

2023-2024 学年度第一学期期末九年级自适应练习

数学学科

一、选择题

1. 将抛物线 $y = 3x^2$ 沿着 y 轴向上平移 1 个单位后, 所得新抛物线的表达式是()

- A. $y = x^2 + 1$ B. $y = x^2 - 1$ C. $y = 3x^2 + 1$ D. $y = 3x^2 - 1$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象的平移, 根据平移规律“上加下减, 左加右减”即可求解.

【详解】 解: 将抛物线 $y = 3x^2$ 沿着 y 轴向上平移 1 个单位后, 所得新抛物线的表达式是 $y = 3x^2 + 1$,
故选: C.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, $\tan B = \frac{1}{3}$, $BC = 3$, 那么 AC 的长等于 ()

- A. 1 B. 9 C. $\sqrt{10}$ D. $3\sqrt{10}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形, 根据题意, 表示出 $\angle B$ 的正切即可解决问题.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\tan B = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{又因为 } \tan B = \frac{1}{3}, \quad BC = 3,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{3} = \frac{AC}{3},$$

$$\text{解得 } AC = 1.$$

故选: A.

3. 下列关于抛物线 $y = 2x^2$ 和抛物线 $y = -2x^2$ 的说法中, 不正确的是()

- A. 对称轴都是 y 轴 B. 在 y 轴左侧的部分都是上升的
C. 开口方向相反 D. 顶点都是原点

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的性质, 根据二次函数的性质, 可以判断各个选项中的说法是否正确, 从而可

以解答本题.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = 2x^2$ 和抛物线 $y = -2x^2$,

$\therefore$ 它们的对称轴都是 y 轴, 故选项 A 不符合题意;

抛物线 $y = 2x^2$ 在 y 轴左侧的部分是下降的, 抛物线 $y = -2x^2$ 在 y 轴左侧的部分都是上升的, 故选项 B 符合题意;

它们的开口方向相反, 故选项 C 不符合题意;

顶点都是原点, 故选项 D 不符合题意;

故选: B.

4. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 是非零向量, 如果 $\vec{a} = -3\vec{b}$, 下列说法中正确的是()

- A. $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$ B. $\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$ C. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. $3|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了实数与向量相乘, 向量的相关定义, 根据其运算法则进行计算即可求解.

【详解】解: $\because \vec{a} = -3\vec{b}$,

$\therefore$ A. $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

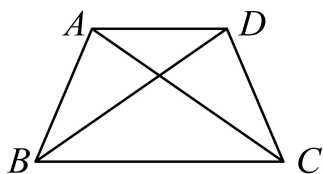
B. $\vec{a} - 3\vec{b} = -6\vec{b}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$, 故该选项正确, 符合题意;

D. $\frac{1}{3}|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

5. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 如果 $AB = DC$, $\angle ABC = \angle DCB$, 那么下列结论中不一定成立的是()



- A. $AC = BD$ B. $AD \parallel BC$ C. $\angle DAB = \angle ADC$ D. $\angle ABD = \angle DBC$

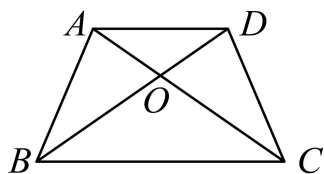
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定及性质, 等腰三角形的性质及判定, 三角形的外角的性质, 利用 SAS 证

明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ，然后根据全等三角形的性质，等腰三角形的性质及判定，三角形的外角的性质逐项进行判断，是解决问题的关键。

【详解】解：设 AC 与 BD 交于点 O ，



$$\therefore AB = DC, \angle ABC = \angle DCB, BC = CB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = BD, \angle ACB = \angle DBC, \angle BAC = \angle CDB, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{则 } OB = OC,$$

$$\therefore AC - OC = BD - OB, \text{ 则 } OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\text{由三角形的外角可知: } \angle AOB = \angle OAD + \angle ODA = \angle ACB + \angle DBC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = \angle ACB = \angle DBC,$$

$$\therefore AD \parallel BC, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA, \angle BAC = \angle CDB,$$

$$\text{则 } \angle OAD + \angle BAC = \angle ODA + \angle CDB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle ADC, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{若 } \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ADO,$$

