

2022-2023 学年度第二学期初三练习卷

数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, 二次函数是 ()

- A. $y = x + 1$ B. $y = x(x + 1)$ C. $y = (x + 1)^2 - x^2$ D. $y = \frac{1}{x^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的定义逐项判断即可.

【详解】 $y = x + 1$ 中, 未知数的次数为 1 次, 故 A 不是二次函数, 不符合题意;

$y = x(x + 1) = x^2 + x$, 满足二次函数的定义, 故 B 是二次函数, 符合题意;

$y = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$, 未知数的次数为 1 次, 故 C 不是二次函数, 不符合题意;

$y = \frac{1}{x^2}$, 分母中有未知数, 故 D 不是二次函数, 不符合题意.

故选 B.

【点睛】本题考查二次函数的定义. 掌握二次函数的定义“一般地, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 是常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫作二次函数.”是解题关键.

2. 已知点 $A(1, 2)$ 在平面直角坐标系 xOy 中, 射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 那么 $\cos \alpha$ 的值为 ()

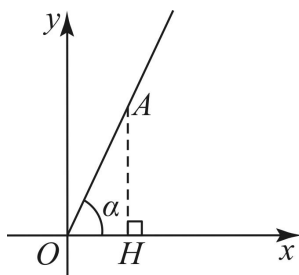
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】作 $AH \perp x$ 轴于 H . 利用勾股定理求出 OA , 利用余弦的定义即可解决问题.

【详解】解: 如图, 作 $AH \perp x$ 轴于 H .



$$\therefore A(1, 2),$$

$$\therefore OH = 1, \quad AH = 2,$$

$$\therefore \angle AHO = 90^\circ,$$

$$\therefore OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故选: C.

【点睛】本题考查解直角三角形，坐标与图形的性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题.

3. 已知一个单位向量 $\vec{e}$ ，设 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 是非零向量，下列等式中，正确的是 ()

A. $\frac{1}{|\vec{m}|} \vec{m} = \vec{e}$

B. $|\vec{e}| \vec{m} = \vec{m}$

C. $|\vec{n}| \vec{e} = \vec{n}$

D. $\frac{1}{|\vec{m}|} \vec{m} = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平面向量的性质一一判断即可.

【详解】解: A、 $\frac{1}{|\vec{m}|} \vec{m}$ 与 $\vec{e}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

B、 $|\vec{e}| \vec{m} = \vec{m}$ ，计算正确，故本选项符合题意.

C、 $|\vec{n}| \vec{e}$ 和 $\vec{n}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

D、 $\frac{1}{|\vec{m}|} \vec{m}$ 和 $\frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n}$ 的模相等，方向不一定相同，故本选项不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

4. 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为1:3，它把物体从地面点 A 处送到离地面 3 米高的 B 处，则物体从 A 到 B 所经过的路程为 ()



- A. $3\sqrt{10}$ 米 B. $2\sqrt{10}$ 米 C. $\sqrt{10}$ 米 D. 9 米

【答案】A

【解析】

【分析】根据坡比定义求出 AC 的长度，再根据勾股定理求出 AB 长度即可.

【详解】解：设 $BC \perp AC$, 垂足为 C,

$$\because i = BC : AC = 1 : 3$$

$$\therefore 3 : AC = 1 : 3,$$

$$\therefore AC = 9,$$

在 $Rt\triangle ACB$ 中，由勾股定理得，

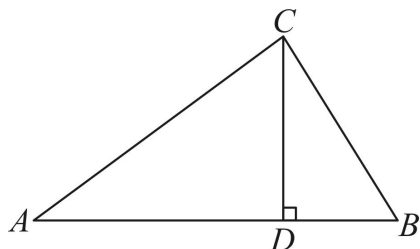
$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{10} \text{ 米}.$$

故选：A.

【点睛】本题考查解直角三角形，明确坡比的概念是解答此题的关键.

5. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D，下列结论中，错误的是（ ）



- A. $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ B. $\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$ C. $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$ D. $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据直角三角形的性质和相似三角形的判定可知 $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，利用相似三角形的性质：对应边的比值相等即可得到问题的答案.

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ, \quad \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

同理: $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$,

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC}, \quad \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore BD \neq CD,$$

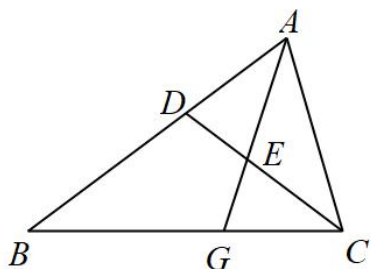
$$\therefore \frac{AD}{AC} \neq \frac{BD}{BC},$$

故 A, B, D 正确, C 错误,

故选: C.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 三角形相似的判定一直是中考考查的热点之一, 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AG 平分 $\angle BAC$, 点 D 在边 AB 上, 线段 CD 与 AG 交于点 E , 且 $\angle ACD = \angle B$, 下列结论中, 错误的是 ()



A. $\triangle ACD \sim \triangle ABC$

B. $\triangle ADE \sim \triangle ACG$

C. $\triangle ACE \sim \triangle ABG$

D. $\triangle ADE \sim \triangle CGE$

【答案】 D

【解析】

【分析】 由 $\angle ACD = \angle B$, $\angle DAC = \angle CAB$, 可直接证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 即可判断 A; 由角平分线的定义得出 $\angle DAE = \angle CAG$, 再结合三角形外角的性质即可得出 $\angle AED = \angle AGC$, 从而可证 $\triangle ADE \sim \triangle ACG$, 即可判断 B; 由 $\angle CAE = \angle BAG$, $\angle ACD = \angle B$, 可直接证明 $\triangle ACE \sim \triangle ABG$, 即可判断 C; 没有条件证明 $\triangle ADE \sim \triangle CGE$, 即可判断 D.

