

2023 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一、选择题（共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）.

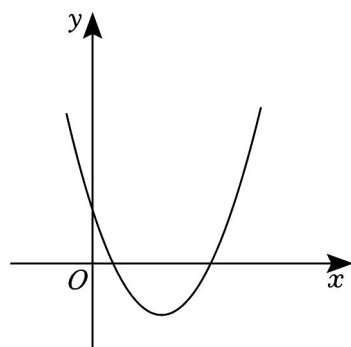
1.（4 分）下列函数图象中，与 y 轴交点的坐标是 $(0,1)$ 的是()

- A. $y = 2x$ B. $y = 2x - 1$ C. $y = 2x^2 + 1$ D. $y = 2(x+1)^2$

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan B = \frac{2}{3}$ ， $AC = 4$ ，那么 BC 的长是()

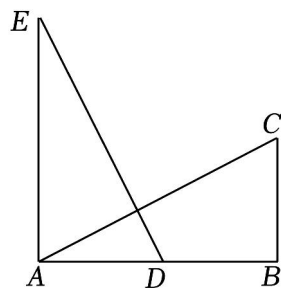
- A. 6 B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$.

3.（4 分）如果二次函数 $y = (x-m)^2 + k$ 的图象如图所示，那么下列说法中正确的是()



- A. $m > 0$ ， $k > 0$ B. $m > 0$ ， $k < 0$ C. $m < 0$ ， $k > 0$ D. $m < 0$ ， $k < 0$

4.（4 分）如图，已知 D 是 AB 的中点， $EA \perp AB$ ， $CB \perp AB$ ， $AE = AB = 2BC$ ，那么下列结论中错误的是()



- A. $ED = AC$ B. $\angle EDA = \angle C$ C. $ED \perp AC$ D. $\angle CAB = 30^\circ$

5.（4 分）已知 k 为实数， $\vec{a}$ 是非零向量，下列关于 $k\vec{a}$ 的说法中正确的是()

A. 如果 $k=0$, 那么 $k\vec{a}=0$

B. 如果 k 是正整数, 那么 $k\vec{a}$ 表示 k 个 $\vec{a}$ 相加

C. 如果 $k \neq 0$, 那么 $|k\vec{a}|=k|\vec{a}|$

D. 如果 $k \neq 0$, $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向一定相同

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, 已知 $AB=AC$, $DE=DF$, 如果从下列条件中增添一个条件, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 仍不一定相似, 那么这个条件是()

A. $\angle A = \angle D$

B. $\angle B = \angle E$

C. $\angle A = \angle E$

D. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $x+y=10$, 那么 $x-y=$ ____.

8. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象在第一、三象限, 如果 $x_1 < x_2 < 0$, 那么 y_1 ____ y_2 (填 “>”、“<” 或 “= ”)

9. (4分) 已知二次函数 $y = (a-1)x^2 + 3x - 1$ 的图象有最高点, 那么 a 的取值范围是 ____.

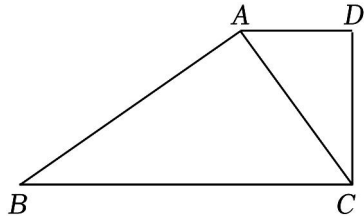
10. (4分) 已知抛物线 $y = mx^2 - (m+2)x$ 的对称轴是直线 $x=1$, 那么 m 的值等于 ____.

11. (4分) 已知点 $A(1, a)$ 在抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 上, 将此抛物线沿着 y 轴向上平移 3 个单位, 点 A 随之平移到点 A' 的位置, 那么点 A' 的坐标是 ____.

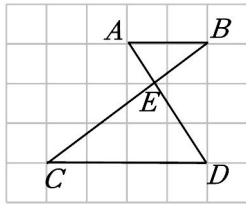
12. (4分) 已知 C 是线段 AB 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 那么 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ____ . (用向量 $\vec{a}$ 表示)

13. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=5$, $BC=12$, $AB=13$, 那么 $\sin B =$ ____.

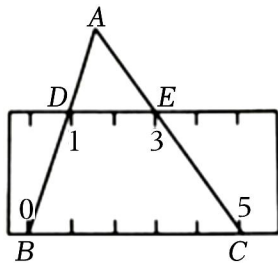
14. (4分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$, 如果 $AD=2$, $BC=5$, 那么 $AC =$ ____.



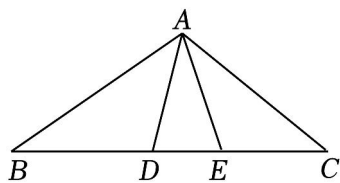
15. (4分) 如图, 方格纸上各小正方形的边长都为1, 点 A 、 B 、 C 、 D 都在小正方形顶点的位置上, AD 与 BC 交于点 E , 那么 BE 的长是 ____.



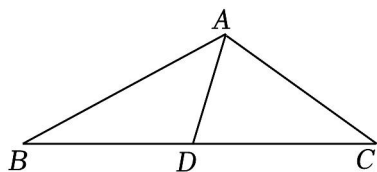
16. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中的一边 BC 与两边平行且单位相同的刻度尺的一边重合, 边 AB 、 AC 分别与刻度尺的另一边交于点 D 、 E , 点 B 、 C 、 D 、 E 在刻度尺上的读数分别为0、5、1、3, 如果刻度尺的宽度为3, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是 ____.



17. (4分) 如图, 点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, $\angle BAD = \angle C$, $\angle B = \angle EAC$, 如果 $BD = 4$, $EC = 3$, 那么 $\frac{AB}{AC}$ 的值是 ____.



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为边 BC 上的中线, $BC = 2AC$, $BC = 6$, $AD = 2$. 将 $\triangle ADC$ 绕点 D 以逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$, 点 A' 、 C' 分别与点 A 、 C 对应. 联结 BC' , BC' 与线段 AD 交于点 G . 如果点 A' 、 A 、 C' 在同一条直线上, 那么 $C'G =$ ____.



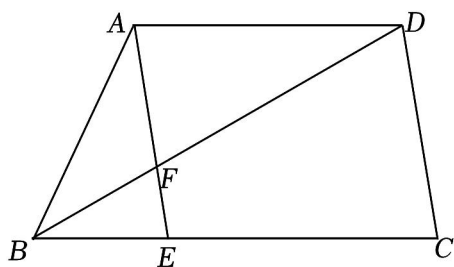
三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{2\sin 60^\circ}{2\sin 45^\circ + \tan 45^\circ} - 4\cot 30^\circ \cdot \cos^2 30^\circ$.

20.（10 分）如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是 BC 上一点， $AE \parallel CD$ ， AE 、 BD 相交于点 F ， $EF:CD=1:3$.

（1）求 $\frac{BE}{AD}$ 的值；

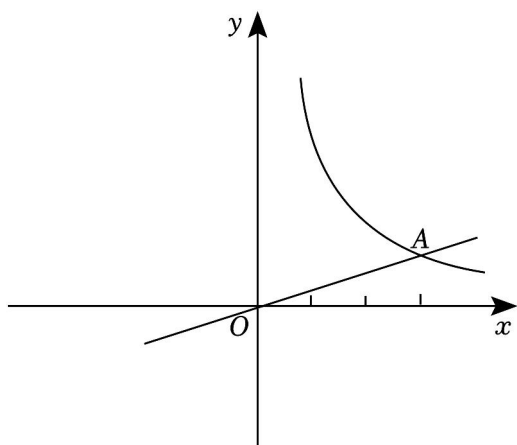
（2）联结 FC ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{FC} = \underline{\hspace{2cm}}$.（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）



21.（10 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(3, a)$.