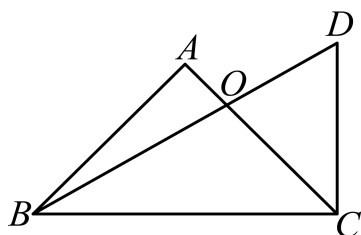
$$\therefore \angle ABD = \angle ADO,$$

$$\therefore AB = AD, \text{ 但 } AB \text{ 与 } AD \text{ 不一定相等,}$$

$$\text{则 } \angle ABD \text{ 与 } \angle DBC \text{ 不一定相等, 故 D 不一定正确;}$$

故选: D.

6. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 都是直角三角形, $\angle BAC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = AC$, AC 、 BD 相交于点 O , 如果 $\angle DBC = 30^\circ$, 那么 $OC:AC$ 的值是()



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $2-\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

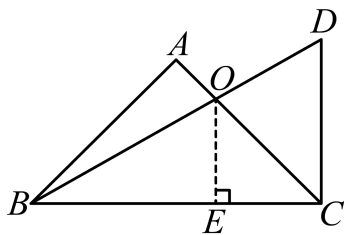
D. $\sqrt{3}-1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理、等腰直角三角形的判定与性质、含 30° 角的直角三角形的性质；过点 O 作 $OE \perp BC$ 于点 E ，证 $\triangle OCE$ 是等腰直角三角形，得 $OE = CE$ ， $OC = \sqrt{2} OE$ ，设 $OE = CE = a$ ，则 $OC = \sqrt{2} a$ ，再由勾股定理得 $BE = \sqrt{3} a$ ，然后求出 AC ，即可解决问题.

【详解】解：如图，过点 O 作 $OE \perp BC$ 于点 E ，



则 $\angle OEB = \angle OEC = 90^\circ$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle ACB = 45^\circ$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}AC$

$\therefore \triangle OCE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore OE = CE$,

$\therefore OC = \sqrt{OE^2 + CE^2} = \sqrt{2}OE$

设 $OE = CE = a$,

则 $OC = \sqrt{2} a$,

$\because \angle DBC = 30^\circ$,

$\therefore OB = 2OE = 2a$,

$\therefore BE = \sqrt{OB^2 - OE^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$,

$\therefore BC = BE + CE = (\sqrt{3} + 1)a$,

$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\sqrt{3} + 1)a = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})a}{2}$,

$\therefore \frac{OC}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})a}{2}} = \sqrt{3} - 1$,

故选：D.

二、填空题

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$, 那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 根据比例的性质，设 $x = 5a$ ，则 $y = 2a$ ，代入原式即可求解.

【详解】 解： $\because \frac{x}{y} = \frac{5}{2}$,

$\therefore$ 设 $x = 5a$ ，则 $y = 2a$,

那么 $\frac{x+y}{y} = \frac{2a+5a}{2a} = \frac{7}{2}$.

故答案为： $\frac{7}{2}$.

【点睛】 本题主要考查了比例的性质，根据比例式用同一个未知数得出 x ， y 的值进而求解是解题关键.

8. 已知正比例函数 y 的值随着自变量 x 的值增大而增大，那么这个正比例函数的解析式可以是 . (只需写一个)

【答案】 $y = x$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用正比例函数的性质解答.

根据正比例函数的性质可知 $k > 0$ ，从而可以写出一个符合要求的函数解析式.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 y 的值随着自变量 x 的值增大而增大，

$\therefore k > 0$,

$\therefore$ 这个正比例函数的解析式可以是 $y = x$,

故答案为： $y = x$.