【详解】 $\because \angle ACD = \angle B$, $\angle DAC = \angle CAB$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC$, 故 A 正确, 不符合题意;

$\because AG$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle DAE = \angle CAG.$$

$$\because \angle AED = \angle CAG + \angle ACD, \quad \angle AGC = \angle DAE + \angle B,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AGC,$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACG$, 故 B 正确, 不符合题意;

$$\because \angle CAE = \angle BAG, \angle ACD = \angle B,$$

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABG$, 故 C 正确, 不符合题意;

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CGE$ 中只有 $\angle AED = \angle CEG$, 不能证明 $\triangle ADE \sim \triangle CGE$, 故 D 错误, 符合题意.

故选 D.

【点睛】本题考查三角形相似的判定, 角平分线的定义, 三角形外角的性质. 掌握三角形相似的判定定理是解题关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $\cot 30^\circ =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数值直接写出即可.

【详解】解: 根据特殊角的三角函数值知: $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$,

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了特殊角的三角函数值, 解题时牢记特殊角的三角函数值是关键.

8. 计算: $\frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b}) + \vec{b} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】根据向量的线性运算法则计算即可.

【详解】解: $\frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b}) + \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

故答案为: $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

【点睛】本题考查了向量的线性运算. 解题的关键在于理解向量的数乘与加减运算.

9. 如果函数 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, 那么 $f(2) =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】将 $x = 2$ 代入 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, 求值即可.

【详解】由题意可知 $f(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 3$.

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查求二次函数的值. 正确计算是解题关键.

10. 如果两个相似三角形的周长比为 2: 3, 那么它们的对应高的比为_____.

【答案】 2:3

【解析】

【分析】 根据相似三角形的周长比等于相似比可求得其相似比, 再根据对应高线的比等于相似比可得到答案.

【详解】 $\because$ 两个相似三角形的周长比为 2:3,

$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 2:3,

$\therefore$ 对应高线的比为 2:3,

故答案为: 2:3.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质, 掌握相似三角形的周长比、对应高线比等于相似比是解题的关键.

11. 已知点 P 是线段 MN 的黄金分割点 ($MP > NP$), 如果 $MN = 10$, 那么线段 $MP =$ _____.

【答案】 $5\sqrt{5} - 5$

【解析】

【分析】 根据黄金分割点的概念列式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, $MP > PN$, $MN = 10$,

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 10 = 5\sqrt{5} - 5,$$

故答案为: $5\sqrt{5} - 5$.

【点睛】 此题考查了黄金分割点的概念, 解题的关键是熟练掌握黄金分割点的概念. 把一条线段分成两部分, 使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项, 这样的线段分割叫做黄金分割, 他们的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金比.

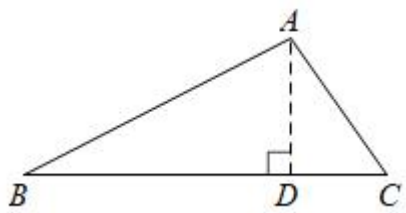
12. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 13$, $BC = 17$, $\tan B = \frac{5}{12}$, 那么 $AC =$ _____.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D , 利用正切的定义结合勾股定理求得 AD 、 BD , 进而可求出 CD , 最后再次根据勾股定理求解即可.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，



$$\therefore \tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{5}{12}.$$

$\therefore$ 可设 $AD = 5x$ ，则 $BD = 12x$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AD^2 + BD^2 = AB^2$ ，

$$\therefore (5x)^2 + (12x)^2 = 13^2,$$

解得： $x = 1$ （舍去负值），

$$\therefore AD = 5, \quad BD = 12,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 17 - 12 = 5,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

故答案为： $5\sqrt{2}$ 。

【点睛】本题考查解直角三角形、勾股定理。画出图形并正确作出辅助线构造直角三角形是解题关键。

13. 已知抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的，那么 a 的取值范围是_____。

【答案】 $a > 0$

【解析】

【分析】利用二次函数的性质得到抛物线开口向上，则可得 $a > 0$ 。

【详解】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 在对称轴左侧的部分是下降的，

$\therefore$ 抛物线开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

故答案为： $a > 0$ 。

【点睛】本本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小。当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下。

14. 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 向下平移 m 个单位后，它的顶点恰好落在 x 轴上，那么 $m =$ _____。

【答案】2

【解析】

【分析】将抛物线解析式改为顶点式，即可求出平移后的解析式，进而可求出平移后的顶点坐标，最后根据它的顶点恰好落在 x 轴上，即顶点的纵坐标为 0，可求出答案.

【详解】解： $\because y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$,

$\therefore$ 该抛物线向下平移 m 个单位后的解析式为 $y = (x-1)^2 + 2 - m$,

$\therefore$ 此时顶点坐标为 $(1, 2-m)$.

$\because$ 此时它的顶点恰好落在 x 轴上,

$\therefore 2 - m = 0$,

解得： $m = 2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查二次函数图象的平移，二次函数的图象和性质. 掌握二次函数图象的平移规律“上加下减，左加右减”是解题关键.

15. 广场上喷水池中的喷头微露水面，喷出的水线呈一条抛物线，水线上水珠的高度 y (米) 关于水珠和喷头的水平距离 x (米) 的函数解析式是 $y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x$ ($0 \leq x \leq 4$)，那么水珠达到的最大高度为_____米.

【答案】6

【解析】

【分析】根据二次函数的顶点式即可求解.