（1）求这个正比例函数的解析式；

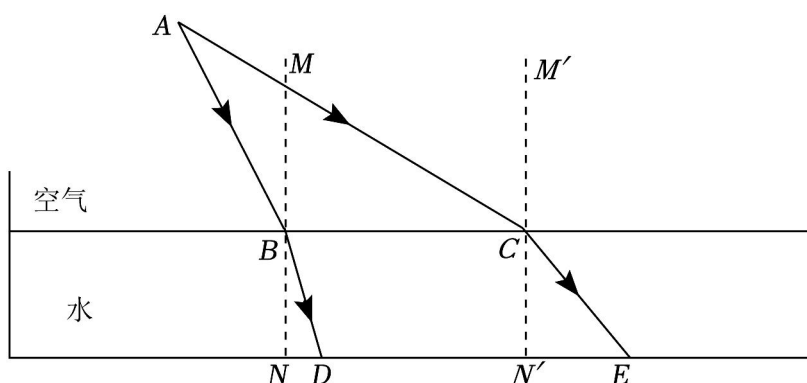
（2）将这个正比例函数的图象向上平移 $m (m > 0)$ 个单位，新函数的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 B ，如果点 B 的纵坐标是横坐标的 3 倍，求 m 的值.



22. (10 分) 如图, 光从空气斜射入水中, 入射光线 AB 射到水池的水面 B 点后折射光线 BD 射到池底点 D 处, 入射角 $\angle ABM = 30^\circ$, 折射角 $\angle DBN = 22^\circ$; 入射光线 AC 射到水池的水面 C 点后折射光线 CE 射到池底点 E 处, 入射角 $\angle ACM' = 60^\circ$, 折射角 $\angle ECN' = 40.5^\circ$. $DE \parallel BC$, MN 、 $M'N'$ 为法线. 入射光线 AB 、 AC 和折射光线 BD 、 CE 及法线 MN 、 $M'N'$ 都在同一平面内, 点 A 到直线 BC 的距离为 6 米.

(1) 求 BC 的长; (结果保留根号)

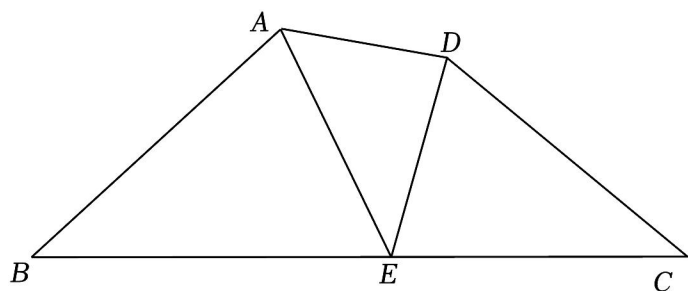
(2) 如果 $DE = 8.72$ 米, 求水池的深. (参考数据: $\sqrt{2}$ 取 1.41, $\sqrt{3}$ 取 1.73, $\sin 22^\circ$ 取 0.37, $\cos 22^\circ$ 取 0.93, $\tan 22^\circ$ 取 0.4, $\sin 40.5^\circ$ 取 0.65, $\cos 40.5^\circ$ 取 0.76, $\tan 40.5^\circ$ 取 0.85)



23. (12 分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 上一点, $AB \cdot DE = AE \cdot EC$, $\angle ABE = \angle AED$.

(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ECD$;

(2) 如果 F 、 G 、 H 分别是 AE 、 DE 、 AD 的中点, 联结 BF 、 HF 、 HG 、 CG . 求证:
 $BF \cdot HF = CG \cdot HG$.

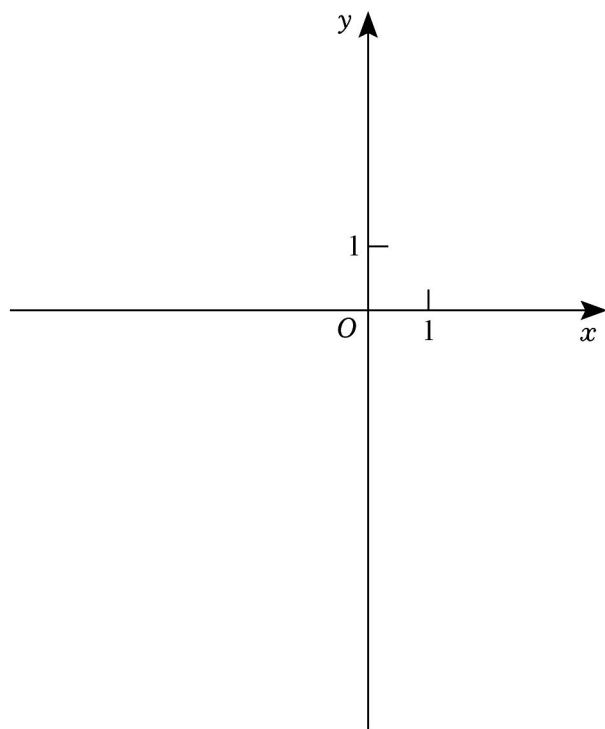


24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 其中点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$. 抛物线的顶点为 D .

(1) 求抛物线的表达式, 并写出点 D 的坐标;

(2) 抛物线的对称轴上有一点 M , 且点 M 在第二象限, 如果点 M 到 x 轴的距离与它到直线 BD 的距离相等, 求点 M 的坐标;

(3) 抛物线上有一点 N , 直线 ON 恰好经过 $\triangle OBD$ 的重心, 求点 N 到 x 轴的距离.



25. (14 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $\tan \angle ABD = \frac{3}{4}$, E 是边 DC 上一动点, F 是线段 DE

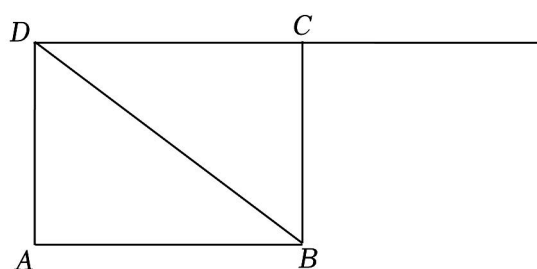
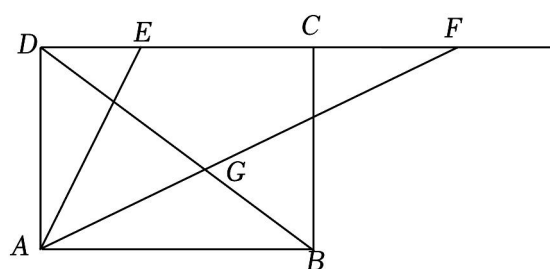
延长线上一点，且 $\angle EAF = \angle ABD$ ， AF 与矩形对角线 BD 交于点 G 。

(1) 当点 F 与点 C 重合时，如果 $AD = 6$ ，求 DE 的长；

(2) 当点 F 在线段 DC 的延长线上，

①求 $\frac{AG}{AE}$ 的值；

②如果 $DE = 3CF$ ，求 $\angle AED$ 的余切值。



备用图

参考答案

一、选择题（共6题，每题4分，满分24分）.

1.（4分）下列函数图象中，与 y 轴交点的坐标是 $(0,1)$ 的是()

- A. $y = 2x$ B. $y = 2x - 1$ C. $y = 2x^2 + 1$ D. $y = 2(x+1)^2$

【分析】把 $(0,1)$ 代入解析式，解答即可.

解：A. 当 $x=0$ 时， $y=2 \times 0 = 0 \neq 1$ ，不符合题意；

B. 当 $x=0$ 时， $y=2 \times 0 - 1 = -1 \neq 1$ ，不符合题意；

C. 当 $x=0$ 时， $y=2 \times 0 + 1 = 1$ ，符合题意；

D. 当 $x=0$ 时， $y=2 \times (0+1)^2 = 2 \neq 1$ ，不符合题意；

故选：C.

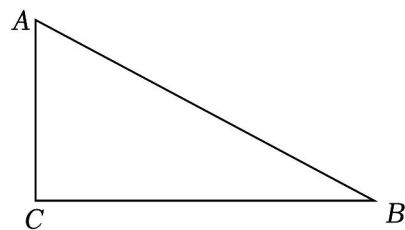
【点评】本题考查的是二次函数图象上点的坐标特征，二次函数图象上的点都在该函数的图象上.