9. 化简： $2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了实数与向量相乘，根据其运算法则进行计算即可求解.

【详解】 解： $2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{a} = \vec{a} + 2\vec{b}$

故答案为: $\vec{a} + 2\vec{b}$.

10. 已知二次函数 $y = x^2 + 3x + m - 2$ 的图像与 y 轴的交点在正半轴上, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数与坐标轴的交点问题: 先求得二次函数 $y = x^2 + 3x + m - 2$ 的图像与 y 轴的交点, 根据题意得出 $m - 2 > 0$, 即可求解.

【详解】 解: 当 $x = 0$, 则 $y = m - 2$, 即 $y = x^2 + 3x + m - 2$ 的图像与 y 轴的交点为 $(0, m - 2)$

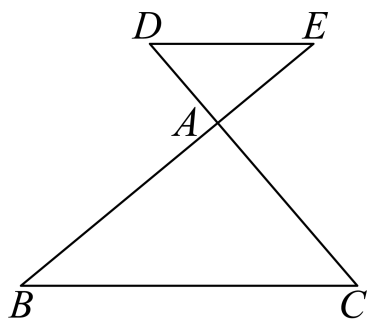
$\therefore (0, m - 2)$ 在正半轴上,

$\therefore m - 2 > 0$,

$\therefore m > 2$,

故答案为: $m > 2$.

11. 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 CA 、 BA 的延长线上, 且 $DE \parallel BC$, 如果 $AB = 6$, $AE = 3$, $CD = 5$, 那么 $AC =$ _____.



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质与判定, 根据 $DE \parallel BC$ 证明 $\triangle ABC \sim \triangle AED$, 再利用相似三角形对应边成比例, 即可解题.

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$,

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$,

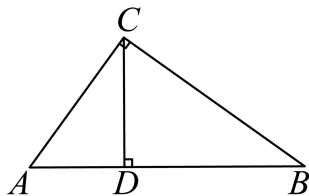
$\because AB = 6$, $AE = 3$, $CD = 5$,

设 $AC = x$, 则 $AD = 5 - x$,

$$\therefore \frac{x}{5-x} = \frac{6}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{10}{3}, \text{ 即 } AC = \frac{10}{3}.$$

故答案为: $\frac{10}{3}$.

12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 边上的高, 如果 $AC = 5$, $CD = 4$, 那么 $\triangle ACD$ 与 $\triangle CBD$ 的相似比 $k =$ _____.



【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 属于中考常考题型.

只要证明 $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, 可得 $\frac{AD}{CD} = \frac{3}{4}$, 由此即可解决问题.

【详解】 解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 边上的高,

$$\therefore \angle ADC = \angle CDB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because \angle A + \angle B = 90^\circ, \angle A + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{3}{4},$$

$$\text{即 } k = \frac{3}{4}.$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.

13. 已知点 A 在抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 上, 点 A' 与点 A 关于此抛物线的对称轴对称, 如果点 A 的横坐标是 -1, 那么点 A' 的坐标是_____.

【答案】 (3,6)

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与性质; 先得出 A 的坐标为 $(-1, 6)$, 抛物线的对称轴为 $x = 1$, 根据

对称性，即可求解.

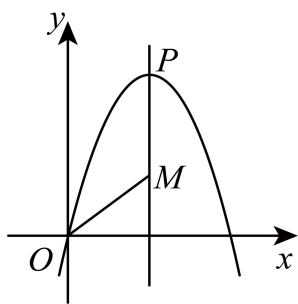
【详解】解： $\because$ 点A在抛物线 $y = (x-1)^2 + 2$ 上，点A的横坐标是-1，
抛物线的对称轴为 $x=1$ ，当 $x=-1$ 时， $y=6$ ，则A的坐标为 $(-1, 6)$ ，

$\therefore$ 点 A' 与点A关于此抛物线的对称轴对称，

$\therefore A'(3, 6)$ ，

故答案为： $(3, 6)$.