【详解】解： $\because y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x$

$= -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6$,

$\because a = -\frac{3}{2} < 0$

$\therefore$ 抛物线开口向下，有最大值，

又 $0 \leq x \leq 4$

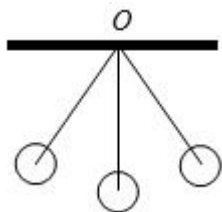
$\therefore x = 2$ 时， y 取最大值 6，

即水珠的高度达到最大 6 米，

故答案为：6.

【点睛】本题考查了二次函数的应用，解决本题的关键是掌握把二次函数的解析式化为顶点式.

16. 如图，一条细绳系着一个小球在平面内摆动，已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米，小球在左右两个最高位置时，细绳相应所成的角为 74° ，那么小球在最高和最低位置时的高度差为_____厘米. (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$.)

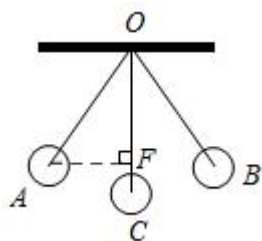


【答案】 10

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AF \perp OC$ 于点 F ，在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中，根据 $\cos \angle AOC = \frac{OF}{OA}$ ，可得 $OF \approx 40$ 厘米，即可求解.

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AF \perp OC$ 于点 F ，



根据题意得: $\angle AOB = 74^\circ$, $\angle AOC = \angle BOC$, $OA = OC = 50$ 厘米,

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中, $\cos \angle AOC = \frac{OF}{OA}$,

$$\therefore \cos 37^\circ = \frac{OF}{50},$$

解得: $OF \approx 40$ 厘米,

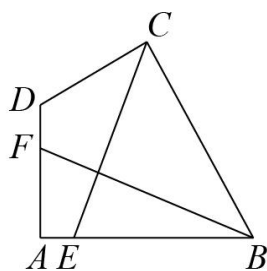
$$\therefore CF = OC - OF = 10 \text{ 厘米},$$

即小球在最高和最低位置时的高度差为 10 厘米.

故答案为: 10

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的实际应用，明确题意，准确构造直角三角形是解题的关键.

17. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = CB$ ，点 E 、 F 分别在线段 AB 、 AD 上. 如果 $CE \perp BF$ ，那么 $\frac{CE}{BF}$ 的值为_____.

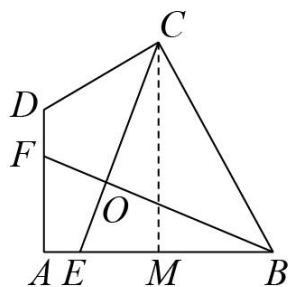


【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ．设 CE 交 BF 于点 O ．证明 $\triangle CME \sim \triangle BAF$ ，推出 $\frac{CE}{BF} = \frac{CM}{AB}$ ，可得结论．

【详解】解：过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M ，设 CE 交 BF 于点 O ．



$\because CM \perp AB$,

$\therefore \angle CME = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECM + \angle CEM = 90^\circ$,

$\because CE \perp BF$,

$\therefore \angle BOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CEM + \angle ABF = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECM = \angle ABF$,

又 $\angle FAB = \angle EMC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CME \sim \triangle BAF$,

$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{CM}{AB}$,

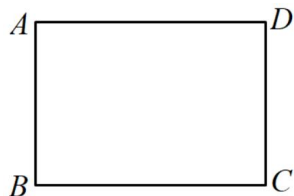
$\because AB = BC$, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{CM}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造相似三角形解决问题.

18. 如图, 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=8$, 将矩形 $ABCD$ 绕点 C 旋转, 使点 B 恰好落在对角线 AC 上的点 B' 处, 点 A 、 D 分别落在点 A' 、 D' 处, 边 $A'B'$ 、 $A'C$ 分别与边 AD 交于点 M 、 N , 那么线段 MN 的长为_____.



【答案】 3.75

【解析】

【分析】 过点 A' 作 $A'E \perp AD$, 利用勾股定理求出 AC , 根据旋转的性质得到相应结论, 求出 $A'B$ 证明 $\triangle AMB' \sim \triangle ACD$, 求出 $AM=2.5$, $B'M=1.5$, 证明 $\triangle AMB' \sim \triangle A'ME$, 求出 $A'E=3.6$, $EM=2.7$, 设 $EN=x$, 最后证明 $\triangle A'EN \sim \triangle CDN$, 得到 $\frac{A'E}{CD} = \frac{EN}{DN}$, 求出 $EN=1.05$, 从而可得 MN .

【详解】 解: 如图, 过点 A' 作 $A'E \perp AD$,

在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=8$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

由旋转可知: $B'C=BC=8$, $AB=A'B'=6$, $\angle B = \angle A'B'C = 90^\circ = \angle A'B'A$,

$$\therefore AB' = AC - B'C = 2,$$

$$\therefore \angle AMB' = \angle ADC = 90^\circ, \quad \angle B'AM = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle AMB' \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AM}{AC} = \frac{AB'}{AD} = \frac{B'M}{CD}, \quad \text{即} \quad \frac{AM}{10} = \frac{2}{8} = \frac{B'M}{6},$$

解得: $AM=2.5$, $B'M=1.5$,

$$\therefore A'M = A'B' - B'M = 6 - 1.5 = 4.5,$$

$$\therefore \angle AB'M = \angle A'EM = 90^\circ, \quad \angle AMB' = \angle A'ME,$$

$$\therefore \triangle AMB' \sim \triangle A'ME,$$

$$\therefore \frac{AM}{A'M} = \frac{AB'}{A'E} = \frac{B'M}{EM}, \quad \text{即} \quad \frac{2.5}{4.5} = \frac{2}{A'E} = \frac{1.5}{EM},$$