2.（4分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan B = \frac{2}{3}$ ， $AC = 4$ ，那么 BC 的长是()

- A. 6 B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}$.

【分析】根据三角函数中正切值的定义解决此题.

解：如图.



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\tan B = \frac{2}{3}$, $AC = 4$,

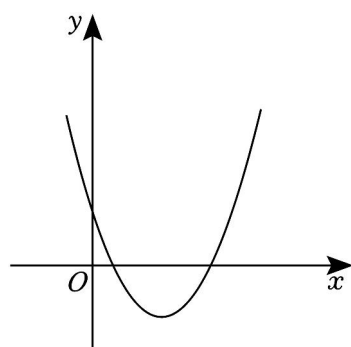
$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore BC = 6.$$

故选: A .

【点评】本题主要考查正切值, 熟练掌握正切值的定义是解决本题的关键.

3. (4分) 如果二次函数 $y = (x - m)^2 + k$ 的图象如图所示, 那么下列说法中正确的是 ()



- A. $m > 0$, $k > 0$ B. $m > 0$, $k < 0$ C. $m < 0$, $k > 0$ D. $m < 0$, $k < 0$

【分析】根据解析式知, m , k 是抛物线的顶点坐标, 再根据函数图象得出结论.

$$\text{解: } \because y = (x - m)^2 + k,$$

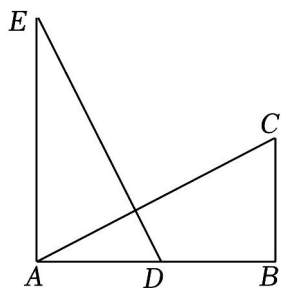
顶点坐标为 (m, k) ,

由图象可得, $m > 0$, $k < 0$,

故选: B .

【点评】本题考查了二次函数图象和系数的关系, 解题的关键是能根据图象找出二次函数的顶点存在的特点、性质.

4. (4分) 如图, 已知 D 是 AB 的中点, $EA \perp AB$, $CB \perp AB$, $AE = AB = 2BC$, 那么下列结论中错误的是 ()



- A. $ED = AC$ B. $\angle EDA = \angle C$ C. $ED \perp AC$ D. $\angle CAB = 30^\circ$

【分析】用 SAS 证明 $\triangle EAD \cong \triangle ABC$ ，得 $\angle ADE = \angle C$ ，可证 $\angle AFD = 90^\circ$ ，从而说明 A 、 B 、 C 正确．

解：设 AC 交 DE 于点 F ．

$\because$ 点 D 是 AB 的中点，

$$\therefore AD = DB,$$

$$\because AE = AB = 2BC,$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because EA \perp AB, \quad CB \perp AB,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle B = 90^\circ,$$

在 $\triangle EAD$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} AE = BA \\ \angle EAD = \angle B = 90^\circ, \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAD \cong \triangle ABC (SAS),$$

$$\therefore ED = AC, \quad \angle ADE = \angle C,$$

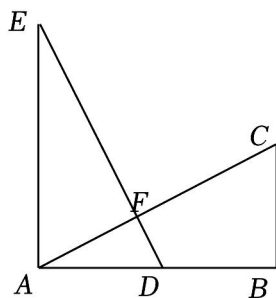
$$\because \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp DE,$$

故选项 A ， B ， C 正确．

故选： D ．



【点评】本题主要考查了全等三角形的判定与性质，含 30° 角的直角三角形的性质等知识，证明 $\triangle DAE \cong \triangle ABC$ 是解题的关键．

5. (4 分) 已知 k 为实数， $\vec{a}$ 是非零向量，下列关于 $k\vec{a}$ 的说法中正确的是()

- A. 如果 $k = 0$ ，那么 $k\vec{a} = 0$
- B. 如果 k 是正整数，那么 $k\vec{a}$ 表示 k 个 $\vec{a}$ 相加
- C. 如果 $k \neq 0$ ，那么 $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$
- D. 如果 $k \neq 0$ ， $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向一定相同

【分析】若 $k = 0$ ，则 $k\vec{a} = \vec{0}$ ；当 $k < 0$ 时， $|k\vec{a}| = -k|\vec{a}|$ ；当 $k < 0$ 时， $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，由此可得答案．

解：A. 若 $k = 0$ ，则 $k\vec{a} = \vec{0}$ ，

故 A 选项错误，不符合题意；

B. 若 k 是正整数，则 $k\vec{a}$ 表示 k 个 $\vec{a}$ 相加，

故 B 选项正确，符合题意；

C. 当 $k < 0$ 时， $|k\vec{a}| = -k|\vec{a}|$ ，

故 C 选项错误，不符合题意；

D. 当 $k < 0$ 时， $k\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，

故 D 选项错误，不符合题意.

故选：B.

【点评】本题考查平面向量，熟练掌握平面向量的性质是解答本题的关键.

6. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，已知 $AB = AC$ ， $DE = DF$ ，如果从下列条件中增添一个条件， $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 仍不一定相似，那么这个条件是()

- A. $\angle A = \angle D$ B. $\angle B = \angle E$ C. $\angle A = \angle E$ D. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

【分析】利用等腰三角形的性质以及相似三角形的判定解决问题即可.

解：A、由 $\angle A = \angle D$ ，可以根据两边成比例夹角相等，推出两三角形相似. 本选项不符合题意；

B、由 $\angle B = \angle E$ ，可以推出 $\angle A = \angle D$ 根据两边成比例夹角相等，推出两三角形相似. 本选项不符合题意；

C、由 $\angle A = \angle E$ ，不能判定两三角形相似. 本选项符合题意；

D、由 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ，可以推出 $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ ，根据三边成比例两三角形相似，本选项不符合题意.

故选：C.

【点评】本题考查相似三角形的判定，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是掌握相似三角形的判定方法，属于中考常考题型.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ， $x + y = 10$ ，那么 $x - y = \underline{2}$.

【分析】直接利用已知代入求出 y 的值，即可得出 x 的值，进而得出答案.

解： $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, x + y = 10,$

$\therefore x = \frac{3}{2}y, \text{ 则 } \frac{3}{2}y + y = 10,$

解得： $y = 4,$

故 $x = 6,$

那么 $x - y = 6 - 4 = 2.$

故答案为： 2.

【点评】 此题主要考查了比例的性质，正确将已知代入是解题关键.

8. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象在第一、三象限，如果 $x_1 < x_2 < 0$ ，那么 y_1 y_2 (填 “>”、“<” 或 “=”)

【分析】 先根据反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象在第一、三象限可知 $k > 0$ ，故在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，据此可得出结论.

解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象在第一、三象限，

$\therefore k > 0$ ，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小.

$\because x_1 < x_2 < 0,$

$\therefore y_1 > y_2.$

故答案为： > .

【点评】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，先根据题意判断出函数的增减性是解题的关键.

9. (4 分) 已知二次函数 $y = (a - 1)x^2 + 3x - 1$ 的图象有最高点，那么 a 的取值范围是 $a < 1$.

【分析】根据二次函数的图象与性质即可求出答案.

解：由题意可知： $a-1<0$,

$$\therefore a < 1,$$

故答案为： $a < 1$.

【点评】本题考查二次函数图象与系数关系,解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质,本题属于中等题型.

10. (4分) 已知抛物线 $y = mx^2 - (m+2)x$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么 m 的值等于 2.

【分析】由对称轴公式可得到关于 m 的方程, 可求得答案.

解： $\because y = mx^2 - (m+2)x$ 的对称轴是直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{-(m+2)}{2m} = 1,$$

解得： $m = 2$.

故答案为：2.

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的对称轴公式是解题的关键, 即

$$y = ax^2 + bx + c \text{ 的对称轴为 } x = -\frac{b}{2a}.$$

11. (4分) 已知点 $A(1, a)$ 在抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 上, 将此抛物线沿着 y 轴向上平移 3 个单位, 点 A 随之平移到点 A' 的位置, 那么点 A' 的坐标是 (1, 2).