14. 如图，抛物线 $y = -x^2 + 4x$ 的顶点为 P ， M 为对称轴上一点，如果 $PM = OM$ ，那么点 M 的坐标是 _____.



【答案】 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质；先化为顶点式求得 $P(2, 4)$ ，对称轴为直线 $x=2$ ，设 $M(2, m)$ ，根据 $PM = OM$ 建立方程，解方程，即可求解.

【详解】解： $\because y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ ，

$\therefore P(2, 4)$ ，对称轴为直线 $x=2$ ，设 $M(2, m)$ ，

$\because PM = OM$ ，则 $PM^2 = OM^2$ ，

即 $(4-m)^2 = 2^2 + m^2$ ，

解得： $m = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ，

故答案为： $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

15. 已知点 P 为等边三角形 ABC 的重心, D 为 $\triangle ABC$ 一边上的中点, 如果这个等边三角形的边长为 2, 那么 $PD =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了重心的概念, 等边三角形的性质, 解题时要熟练掌握并灵活运用是关键. 延长 AG 交 BC 于点 D , 根据重心的概念得到 $BD = DC$, 根据等边三角形的性质得到 $AD \perp BC$, 根据勾股定理求出 AD 即可得到答案.

【详解】 解: 延长 AG 交 BC 于点 D ,

$\because$ 等边 $\triangle ABC$,

$\therefore AD \perp BC$,

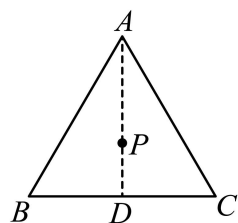
$\because D$ 为 $\triangle ABC$ 一边上的中点,

$\therefore BD = DC = 1$,

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

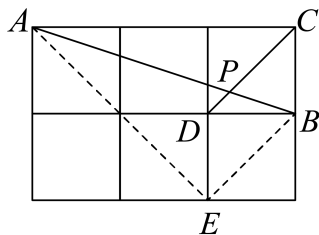
$\because$ 点 P 为等边三角形 ABC 的重心,

$\therefore PD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. 如图, 在边长为 1 的正方形网格中, 点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 都在小正方形顶点的位置上, 连结 AB 、 CD 相交于 P , 根据图中提示添加的辅助线, 可以得到 $\cos \angle BPC$ 的值等于 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理逆定理、求余弦值、平行四边形的判定及性质，由题意得由勾股定理求得各边的长度，易知四边形 $DEBC$ 是平行四边形， $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ，进而可知 $CD \parallel BE$ ， $\angle AEB = 90^\circ$ ，得 $\angle BPC = \angle ABE$ ，再结合余弦的定义进行求解是解决问题的关键。

【详解】 解：由可知， $AE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ， $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ ，

$$DE = BC = 1, \quad BE = CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 四边形 $DEBC$ 是平行四边形， $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ，

$\therefore CD \parallel BE$ ， $\angle AEB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = \angle ABE$ ，

$$\text{则 } \cos \angle BPC = \cos \angle ABE = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

17. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $DC = 2BD$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 上， $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BDF} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ ，

如果 $BC = 6$ ，那么 $EF =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的面积，相似三角形的判定和性质，关键掌握三角形面积公式是解题的关键。利用 $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BDF} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ 确定 EF 于 BC 的关系，已知 BC 即可得到答案。

【详解】 解：过点 E 作 $EM \perp BC$ ，交 BC 于点 M ，过点 F 作 $FN \perp BC$ ，交 BC 于点 N ，设 $\triangle ABC$ 中，以 BC 为底的高线为 h ，

$$\because DC = 2BD,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{3}BC,$$

$$\because S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BDF} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times BD \times EM,$$

$$S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} \times BD \times FN,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times h,$$

$$\therefore EM = FN = \frac{1}{3}h,$$

$\therefore E、F$ 分别是边 $AB、AC$ 的三等分点，即 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$ ，