解得: $A'E=3.6$, $EM=2.7$,

$$\therefore DE = AD - AE = AD - (AM + EM) = 2.8,$$

设 $EN = x$ ，则 $DN = 2.8 - x$ ，

$$\because \angle CDN = \angle A'EN = 90^\circ, \quad \angle CND = \angle A'NE,$$

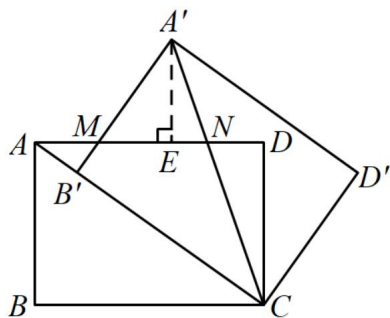
$$\therefore \triangle A'EN \sim \triangle CDN,$$

$$\therefore \frac{A'E}{CD} = \frac{EN}{DN}, \quad \text{即} \quad \frac{3.6}{6} = \frac{x}{2.8 - x},$$

解得: $x = 1.05$ ，即 $EN = 1.05$ ，

$$\therefore MN = EM + EN = 2.7 + 1.05 = 3.75,$$

故答案为: 3.75.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，矩形的性质，勾股定理，旋转的性质，解题的关键是添加辅助线，充分运用相似三角形的性质求出相应线段的长.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(1, m)$ 、 $B(3, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ 上.

(1) 如果 $m = n$ ，那么抛物线的对称轴为直线_____;

(2) 如果点 A 、 B 在直线 $y = x - 1$ 上, 求抛物线的表达式和顶点坐标.

【答案】(1) $x = 2$

$$(2) \quad y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x, \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线关于其对称轴对称即可解答;

(2) 由直线解析式可求出 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 2)$ ，进而可利用待定系数法求出抛物线的表达式，再改为顶点式，即得出其顶点坐标.

【小问 1 详解】

$$\because m = n,$$

$\therefore$ 点 A 和点 B 的纵坐标相等,

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$.

故答案为: $x = 2$;

【小问 2 详解】

∵ 点 A 、 B 在直线 $y = x - 1$ 上,

∴ $m = 1 - 1 = 0$, $n = 3 - 1 = 2$,

∴ $A(1, 0)$ 、 $B(3, 2)$.

∵ 点 A 和点 B 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ 上,

$$\therefore \begin{cases} 0 = a + b \\ 2 = 9a + 3b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

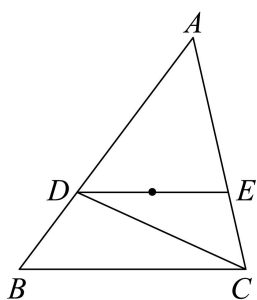
∴ 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x$.

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{12},$$

∴ 顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$.

【点睛】 本题考查二次函数的图象和性质, 利用待定系数法求出抛物线的表达式, 将二次函数一般式改为顶点式, 一次函数的性质. 熟练掌握二次函数的图象和性质是解题关键.

20. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 和 AC 上, $DE \parallel BC$, 且 DE 经过 $\triangle ABC$ 的重心 G .



(1) 设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DE} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 表示)

(2) 如果 $\angle ACD = \angle B$, $AB = 9$, 求边 AC 的长.

【答案】 (1) $\frac{2}{3}\vec{a}$

(2) $AC = 3\sqrt{6}$

【解析】

【分析】连接 AG 并延长交 BC 于点 F ，由 $\triangle ADG \sim \triangle ABF$ ， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 可得 $\frac{AG}{AF} = \frac{DE}{BC}$ ，由重心的性质可得 $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$ ，进而可求出 $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{a}$ ；

(2) 利用 (1) 求出 AD 的长，再根据 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ 即可求出 AC 的长.

【小问 1 详解】

连接 AG 并延长交 BC 于点 F .

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABF$, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AF}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AF} = \frac{DE}{BC}.$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

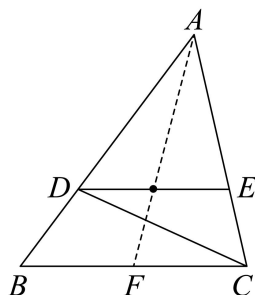
$$\therefore \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \vec{a},$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{a}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{a}$.



【小问 2 详解】

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}, \quad AB = 9,$$

$$\therefore AD = 6.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B, \quad \angle CAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

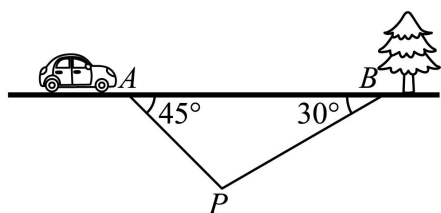
$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \frac{AC}{9} = \frac{6}{AC},$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{6}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，三角形重心的性质，以及向量的线性运算，综合运用各知识点是解答本题的关键.

21. 如图，某条道路上通行车辆限速为 60 千米/小时，在离道路 50 米的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区. 在 $\triangle ABP$ 中，已知 $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时，可认定为超速？（精确到 0.1 秒）（参考数据： $\sqrt{3} = 1.732$ ）

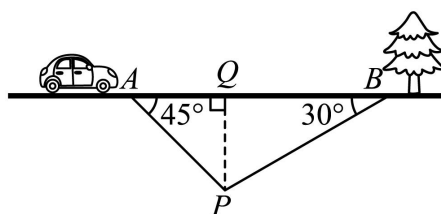


【答案】车辆通过 AB 段的时间在 8.2 秒以内时，可认定为超速.