【分析】确定平移后得顶点坐标, 再根据顶点式写出最后抛物线的解析式, 进而解答即可.

解：抛物线 $y = -2x^2 + 1$ 上, 将此抛物线沿着 y 轴向上平移 3 个单位, 得到的抛物线是

$$y = -2x^2 + 1 + 3, \text{ 即 } y = -2x^2 + 4,$$

把 $x = 1$, $y = a$ 代入 $y = -2x^2 + 1$ 中, 可得： $-2 + 1 = a$,

解得： $a = -1$ ，

$\therefore$ 点 A' 的坐标是 $(1, 2)$ ，

故答案为： $(1, 2)$ 。

【点评】 本题考查了二次函数的图象与几何变换，关键是根据平移的规律解答。

12. (4分) 已知 C 是线段 AB 的中点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ 。(用向量 $\vec{a}$ 表示)

【分析】 由题意得 $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$ ，则 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + (-\frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a}$ 。

解： $\because C$ 是线段 AB 的中点， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a}，$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + (-\frac{1}{2}\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a}。$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{a}$ 。

【点评】 本题考查平面向量，熟练掌握平面向量的加法运算是解答本题的关键。

13. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 5$ ， $BC = 12$ ， $AB = 13$ ，那么 $\sin B = \frac{5}{13}$ 。

【分析】 首先根据题意得出 $\triangle ABC$ 为直角三角形，再画出图形，其中 $AC = 5$ ， $BC = 12$ ， $AB = 13$ ；然后根据 $\sin B = \frac{AC}{AB}$ 计算即可。

解： $\because AC = 5$ ， $BC = 12$ ， $AB = 13$ ，

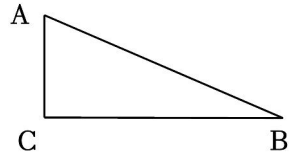
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2，$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，

如图所示：

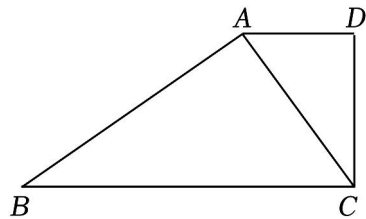
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = 5$ ， $BC = 12$ ， $AB = 13$ ，

$$\text{则 } \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}.$$



【点评】本题考解直角三角形，牢记锐角三角函数的定义是解题关键．

14. (4 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAC = \angle ADC$ ，如果 $AD = 2$ ， $BC = 5$ ，那么 $AC = \underline{\quad\sqrt{10}\quad}$ ．



【分析】先根据平行线的性质得到 $\angle DAC = \angle ACB$ ，加上 $\angle BAC = \angle ADC$ ，则利用相似三角形的判定方法可判断 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ ，然后利用相似比可求出 AC 的长．

解： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB，$$

$$\because \angle BAC = \angle ADC，$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCA，$$

$$\therefore AC : AD = BC : AC，$$

$$\text{即 } AC : 2 = 5 : AC，$$

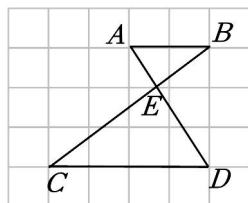
$$\text{解得 } AC = \sqrt{10}，$$

$$\text{即 } AC \text{ 的长为 } \sqrt{10}．$$

故答案为： $\sqrt{10}$.

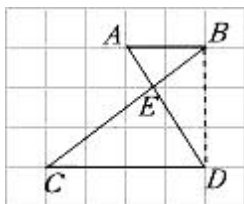
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用．在应用相似三角形的性质时利用相似比进行几何计算．

15. (4分) 如图，方格纸上各小正方形的边长都为1，点 A 、 B 、 C 、 D 都在小正方形顶点的位置上， AD 与 BC 交于点 E ，那么 BE 的长是 2.5 .



【分析】 先根据勾股定理，得 $BC = 5$ ，再根据比例线段求出 BE .

解：连接 BD ，



根据勾股定理，得 $BC = \sqrt{DC^2 + BD^2} = 5$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{EC}，$$

$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{BE}{5}，$$

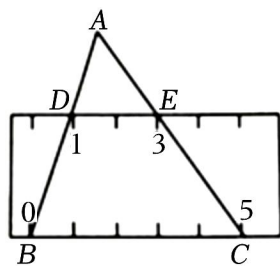
解得： $BE = 2.5$ ，

故答案为： 2.5 .

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、勾股定理，掌握两个知识点的应用，推出比

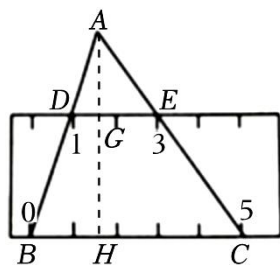
例线段是解题关键.

16. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中的一边 BC 与两边平行且单位相同的刻度尺的一边重合, 边 AB 、 AC 分别与刻度尺的另一边交于点 D 、 E , 点 B 、 C 、 D 、 E 在刻度尺上的读数分别为 0、5、1、3, 如果刻度尺的宽度为 3, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是 $-\frac{25}{2}-$.



【分析】过点 A 作 $AF \perp DE$, 垂足为 G , 并延长 AG 交 BC 于点 H , 根据题意得: $DE = 2$, $BC = 5$, $GH = 3$, $DE \parallel BC$, 从而可得 $\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACB$, 然后证明 A 字型模型相似三角形 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 从而利用相似三角形的性质求出 AH 的长, 最后利用三角形的面积公式进行计算, 即可解答.

解: 过点 A 作 $AF \perp DE$, 垂足为 G , 并延长 AG 交 BC 于点 H ,



由题意得: $DE = 2$, $BC = 5$, $GH = 3$, $DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC, \quad \angle AED = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AH},$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{AH - 3}{AH},$$

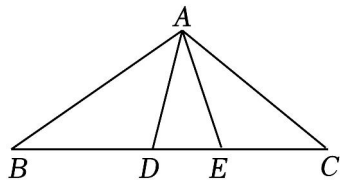
解得： $AH = 5$ ，

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2},$$

故答案为： $\frac{25}{2}$.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，三角形的面积，平行线的性质，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

17. (4分) 如图，点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， $\angle BAD = \angle C$ ， $\angle B = \angle EAC$ ，如果 $BD = 4$ ， $EC = 3$ ，那么 $\frac{AB}{AC}$ 的值是 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}-$.



【分析】 由 $\angle BAD = \angle C$ ， $\angle B = \angle B$ ，得 $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ ，有 $AB^2 = BC \cdot BD$ ，同理可得 $AC^2 = BC \cdot CE$ ，故 $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC \cdot BD}{BC \cdot CE} = \frac{BD}{CE} = \frac{4}{3}$ ，即可得答案.

解： $\because \angle BAD = \angle C$ ， $\angle B = \angle B$ ，

$\therefore \triangle BAD \sim \triangle BCA$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

$$\therefore AB^2 = BC \cdot BD,$$

$\because \angle B = \angle EAC$ ， $\angle C = \angle C$ ，

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle BCA$ ，

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = BC \cdot CE,$$

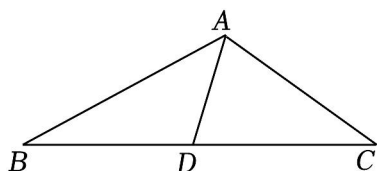
$$\therefore \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC \cdot BD}{BC \cdot CE} = \frac{BD}{CE} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点评】 本题考查相似三角形的判定与性质，解题的关键是掌握相似三角形的判定定理.