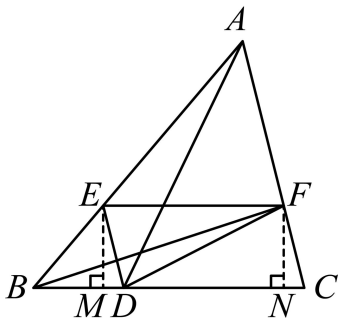
$\therefore \angle EAF = \angle BAC$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AEF$ ，

$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3}$ ，

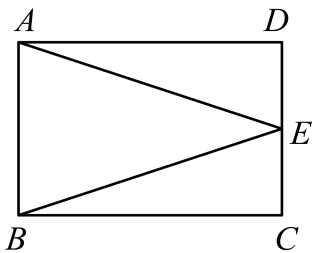
$\therefore BC = 6$ ，

$\therefore EF = 4$ 。



故答案为：4。

18. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 9$ ， E 为边 CD 的中点，联结 $AE、BE$ ， P 为边 AD 上一点，将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折，如果点 A 的对应点 A' 恰好位于 $\triangle ABE$ 内，那么 AP 的取值范围是_____。



【答案】 $2 < AP < 2\sqrt{10} - 2$

【解析】

【分析】 本题考矩形的折叠问题，相似三角形的性质，勾股定理；

根据翻折的性质、直角三角形的边角关系以及相似三角形的性质，分别求得 AP 的最小值与最大值，当 $BP \perp AE$ 时， AP 的值最小，当 BP 平分 $\angle ABE$ 时， AP 最长，分别画出图形进行计算即可。

【详解】 解：如图 1，当 $BP \perp AE$ 时， AP 的值最小，此时 A 点的对应点 A' 落在 AE 上，

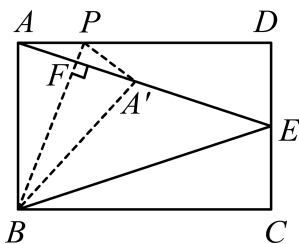


图1

$$\therefore \angle ABP + \angle BAF = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle BAD = \angle D = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BAF + \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP = \angle FAP,$$

$$\because \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BAP \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AP}{DE} = \frac{BA}{AD}$$

$$\text{即 } \frac{AP}{3} = \frac{6}{9}$$

解得: $AP = 2$;

如图 2, 当 BP 平分 $\angle ABE$ 时, AP 最长, 此时 A 点的对应点 A' 落在 BE 上, 连接 PE ,

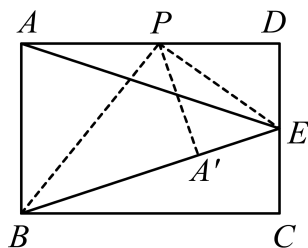


图2

由题意可知, $AP = A'P$,

在 $Rt\triangle BCE$ 中, $BC = 9$, $EC = \frac{1}{2}CD = 3$,

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 + EC^2} = 3\sqrt{10}$$

由翻折可知 $AB = A'B = 6$,

$$\therefore A'E = BE - A'B = 3\sqrt{10} - 6$$

设 $AP = x$, 则 $A'P = x$, $PD = 9 - x$,

$$\text{在 } Rt\triangle PDE \text{ 中, } PE^2 = PD^2 + DE^2 = (9 - x)^2 + 3^2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle PEA' \text{ 中, } PE^2 = A'P^2 + A'E^2 = x^2 + (3\sqrt{10} - 6)^2$$

$$\therefore (9 - x)^2 + 3^2 = x^2 + (3\sqrt{10} - 6)^2$$

$$\text{解得: } x = 2\sqrt{10} - 2$$

$$\text{则此时 } AP = 2\sqrt{10} - 2,$$

综上所述, 如果点 A 的对应点 A' 恰好位于 $\triangle ABE$ 内, 那么 AP 的取值范围是 $2 < AP < 2\sqrt{10} - 2$;

故答案为: $2 < AP < 2\sqrt{10} - 2$.