【解析】

【分析】过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q ，由题意可得 $AQ = PQ = 50$ 米. 再根据正切的定义可求出 $BQ = \frac{PQ}{\tan \angle B} = 50\sqrt{3} \approx 86.6$ 米，进而可求出 $AB = AQ + BQ = 136.6$ 米. 最后由限定速度求出限定时间即可.

【详解】如图，过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q ,



$\because$ 点 P 距离道路 50 米,

$$\therefore PQ = 50 \text{ 米}.$$

$$\because \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore AQ = PQ = 50 \text{ 米}.$$

$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BQ = \frac{PQ}{\tan \angle B} = \frac{50}{\tan 30^\circ} = \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 50\sqrt{3} \approx 86.6 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = AQ + BQ = 50 + 86.6 = 136.6 \text{ 米.}$$

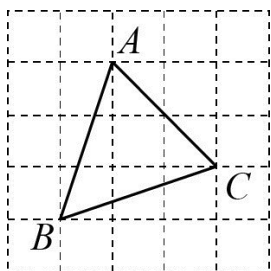
$$60 \text{ 千米/小时} = \frac{50}{3} \text{ 米/秒,}$$

$$136.6 \div \frac{50}{3} \approx 8.2 \text{ 秒.}$$

答: 车辆通过 AB 段的时间在 8.2 秒以内时, 可认定为超速.

【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用. 正确作出辅助线构造直角三角形是解题关键.

22. 新定义: 由边长为 1 的小正方形构成的网格图形中, 每个小正方形的顶点称为格点. 如图, 已知在 5×5 的网格图形中, $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 、 C 都在格点上. 请按要求完成下列问题:



(1) $S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\sin \angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 请仅用无刻度的直尺在线段 AB 上求作一点 P , 使 $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC}$. (不要求写作法, 但保留作图痕迹, 写出结论)

【答案】(1) 4, $\frac{4}{5}$

(2) 作图见解析

【解析】

【分析】(1) 由正方形面积减去三个小三角形面积即可求出 $S_{\triangle ABC}$; 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D . 根据勾股定理可求出 $AB = BC = \sqrt{10}$. 再根据三角形面积公式可求出 $AD = \frac{4\sqrt{10}}{5}$, 最后由正弦的定义求解即可;

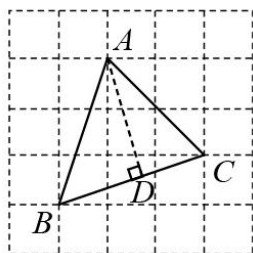
(2) 如图, 取格点 M 和 N , 连接 MN 交 AB 于点 P , 连接 AM 、 BN , 则 $AM \parallel BN$, 即可证 $\triangle AMP \sim \triangle BNP$, 得出 $\frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BN} = \frac{1}{4}$. 再根据 $\triangle ACP$ 和 $\triangle BCP$ 同高, 即得出 $S_{\triangle ACP} : S_{\triangle BCP} = \frac{1}{4}$, 进而得出 $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC}$, 即说明点 P 即为所作.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 9 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 2 \end{aligned}$$

$$= 4;$$

如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D .



由图可知 $AB = BC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AD \times \sqrt{10} = 4$$

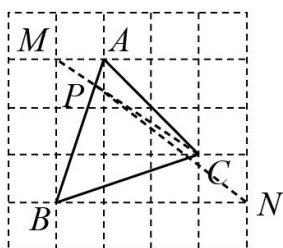
$$\therefore AD = \frac{4\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{4\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $4, \frac{4}{5}$;

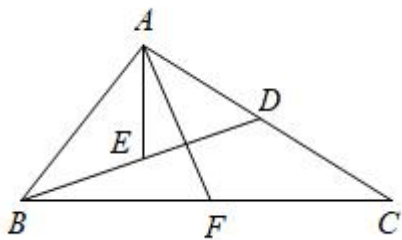
【小问 2 详解】

如图，点 P 即为所作.



【点睛】 本题考查利用网格求三角形的面积，求角的正弦值，三角形相似的判定和性质等知识. 利用数形结合的思想是解题关键.

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在边 AC, BD, BC 上, $AB^2 = AD \cdot AC$, $\angle BAE = \angle CAF$.



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$;

(2) 连接 EF , 如果 $BF = CF$, 求证: $EF \parallel AC$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由题意得 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, 再根据 $\angle BAD = \angle CAB$, 即证明 $\triangle BAD \sim \triangle CAB$, 得出 $\angle ABD = \angle ACB$, 从而又可证明 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$;

(2) 连接 EF . 由题意易得出 $\angle BAF = \angle DAE$, 由 $\triangle BAD \sim \triangle CAB$ 得出 $\angle ADE = \angle ABF$, 即可证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABF$, 得出 $\frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AF}$. 再根据 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$, 得出 $\frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF}$, 从而推出 $\frac{DE}{BF} = \frac{BE}{CF}$, 进而得出 $DE = BE$, 最后由三角形中位线定理即可证明 $EF \parallel AC$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB^2 = AD \cdot AC$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}.$$

又 $\because \angle BAD = \angle CAB$,

$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAB$,

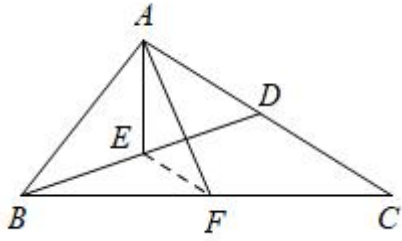
$\therefore \angle ABD = \angle ACB$.

$\because \angle BAE = \angle CAF$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF$.

