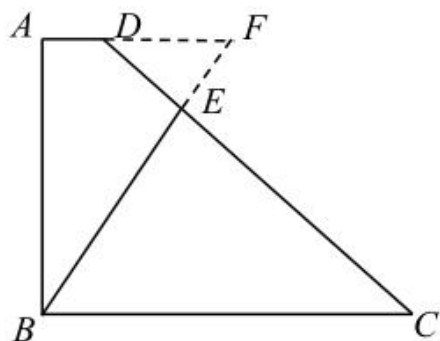
$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{DE}{CE}$$

$$\because CE = 3DE, \quad BC = 6,$$

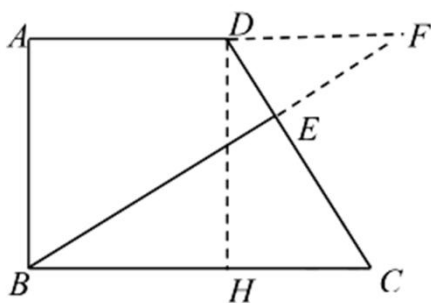
$$\therefore DF = 2$$

$$\text{Rt}\triangle ABF \text{ 中, } \tan \angle ABE = \frac{AF}{AB} = \frac{3}{4}$$



【小问 2 详解】

延长 AD 、 BE ，交于点 F ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，则 $AB = DH = 4$



$$\because \frac{DF}{BC} = \frac{DE}{CE}, \quad CE = 2DE, \quad BC = 6,$$

$$\therefore DF = 3$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \quad BE \perp CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle C$$

$$\therefore \tan \angle ABE = \tan C,$$

设 $AD = x$ ，则 $CH = 6 - x$ ，

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{DH}{CH},$$

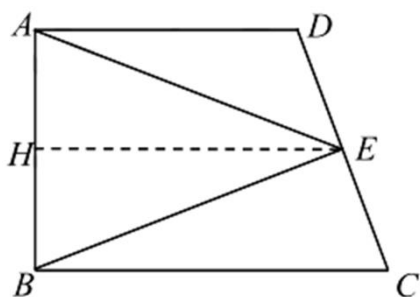
$$\therefore \frac{3+x}{4} = \frac{4}{6-x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore AD = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

【小问3详解】

1° $EA = EB$ 时, 过点 E 作 $EH \perp AB$ 于点 H , 则 H 是 AB 中点,



$\therefore E$ 是 CD 的中点,

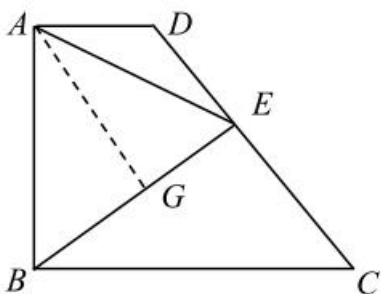
$\because BE \perp CD, \therefore BD = BC = 6,$

Rt $\triangle ABD$ 中, $AD = 2\sqrt{5}$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times 4 \times (3 + \sqrt{5}) = 6 + 2\sqrt{5}$$

2° $AB = BE$ 时, $BE = 4, BC = 6, CE = 2\sqrt{5}$

过点 A 作 $AG \perp BE$ 于点 G ,



$$\sin \angle ABE = \sin C,$$

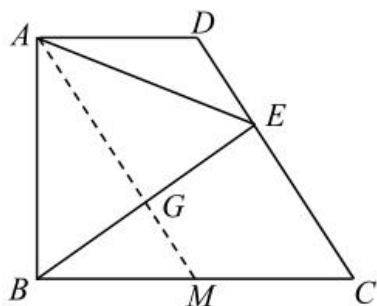
$$\therefore \frac{AG}{AB} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AG}{4} = \frac{4}{6},$$

$$\therefore AG = \frac{8}{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

3° $AB = AE$ 时, 过点 A 作 $AG \perp BE$ 于点 G, 延长 AG 交 BC 于点 M, 则 $AM \parallel CD$,



$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore BG = GE,$$

$$\therefore BM = CM = 3,$$

$$\therefore AD = 3$$

$$\therefore AG = \frac{16}{5}, \quad BG = \frac{12}{5}$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{192}{25}$$

$$\therefore \triangle ABE \text{ 的面积是 } 6 + 2\sqrt{5}, \frac{16}{3} \text{ 或 } \frac{192}{25}.$$

【点睛】 本题考查梯形、锐角三角函数、平行线分线段成比例, 熟记常用的梯形辅助线是解题的关键.