三、解答题

19. 计算: $\sin^2 45^\circ + 3 \cot 60^\circ - \frac{2 \cot 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \sin 30^\circ}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

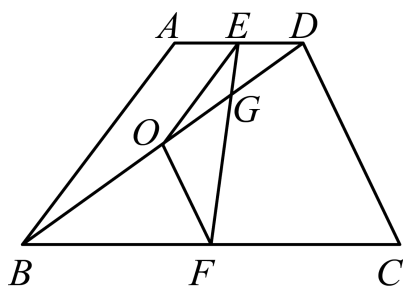
【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值; 根据特殊角的三角函数值进行计算即可求解.

【详解】 解: $\sin^2 45^\circ + 3 \cot 60^\circ - \frac{2 \cot 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \sin 30^\circ}$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2 \times 1}{\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1)$$
$$= -\frac{1}{2}$$

20. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点, BD 与 EF 交于点 G , O 为 BD 上一点, $OF \parallel DC$.



(1) 求 $\frac{OE}{AB}$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, 如果 $DE : BF = 1 : 3$, 那么 $\overrightarrow{FO} =$ _____, $\overrightarrow{EG} =$ _____. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 (1) $\frac{OE}{AB} = \frac{1}{2}$

$$(2) -\frac{1}{2}\vec{b}, \frac{1}{8}(\vec{b}-\vec{a})$$

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形的中位线定理、相似三角形的判定与性质、平面向量；

(1) 由三角形中位线定理易得 OF 为 $\triangle BCD$ 的中位线，进而可得 OE 为 $\triangle ABD$ 的中位线，于是 $\frac{OE}{AB} = \frac{1}{2}$ ；

(2) 根据题意可得 $\vec{FO} = \frac{1}{2}\vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，根据三角形法则得出 $\vec{FE} = \vec{FO} + \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ ，证 $\triangle DEG \sim \triangle BFG$ ，得到 $\frac{EG}{FG} = \frac{DE}{BF} = \frac{1}{3}$ ，进而 $EG = \frac{1}{4}FE$ ，以此即可得到答案.

【小问1详解】

解: $\because OF \parallel CD$ ，点 F 为 BC 的中点，

$\therefore OF$ 为 $\triangle BCD$ 的中位线，

$\therefore$ 点 O 为 BD 的中点，

又 $\because$ 点 E 为 AD 的中点，

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore OE \parallel AB$ ， $OE = \frac{1}{2}AB$ ，即 $\frac{OE}{AB} = \frac{1}{2}$

【小问2详解】

解: $\because \vec{BA} = \vec{a}$ ， $\vec{DC} = \vec{b}$ ，

$\therefore \vec{FO} = \frac{1}{2}\vec{CD} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，

$\therefore \vec{FE} = \vec{FO} + \vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle BFG$ ，

$\therefore \frac{EG}{FG} = \frac{DE}{BF} = \frac{1}{3}$ 即 $EG = \frac{1}{3}FG$ ，

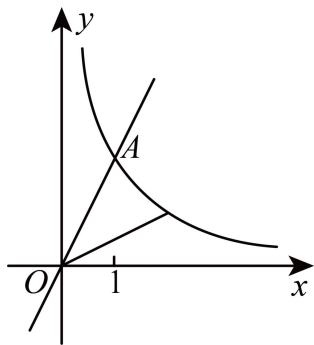
$\therefore EG = \frac{1}{4}EF$ ，

$\therefore \vec{EG} = -\frac{1}{4}\vec{FE} = \frac{1}{8}(\vec{b} - \vec{a})$ ，

故答案为: $-\frac{1}{2}\vec{b}$ ， $\frac{1}{8}(\vec{b} - \vec{a})$ 。

21. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y = 2x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像交于点