【小问 2 详解】

如图, 连接 EF .



$$\therefore \angle BAE = \angle CAF,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle EAF = \angle CAF + \angle EAF, \text{ 即 } \angle BAF = \angle DAE.$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABC, \text{ 即 } \angle ADE = \angle ABF,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AF}.$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF,$$

$$\therefore \frac{BE}{CF} = \frac{AE}{AF},$$

$$\therefore \frac{DE}{BF} = \frac{BE}{CF}.$$

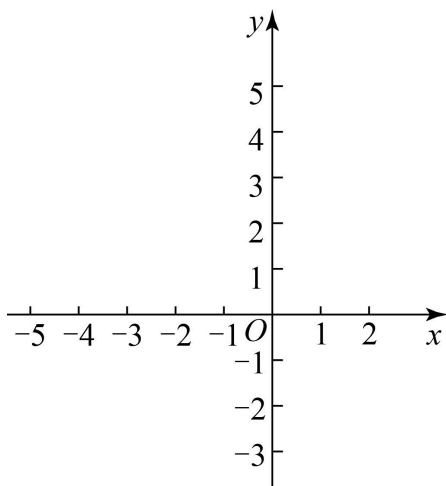
$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore DE = BE,$$

$$\therefore \text{由三角形中位线定理得出: } EF \parallel AC.$$

【点睛】 本题考查三角形相似的判定和性质，三角形中位线定理．熟练掌握三角形相似的判定定理及其性质是解题关键．

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D ．



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 是直线 AC 上方抛物线上一点, 过点 P 作 $PG \perp x$ 轴, 垂足为点 G , PG 与直线 AC 交于点 H . 如果 $PH = AH$, 求点 P 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 连接 AP , 试问点 B 关于直线 CD 对称的点 E 是否恰好落在直线 AP 上? 请说明理由.

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$

(2) $P\left(-\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$

(3) 点 B 关于直线 CD 对称的点 E 恰好落在直线 AP 上, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 直接利用待定系数法即可求解;

(2) 根据题意可求出直线 AC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$. 设点 P 的坐标为 $\left(t, -\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + 3\right) (-4 < t < 0)$,

则 $H\left(t, \frac{3}{4}t + 3\right) (-4 < t < 0)$, 进而可求出 $PH = y_P - y_H = -\frac{3}{4}t^2 - 3t$,

$AH = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \frac{5}{4}(t + 4)$. 最后由 $PH = AH$, 可列出关于 t 的等式, 解出 t 的值, 再舍去不合题意的值, 即可求出 P 点坐标;

(3) 连接 BE , 与直线 CD 交于点 F . 根据题意可得出 D 点和 B 点坐标, 进而可求出直线 CD 的解析式为 $y = 2x + 3$, 直线 AP 的解析式为 $y = 2x + 8$. 设点 E 的坐标为 (p, q) , 由轴对称的性质可得出

$F\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}\right)$. 再根据点 F 在直线 CD 上, 即可求出 $q = 2p + 8$, 即得出 $E(p, 2p + 8)$, 最后即可确定点 E

是否恰好落在直线 AP 上.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$,

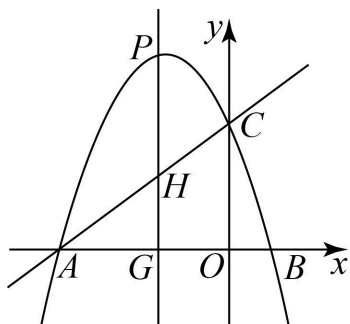
$$\therefore \begin{cases} 0 = -\frac{3}{4} \times (-4)^2 + b \times (-4) + c \\ 3 = c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{9}{4} \\ c = 3 \end{cases}$$

∴ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$;

【小问 2 详解】

如图,



设直线 AC 的解析式为 $y = kx + a$,

$$\text{则} \begin{cases} 0 = -4k + a \\ 3 = a \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ a = 3 \end{cases}$$

∴ 直线 AC 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$.

∵ 点 P 是直线 AC 上方抛物线上一点,

∴ 设点 P 的坐标为 $\left(t, -\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + 3\right) (-4 < t < 0)$, 则 $H\left(t, \frac{3}{4}t + 3\right) (-4 < t < 0)$,

$$\therefore PH = y_P - y_H = \left(-\frac{3}{4}t^2 - \frac{9}{4}t + 3\right) - \left(\frac{3}{4}t + 3\right) = -\frac{3}{4}t^2 - 3t,$$

$$AH = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{(-4 - t)^2 + \left(0 - \frac{3}{4}t - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}(t + 4)^2} = \frac{5}{4}(t + 4).$$

$$\therefore PH = AH,$$

$$\therefore -\frac{3}{4}t^2 - 3t = \frac{5}{4}(t + 4),$$

$$\text{解得: } t_1 = -4, \quad t_2 = -\frac{5}{3}.$$

$$\therefore -4 < t < 0,$$

$$\therefore t = -\frac{5}{3},$$

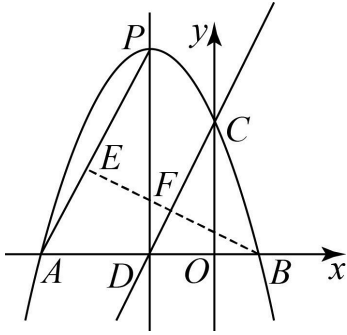
$$\therefore y_P = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 3 = \frac{14}{3},$$

$$\therefore P\left(-\frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right);$$

【小问3详解】

解：点 E 恰好落在直线 AP 上，理由如下：

如图，连接 BE ，与直线 CD 交于点 F 。



根据抛物线解析式可知其对称轴为直线 $x = -\frac{-\frac{9}{4}}{2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{2}$,

$$\therefore D\left(-\frac{3}{2}, 0\right), B(1, 0).$$

设直线 CD 的解析式为 $y = k'x + a'$,

$$\text{则} \begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}k' + a' \\ 3 = a' \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k' = 2 \\ a' = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = 2x + 3$.