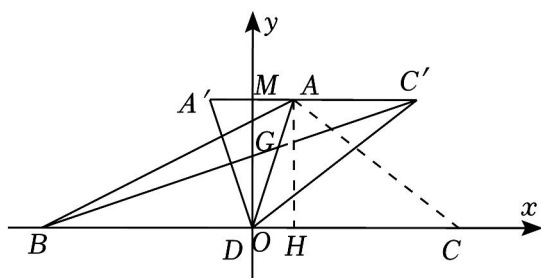
18. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 为边 BC 上的中线， $BC = 2AC$ ， $BC = 6$ ， $AD = 2$. 将 $\triangle ADC$ 绕点 D 以逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$ ，点 A' 、 C' 分别与点 A 、 C 对应. 联结 BC' ， BC' 与线段 AD 交于点 G . 如果点 A' 、 A 、 C' 在同一条直线上，那么 $C'G = \frac{10\sqrt{2}}{7}$.



【分析】以 D 为原点， DC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，过 A 作 $AH \perp DC$ 于 H ，设 $A'C'$ 交 y 轴于 M ，由 AD 为边 BC 上的中线， $BC = 2AC$ ， $BC = 6$ ，可得 $BD = CD = AC = 3$ ， $B(-3, 0)$ ，设 $DH = m$ ，由 $AD^2 - DH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2$ ，可得 $m = \frac{2}{3}$ ，故 $DH = \frac{2}{3}$ ， $AH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ， $A(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ，直线 DA 解析式为 $y = 2\sqrt{2}x$ ，根据将 $\triangle ADC$ 绕点 D 以逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$ ，可证 $A'C' \parallel DC$ ，得四边形 $AMDH$ 是矩形，从而求得 $C'(\frac{7}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$ ，

直线 BC' 解析式为 $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，联立 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y = 2\sqrt{2}x \end{cases}$ 得 $G(\frac{3}{7}, \frac{6\sqrt{2}}{7})$ ，即可得到答案.

解：以 D 为原点， DC 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，过 A 作 $AH \perp DC$ 于 H ，设 $A'C'$ 交 y 轴于 M ，如图：



$\because AD$ 为边 BC 上的中线, $BC = 2AC$, $BC = 6$,

$$\therefore BD = CD = AC = 3,$$

$$\therefore B(-3, 0),$$

设 $DH = m$, 则 $CH = 3 - m$,

$$\because AD^2 - DH^2 = AH^2 = AC^2 - CH^2,$$

$$\therefore 2^2 - m^2 = 3^2 - (3 - m)^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DH = \frac{2}{3}, \quad AH = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore A\left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right),$$

由 $D(0, 0)$, $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ 得直线 DA 解析式为 $y = 2\sqrt{2}x$,

$\because$ 将 $\triangle ADC$ 绕点 D 以逆时针方向旋转得到 $\triangle A'DC'$,

$$\therefore AD = A'D, \quad \angle CAD = \angle C'A'D,$$

$$\therefore \angle AA'D = \angle A'AD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle A'AD,$$

$$\because AC = CD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle A'AD = \angle ADC,$$

$$\therefore A'C' \parallel DC,$$

$\therefore$ 四边形 $AMDH$ 是矩形,

$$\therefore AM = DH = \frac{2}{3}, \quad DM = AH = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore AD = A'D,$$

$$\therefore A'M = AM = \frac{2}{3},$$

$$\therefore C'M = A'C' - A'M = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\therefore C'(\frac{7}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}),$$

$$\text{由 } B(-3, 0), C'(\frac{7}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}) \text{ 得直线 } BC' \text{ 解析式为 } y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y = 2\sqrt{2}x \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{6\sqrt{2}}{7} \end{cases},$$

$$\therefore G(\frac{3}{7}, \frac{6\sqrt{2}}{7}),$$

$$\therefore C'G = \sqrt{(\frac{7}{3} - \frac{3}{7})^2 + (\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{6\sqrt{2}}{7})^2} = \frac{10\sqrt{2}}{7},$$

$$\text{故答案为: } \frac{10\sqrt{2}}{7}.$$

【点评】本题考查三角形中的旋转问题，解题的关键是建立直角坐标系，求出相关点的坐标．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. (10 \text{ 分}) \text{ 计算: } \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \sin 45^\circ + \tan 45^\circ} - 4 \cot 30^\circ \cdot \cos^2 30^\circ.$$

【分析】把特殊角的三角函数值代入计算即可．

$$\text{解: 原式} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} - 4\sqrt{3} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} - 3\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

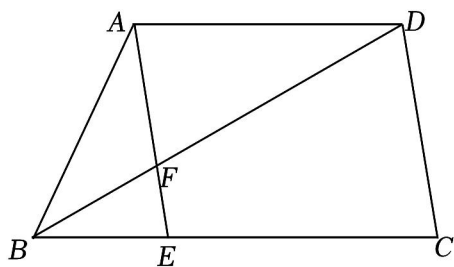
$$= \sqrt{6} - 4\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键．

20. (10 分) 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是 BC 上一点， $AE \parallel CD$ ， AE 、 BD 相交于点 F ， $EF:CD=1:3$ ．

(1) 求 $\frac{BE}{AD}$ 的值；

(2) 联结 FC ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{FE} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BF} = \underline{2\vec{b} - \vec{a}}$ ， $\overrightarrow{FC} = \underline{\quad}$ ．(用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【分析】(1) 根据题意可证明四边形 $AECD$ 为平行四边形，得到 $AE = CD$ ，则 $EF:AE=1:3$ ， $EF:AF=1:2$ ，易证明 $\triangle BEF \sim \triangle DAF$ ，由相似三角形的性质即可求解；

(2) 由 $AF = 2EF$ 得 $\overrightarrow{AF} = 2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{AE} = 3\vec{b}$ ，由三角形法则求出 $\overrightarrow{BF}$ 和 $\overrightarrow{BE}$ ，再求出 $\overrightarrow{BC}$ ，最后利用三角形法则即可求出 $\overrightarrow{FC}$ ．

解：∵ $AD \parallel BC$ ， $AE \parallel CD$ ，

∴ 四边形 $AECD$ 为平行四边形，

∴ $AE = CD$ ，

∵ $EF:CD=1:3$ ，

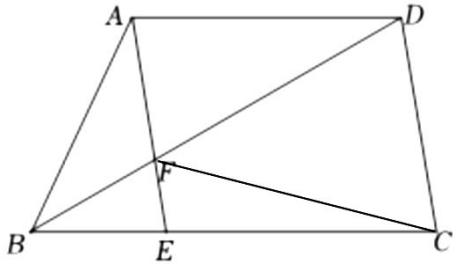
∴ $EF:AE=1:3$ ， $EF:AF=1:2$ ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{EF}{AF} = \frac{1}{2};$$

(2) 联结 FC ，如图，



由 (1) 可得 $AF = 2EF$ ，

$$\because \overrightarrow{FE} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = 2\vec{b}, \quad \overrightarrow{AE} = 3\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{1}{2}, \quad AD = EC,$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = 2(3\vec{b} - \vec{a}) = 6\vec{b} - 2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} = 3\vec{b} - \vec{a} + 6\vec{b} - 2\vec{a} = 9\vec{b} - 3\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BF} = 9\vec{b} - 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{a} = 7\vec{b} - 2\vec{a}.$$

故答案为: $2\vec{b} - \vec{a}$, $7\vec{b} - 2\vec{a}$.

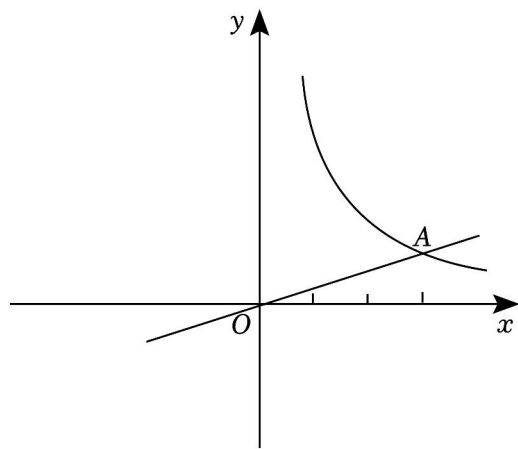
【点评】 本题主要考查平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、平面向量，熟

练三角形法则是解题关键.