设点 E 的坐标为 (p, q) ,

$\therefore$ 点 B 关于直线 CD 对称的点为点 E ,

$$\therefore F\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$\therefore$ 点 F 在直线 CD 上,

$$\therefore \frac{q}{2} = 2 \times \frac{p+1}{2} + 3,$$

$$\therefore q = 2p + 8,$$

$$\therefore E(p, 2p + 8).$$

设直线 AP 的解析式为 $y = k''x + a''$,

$$\text{则} \begin{cases} 0 = -4k'' + a'' \\ \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}k'' + a'' \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k'' = 2 \\ a'' = 8 \end{cases},$$

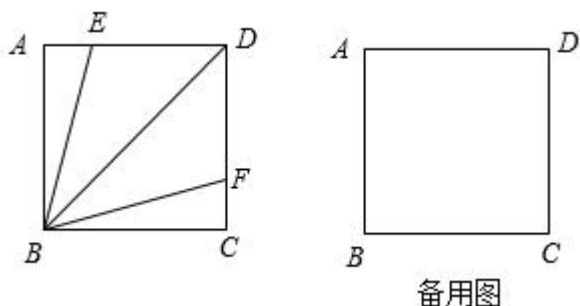
∴ 直线 AP 的解析式为 $y = 2x + 8$.

∴ 对于 $y = 2x + 8$, 当 $x = p$ 时, $y = 2p + 8$,

∴ 点 B 关于直线 CD 对称的点 E 恰好落在直线 AP 上.

【点睛】本题为二次函数综合题, 考查利用待定系数法求函数解析式, 二次函数的图象和性质, 一次函数的图象和性质, 两点的距离公式等知识, 为中考压轴题. 正确求出二次函数解析式是解题关键.

25. 已知在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 $BD = 4$, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 CD 上, $DE = DF$.



(1) 如图, 如果 $\angle EBF = 60^\circ$, 求线段 DE 的长

(2) 过点 E 作 $EG \perp BF$, 垂足为点 G , 与 BD 交于点 H .

①求证: $\frac{EH}{BE} = \frac{DH}{BD}$;

②设 BD 的中点为点 O , 如果 $OH = 1$, 求 $\frac{BG}{GF}$ 的值.

【答案】(1) $DE = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$;

(2) ①见解析, ② $\frac{BG}{GF} = \frac{7}{18}$ 或 $\frac{BG}{GF} = \frac{15}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 如图, 连接 EF 交 BD 于点 M . 易证 $\triangle BDE \cong \triangle BDF$ (SAS), 得 BD 垂直平分 EF , 可得 $DE = \sqrt{2}EM$, 由 $\angle EBF = 60^\circ$ 可得 $BE = 2EM$, 由勾股定理求出 $BM = \sqrt{3}EM$, 依据 $BM + DM = BD = 4$, 求解即可;

(2) ①如图 1, 过点 H 作 $NH \parallel AD$ 交 BE 于点 N , 延长 EG 交 BC 于点 M , 易证 $\triangle BAE \cong \triangle BCF$ (SAS), 可得 $\angle ABE = \angle CBF$, 易证 $\angle EBM = \angle BME$ 得到 $EM = BE$, 由 $NH \parallel AD$, 可证 $\triangle BHN \sim \triangle BDE$, $\triangle BME \sim \triangle NHE$, 即 $\frac{DH}{BD} = \frac{EN}{BE}$, $\frac{EN}{BE} = \frac{EH}{EM}$, 代入即可;

②过 F 作 $PF \perp BF$ 交 BD 于 P , 过 E 作 $EQ \perp BC$ 交 BD 于 I 、交 BC 于 Q , 连接 IF , 易证 $\triangle EIH \cong \triangle FDP$,

得到 $EH = FP$, 由 (1) 可知 BD 垂直平分 EF , 得 $EH = FH$, 如图, 当 H 在 OB 上时, $BH = 1$, 由①

可知, $\frac{EH}{BE} = \frac{DH}{BD} = \frac{3}{4}$, 设 $EH = 3x$, 则 $BE = BF = 4x$, $EH = FH = 3x$, 可得

$\tan \angle HBG = \frac{HG}{BG} = \frac{PF}{BF} = \frac{3}{4}$, 设 $HG = 3m$, $BG = 4m$, 由 $HG^2 + BG^2 = BH^2$, 解得 $m = \frac{1}{5}$, 在 $\text{Rt} \triangle HGF$

中, $HG^2 + GF^2 = HF^2$, 解得 $x = \frac{5}{7}$, 从而可求得 $\frac{BG}{GF} = \frac{7}{18}$; 如图, 当 H 在 OD 上时, $BH = 3$, 由①

可知, $\frac{EH}{BE} = \frac{DH}{BD} = \frac{1}{4}$, 设 $EH = y$, 则 $BE = BF = 4y$, $EH = FH = y$, $\tan \angle HBG = \frac{HG}{BG} = \frac{PF}{BF} = \frac{1}{4}$,

设 $HG = n$, $BG = 4n$, 由 $HG^2 + BG^2 = BH^2$, 解得 $n = \frac{3\sqrt{17}}{17}$, 在 $\text{Rt} \triangle HGF$ 中, $HG^2 + GF^2 = HF^2$,

解得 $y = \frac{17n}{15}$, 代入可得 $\frac{BG}{GF} = \frac{15}{2}$.

【小问 1 详解】

解: 如图, 连接 EF 交 BD 于点 M .

由题意可知 $\angle BDC = \angle BDA = 45^\circ$,

$\therefore$ 在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\begin{cases} DE = DF \\ \angle BDA = \angle BDC, \\ BD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDF (\text{SAS})$,

$\therefore \angle DBE = \angle DBF$, $BE = BF$,

$\because DE = DF$,

$\therefore BD$ 垂直平分 EF ,

$\therefore DM = EM = \frac{1}{2}EF = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{DE^2 + DE^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}DE$,

$\therefore DE = \sqrt{2}EM$,

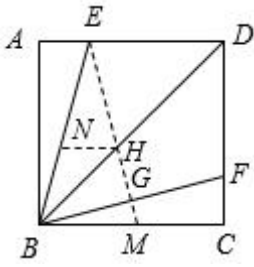
$\therefore \angle EBF = 60^\circ$,

$\therefore \angle DBE = \angle DBF = 30^\circ$,

$\therefore BE = 2EM$,

$\therefore BM = \sqrt{BE^2 - EM^2} = \sqrt{(2EM)^2 - EM^2} = \sqrt{3}EM$,

$\therefore BM + DM = BD = 4$,



②过 F 作 $PF \perp BF$ 交 BD 于 P , 过 E 作 $EQ \perp BC$ 交 BD 于 I 、交 BC 于 Q , 连接 IF ,

$\because EG \perp BF, PF \perp BF,$

$\therefore EG \parallel FP,$

$\therefore \angle EHP = \angle FPH,$

$\therefore \angle EHI = \angle FPD,$

在正方形 $ABCD$ 中 $DE = DF,$

易证 $EIFD$ 是正方形,

$\therefore \angle EIH = \angle FDP,$

$\therefore EI = FD,$

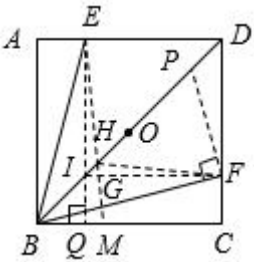
$\therefore \triangle EIH \cong \triangle FDP,$

$\therefore EH = FP,$

由 (1) 可知 BD 垂直平分 EF ,

$\therefore EH = FH,$

如图, 当 H 在 OB 上时,



$\because OH = 1$

$\therefore BH = 1,$

由①可知,

$$\therefore \frac{EH}{BE} = \frac{DH}{BD} = \frac{3}{4},$$

设 $EH = 3x$, 则 $BE = BF = 4x, EH = FH = 3x,$

$\because BD = 4,$

$$\because AB = 2\sqrt{2},$$

$$\because BE > AB,$$

$$\therefore 4x > 2\sqrt{2},$$

$$\therefore x > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle PFB$ 与 $\text{Rt}\triangle HGB$ 中,

$$\because \tan \angle HBG = \frac{HG}{BG} = \frac{PF}{BF} = \frac{3}{4},$$

设 $HG = 3m, BG = 4m,$

$$\because HG^2 + BG^2 = BH^2,$$

$$\therefore (3m)^2 + (4m)^2 = 1,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle HGF$ 中,

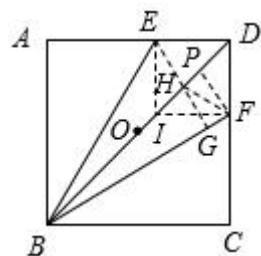
$$\because HG^2 + GF^2 = HF^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(4x - \frac{4}{5}\right)^2 = (3x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{7} \text{ 或 } x = \frac{1}{5} \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore \frac{BG}{GF} = \frac{\frac{4}{5}}{4x - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{4 \times \frac{5}{7} - \frac{4}{5}} = \frac{7}{18};$$

如图, 当 H 在 OD 上时,



$$\because OH = 1,$$

$$\therefore BH = 3,$$

由①可知,

$$\therefore \frac{EH}{BE} = \frac{DH}{BD} = \frac{1}{4},$$

设 $EH = y$, 则 $BE = BF = 4y$, $EH = FH = y$,

在 $\text{Rt}\triangle PFB$ 与 $\text{Rt}\triangle HGB$ 中,

$$\therefore \tan \angle HBG = \frac{HG}{BG} = \frac{PF}{BF} = \frac{1}{4},$$

设 $HG = n$, $BG = 4n$,

$$\therefore HF > HG,$$

$$\therefore y > n,$$

$$\therefore HG^2 + BG^2 = BH^2,$$

$$\therefore n^2 + (4n)^2 = 3^2,$$

$$\text{解得 } n = \frac{3\sqrt{17}}{17},$$

在 $\text{Rt}\triangle HGF$ 中,

$$\therefore HG^2 + GF^2 = HF^2,$$

$$\therefore n^2 + (4y - 4n)^2 = y^2,$$

$$\therefore 15y^2 - 32ny + 17n^2 = 0,$$

$$\therefore (15y - 17n)(y - n) = 0,$$

解得 $y = \frac{17n}{15}$ 或 $y = n$ (不合题意, 舍去),

$$\therefore \frac{BG}{GF} = \frac{4n}{4y - 4n} = \frac{4n}{4 \times \frac{17n}{15} - 4n} = \frac{1}{\frac{17}{15} - 1} = \frac{15}{2},$$

综上所述: $\frac{BG}{GF} = \frac{7}{18}$ 或 $\frac{BG}{GF} = \frac{15}{2}$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的证明和性质的应用, 相似三角形的判定和性质的应用、勾股定理和三角函数解直角三角形; 解题的关键是构建相似三角形, 运用相似的性质建立等量关系.