21. (10 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(3, a)$.

(1) 求这个正比例函数的解析式;

(2) 将这个正比例函数的图象向上平移 $m (m > 0)$ 个单位, 新函数的图象与反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 B , 如果点 B 的纵坐标是横坐标的 3 倍, 求 m 的值.



【分析】(1) 将点 $A(3, a)$ 代入反比例函数 $y = \frac{3}{x}$, 求出 a 的值, 再待定系数法求正比例函数解析式即可;

(2) 设点 B 横坐标为 t , 则纵坐标为 $\frac{3}{t}$, 根据点 B 的纵坐标是横坐标的 3 倍, 列方程求出 t 的值, 即可确定点 B 坐标, 再将点 B 坐标代入 $y = \frac{1}{3}x + m$, 即可求出 m 的值.

解: (1) 根据题意, 将点 $A(3, a)$ 代入反比例函数 $y = \frac{3}{x}$,

得 $3a = 3$,

解得 $a = 1$,

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(3, 1)$,

将点 $A(3, 1)$ 代入正比例函数 $y = kx$,

得 $3k=1$,

解得 $k=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 正比例函数解析式为 $y=\frac{1}{3}x$;

(2) 这个正比例函数的图象向上平移 $m(m>0)$ 个单位, 得 $y=\frac{1}{3}x+m$,

设点 B 横坐标为 t , 则纵坐标为 $\frac{3}{t}$,

$\because$ 点 B 的纵坐标是横坐标的 3 倍,

$\therefore \frac{3}{t}=3t$,

解得 $t=1$ 或 $t=-1$ (舍),

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(1,3)$,

将点 B 坐标代入 $y=\frac{1}{3}x+m$,

得 $3=\frac{1}{3}+m$,

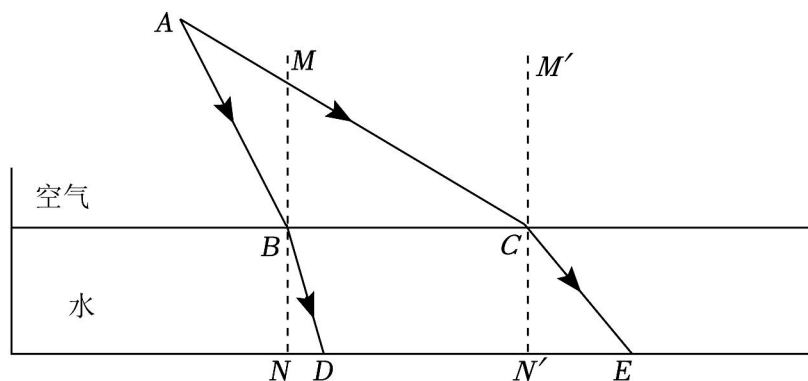
解得 $m=\frac{8}{3}$.

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 待定系数法求解析式, 一次函数的图象与几何变换, 熟练掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

22. (10 分) 如图, 光从空气斜射入水中, 入射光线 AB 射到水池的水面 B 点后折射光线 BD 射到池底点 D 处, 入射角 $\angle ABM=30^\circ$, 折射角 $\angle DBN=22^\circ$; 入射光线 AC 射到水池的水面 C 点后折射光线 CE 射到池底点 E 处, 入射角 $\angle ACM'=60^\circ$, 折射角 $\angle ECN'=40.5^\circ$. $DE \parallel BC$, MN 、 $M'N'$ 为法线. 入射光线 AB 、 AC 和折射光线 BD 、 CE 及法线 MN 、 $M'N'$ 都在同一平面内, 点 A 到直线 BC 的距离为 6 米.

(1) 求 BC 的长; (结果保留根号)

(2) 如果 $DE = 8.72$ 米, 求水池的深. (参考数据: $\sqrt{2}$ 取 1.41, $\sqrt{3}$ 取 1.73, $\sin 22^\circ$ 取 0.37, $\cos 22^\circ$ 取 0.93, $\tan 22^\circ$ 取 0.4, $\sin 40.5^\circ$ 取 0.65, $\cos 40.5^\circ$ 取 0.76, $\tan 40.5^\circ$ 取 0.85)



【分析】(1) 根据题意和锐角三角函数, 可以求得 CF 和 BF 的值, 然后即可计算出 BC 的值;

(2) 根据 (1) 中的结果和锐角三角函数, 可以求得水池的深.

解: (1) 作 $AF \perp BC$, 交 CB 的延长线于点 F ,

则 $AF \parallel MN \parallel M'N'$,

$$\therefore \angle ABM = \angle BAF, \quad \angle ACM' = \angle CAF,$$

$$\because \angle ABM = 30^\circ, \quad \angle ACM' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = 30^\circ, \quad \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\because AF = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore BF = AF \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \text{ (米)}, \quad CF = AF \cdot \tan 60^\circ = 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore BC = CF - BF = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ (米)},$$

即 BC 的长为 $4\sqrt{3}$ 米;

(2) 设水池的深为 x 米, 则 $BN = CN' = x$ 米,

由题意可知： $\angle DBN = 22^\circ$, $\angle ECN' = 40.5^\circ$. $DE = 8.72$ 米 ,

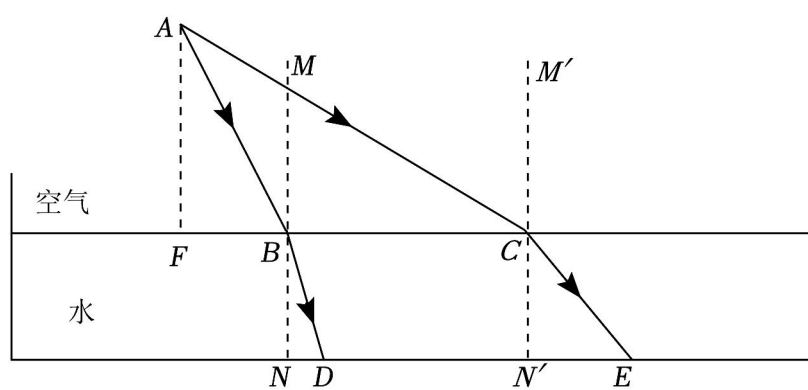
$\therefore DN = BN \cdot \tan 22^\circ \approx 0.4x$ (米) , $N'E = CN' \cdot \tan 40.5^\circ \approx 0.85x$ (米) ,

$\therefore DN + DE = BC + N'E$,

$\therefore 0.4x + 8.72 = 4\sqrt{3} + 0.85x$,

解得 $x \approx 4$,

即水池的深约为 4 米 .

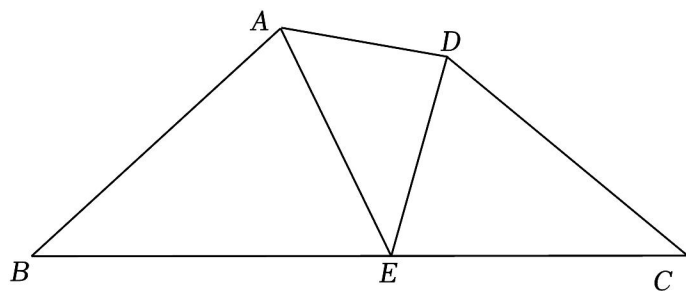


【点评】 本题考查解直角三角形的应用，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答 .

23 . (12 分) 已知： 如图， 在四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 上一点， $AB \cdot DE = AE \cdot EC$, $\angle ABE = \angle AED$.

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ECD$;

(2) 如果 F 、 G 、 H 分别是 AE 、 DE 、 AD 的中点， 联结 BF 、 HF 、 HG 、 CG . 求证：
 $BF \cdot HF = CG \cdot HG$.



【分析】(1) 将 $AB \cdot DE = AE \cdot EC$ 变形为 $\frac{AB}{EC} = \frac{AE}{DE}$ ，由 $\angle ABE = \angle AED$ ，根据三角形的内角和定理推导出 $\angle BAE = \angle CED$ ，即可证明 $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ ；

(2) 根据三角形的中位线定理得 $HF \parallel ED$ ， $HF = \frac{1}{2}ED$ ， $EG = \frac{1}{2}ED$ ， $AE = 2AF$ ， $DE = 2EG$ ，可证明四边形 $EFHG$ 是平行四边形，则 $AF = EF = HG$ ，再证明 $\triangle ABF \sim \triangle ECG$ ，得 $\frac{BF}{CG} = \frac{AF}{EG} = \frac{HG}{HF}$ ，所以 $BF \cdot HF = CG \cdot HG$ 。

【解答】证明：(1) 如图 1， $\because AB \cdot DE = AE \cdot EC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{DE}，$$

$$\because \angle ABE = \angle AED，$$

$$\therefore 180^\circ - \angle ABE - \angle AEB = 180^\circ - \angle AED - \angle AEB，$$

$$\therefore \angle BAE = 180^\circ - \angle ABE - \angle AEB，\angle CED = 180^\circ - \angle AED - \angle AEB，$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CED，$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECD。$$

(2) 如图 2， $\because F、G、H$ 分别是 $AE、DE、AD$ 的中点，

$$\therefore HF \parallel ED，HF = \frac{1}{2}ED，EG = \frac{1}{2}ED，AE = 2AF，DE = 2EG，$$

$$\therefore HF \parallel EG，HF = EG，$$

$\therefore$ 四边形 $EFHG$ 是平行四边形，

$$\therefore AF = EF = HG，$$

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{DE} = \frac{2AF}{2EG} = \frac{AF}{EG}，\angle BAF = \angle CEG，$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ECG，$$

$$\therefore \frac{BF}{CG} = \frac{AF}{EG}，$$

$$\therefore \frac{BF}{CG} = \frac{HG}{HF},$$

$$\therefore BF \cdot HF = CG \cdot HG.$$

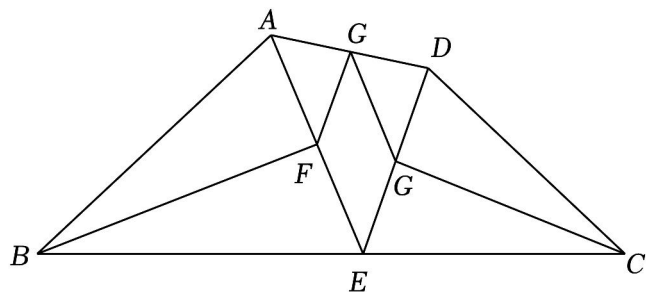


图2

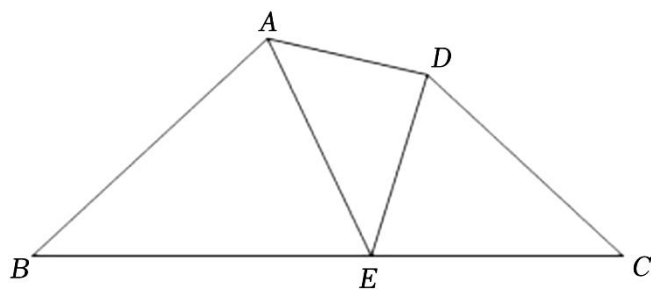


图1

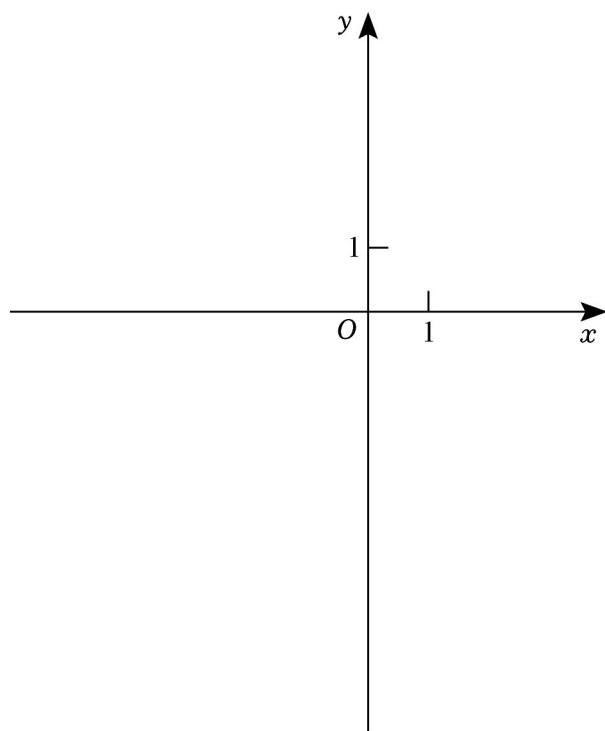
【点评】此题重点考查三角形的内角和定理、相似三角形的判定与性质、三角形的中位线定理、平行线边形的判定等知识，证明四边形 $EFHG$ 是平行四边形及 $\triangle ABF \sim \triangle ECG$ 是解题的关键.

24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 其中点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$. 抛物线的顶点为 D .

(1) 求抛物线的表达式, 并写出点 D 的坐标;

(2) 抛物线的对称轴上有一点 M , 且点 M 在第二象限, 如果点 M 到 x 轴的距离与它到直线 BD 的距离相等, 求点 M 的坐标;

(3) 抛物线上有一点 N , 直线 ON 恰好经过 $\triangle OBD$ 的重心, 求点 N 到 x 轴的距离.



【分析】（1）用待定系数法即可求解；

（2）设点 $M(-1, m)$ ，则 $MH = m = MN$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中， $\tan \angle BDH = \frac{BH}{DH} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，则 $\sin \angle BDH = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{m}{m+4}$ ，即可求解；

（3）直线 ON 恰好经过 $\triangle OBD$ 的重心，则 ON 为 BD 边上的中线，由点 B 、 D 的坐标得 BD 的中点坐标为 $(-2, -2)$ ，进而求解。

解：（1）由题意得：
$$\begin{cases} c = -3 \\ a + 2 + c = 0 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

故抛物线的表达式为： $y = x^2 + 2x - 3$ ，

则抛物线的对称轴为 $x = -1$ ，则点 $D(-1, -4)$ ；

（2）设抛物线的对称轴交 x 轴于点 R ，过点 M 作 $MR \perp BC$ 于点 R ，

设点 $M(-1, m)$, 则 $MH = m = MR$,

在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, $\tan \angle BDH = \frac{BH}{DH} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

则 $\sin \angle BDH = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{MR}{MD} = \frac{m}{m+4}$,

解得: $m = \sqrt{5} + 1$,

即点 M 的坐标为: $(-1, \sqrt{5} + 1)$;

(3) $\because$ 直线 ON 恰好经过 $\triangle OBD$ 的重心,

则 ON 为 BD 边上的中线,

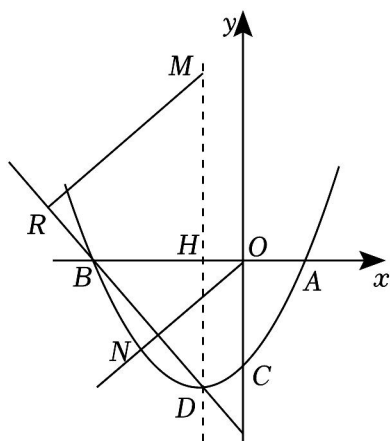
由点 B 、 D 的坐标得 BD 的中点坐标为 $(-2, -2)$,

则直线 ON 的表达式为: $y = x$,

联立 $y = x^2 + 2x - 3$ 和 $y = x$ 并解得:
$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$
 (不合题意的值已舍去),

即点 N 的坐标为 $(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{13}}{2})$,

故点 N 到 x 轴的距离为: $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.



【点评】本题考查了二次函数综合运用，涉及到重心的定义、解直角三角形、一次函数的应用等知识点，数形结合是本题解题的关键．

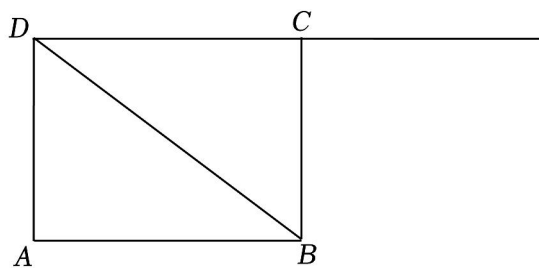
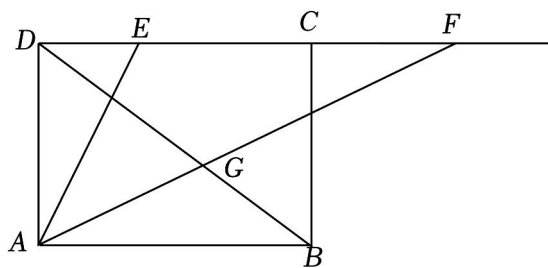
25. (14 分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $\tan \angle ABD = \frac{3}{4}$ ， E 是边 DC 上一动点， F 是线段 DE 延长线上一点，且 $\angle EAF = \angle ABD$ ， AF 与矩形对角线 BD 交于点 G ．

(1) 当点 F 与点 C 重合时，如果 $AD = 6$ ，求 DE 的长；

(2) 当点 F 在线段 DC 的延长线上，

①求 $\frac{AG}{AE}$ 的值；

②如果 $DE = 3CF$ ，求 $\angle AED$ 的余切值．



备用图

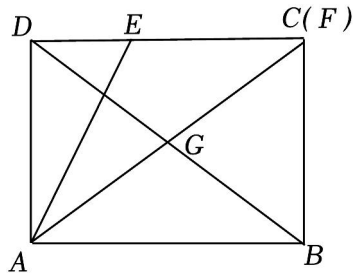
【分析】(1) 设 $DE = x$ ，根据矩形的性质即解直角三角形推出 $CD = AB = 8$ ， $AE = CE = 8 - x$ ，根据勾股定理得到 $6^2 + x^2 = (8 - x)^2$ ，据此求解即可；

(2) ① AE 交 BD 于点 M ，连接 EG ，根据相似三角形的判定与性质推出 $\triangle AMG \sim \triangle DME$ ，

$\triangle AMD \sim \triangle GME$ ， $\triangle ABD \sim \triangle GAE$ ，根据相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{BD} = \frac{AG}{AE}$ ，设 $AD = 3a$ ，则 $AB = 4a$ ，根据勾股定理求出 $BD = 5a$ ，据此求解即可；

② 设 $AD = 3a$ ，则 $CD = AB = 4a$ ，设 $CF = x$ ，且 $a > 0$ ， $x > 0$ ，则 $DF = 4a + x$ ，根据锐角三角函数得到 $\cot \angle AED = \frac{DE}{AD} = \frac{x}{a}$ ，根据勾股定理求出 $AE = \sqrt{9a^2 + 9x^2}$ ， $AF = \sqrt{(3a)^2 + (4a + x)^2}$ ，根据平行线的性质得出 $\triangle DGF \sim \triangle BGA$ ，根据相似三角形的性质得 $\frac{AG}{FG} = \frac{AB}{DF}$ ，进而求出 $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$ ，据此即可得解。

解：（1）如图，当点 F 与点 C 重合时，设 $DE = x$ ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB \parallel CD, AC = BD, DG = \frac{1}{2}BD, CG = \frac{1}{2}AC, \angle ADC = \angle BAD = 90^\circ, AB = CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDC, DG = CG, CD = AB = \frac{AD}{\tan \angle ABD} = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ACD,$$

$$\therefore AE = CE = 8 - x,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

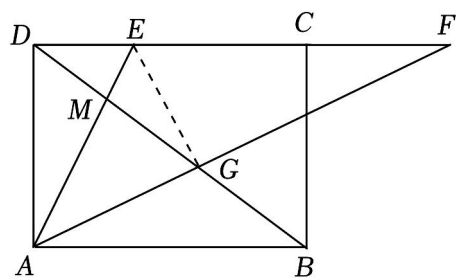
$$\therefore AD^2 + DE^2 = AE^2,$$

$$\text{即 } 6^2 + x^2 = (8-x)^2 ,$$

$$\therefore x = \frac{7}{4} ,$$

$$\therefore DE = \frac{7}{4} ;$$

(2) ①如图, AE 交 BD 于点 M , 连接 EG ,



由 (1) 得, $\angle EAF = \angle BDC$,

$$\because \angle AMG = \angle DME ,$$

$$\therefore \triangle AMG \sim \triangle DME ,$$

$$\therefore \frac{AM}{DM} = \frac{GM}{EM} ,$$

$$\text{又} \because \angle AMD = \angle GME ,$$

$$\therefore \triangle AMD \sim \triangle GME ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle GEA ,$$

$$\because \angle ABD = \angle EAF ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle GAE ,$$

$$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{AG}{AE} ,$$

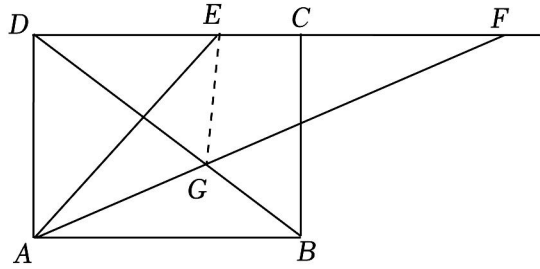
$$\because \tan \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} ,$$

$\therefore$ 设 $AD = 3a$, 则 $AB = 4a$,

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 5a ,$$

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{AB}{BD} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5} ;$$

②如图，连接 EG ,



$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} ,$$

$\therefore$ 设 $AD = 3a$, 则 $CD = AB = 4a$, 设 $CF = x$, 且 $a > 0$, $x > 0$, 则 $DF = 4a + x$,

$$\therefore DE = 3CF ,$$

$$\therefore DE = 3x ,$$

$$\therefore \cot \angle AED = \frac{DE}{AD} = \frac{3x}{3a} = \frac{x}{a} \quad , \quad AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{(3a)^2 + (3x)^2} = \sqrt{9a^2 + 9x^2} \quad ,$$

$$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a + x)^2} ,$$

$$\therefore AB \parallel CD ,$$

$$\therefore \triangle DGF \sim \triangle BGA ,$$

$$\therefore \frac{AG}{FG} = \frac{AB}{DF} ,$$

$$\text{即 } \frac{AG}{\sqrt{(3a)^2 + (4a + x)^2} - AG} = \frac{4a}{4a + x} ,$$

$$\therefore AG = \frac{4a\sqrt{(3a)^2 + (4a + x)^2}}{8a + x} ,$$

$$\text{由①得, } \frac{AG}{AE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore 5AG = 4AE,$$

$$\therefore 5 \times \frac{4a\sqrt{(3a)^2 + (4a+x)^2}}{8a+x} = 4 \times \sqrt{9a^2 + 9x^2},$$

两边平方并整理得,

$$(3x-a)(x+7a)(3x^2+28ax+7a^2)=0,$$

$$\because a > 0, \quad x > 0,$$

$$\therefore 3x-a \geq 0, \quad 3x^2+28ax+7a^2 > 0,$$

$$\therefore 3x-a=0,$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \cot \angle AED = \frac{1}{3},$$

即 $\angle AED$ 的余切值 $\frac{1}{3}$.

【点评】此题是相似综合题，考查了相似三角形的判定与性质、矩形的性质、解直角三角形等知识，熟练掌握相似三角形的判定与性质、矩形的性质、解直角三角形并作出合理的辅助线是解题的关键.