$A(1, m)$ 。



(1) 求这个反比例函数的解析式；

(2) 点 B 在这个反比例函数位于第一象限的图像上，过点 B 作 $BH \perp x$ 轴，垂足为点 H 。如果 $\angle AOH = \angle OBH$ ，求点 B 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$

(2) (2,1)

【解析】

【分析】本题是反比例函数综合题，考查了待定系数法，锐角三角函数，反比例函数的性质，熟练掌握知识点是解题的关键。

(1) 将点 A 的坐标代入一次函数求出点 A 的坐标，即可求出反比例函数的解析式；

(2) 由锐角三角函数可求 $OH = 2BH$ ，代入解析式即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 正比例函数 $y = 2x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像交于点 $A(1, m)$ ，

$$\therefore m = 2 \times 1 = 2,$$

$$\therefore A(1, 2),$$

将 $A(1, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得 $k = 1 \times 2 = 2$ ，

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{2}{x};$$

【小问 2 详解】

解：过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于点 C ，

$$\therefore A(1, 2),$$

$$\therefore AC = 2, CO = 1,$$

$$\therefore \tan \angle AOH = \frac{AC}{OC} = 2,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle OBH,$$

$$\therefore \tan \angle AOH = \tan \angle OBH = 2 = \frac{OH}{BH},$$

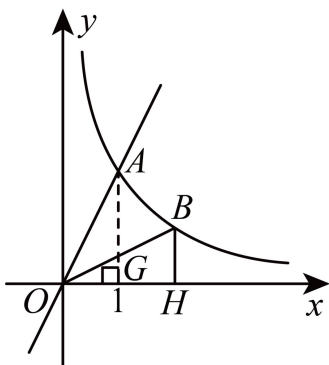
$$\therefore OH = 2BH,$$

$\because$ 点 B 在这个反比例函数位于第一象限的图像上,

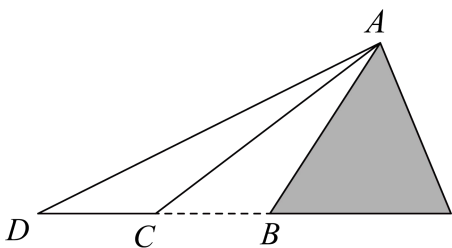
$$\therefore OH \cdot BH = 2,$$

$$\therefore OH = 2,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2,1)$.



22. 如图, 小河的对岸有一座小山, 小明和同学们想知道山坡 AB 的坡度, 但由于山坡 AB 前有小河阻碍, 无法直接从山脚 B 处测得山顶 A 的仰角, 于是小明和同学们展开了如下的测量:



第一步: 从小河边的 C 处测得山顶 A 的仰角为 37° ;

第二步: 从 C 处后退 30 米, 在 D 处测得山顶 A 的仰角为 26.6° ;

第三步: 测得小河宽 BC 为 33 米.

已知点 B 、 C 、 D 在同一水平线上, 请根据小明测量的数据求山坡 AB 的坡度.

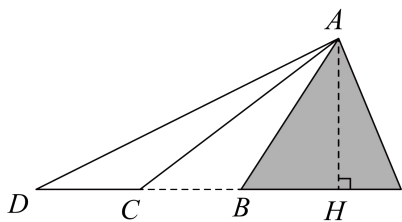
(参考数据: $\sin 22.6^\circ \approx 0.45$, $\cos 26.6^\circ \approx 0.89$, $\tan 26.6^\circ \approx 0.5$, $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

【答案】 山坡 AB 的坡度 $i = 5:3$

【解析】

【分析】 本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题、坡度坡角问题, 熟记锐角三角函数的定义是解题的关键. 过点 A 作 $AH \perp DC$, 交 DC 的延长线于点 H , 根据正切的定义用 AH 表示出 DH 、 CH , 进而出去 AH , 再求出 BH , 根据坡度的概念计算, 得到答案.

【详解】解：如图，过点 A 作 $AH \perp DC$ ，交 DC 的延长线于点 H ，



在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $\angle ADH = 26.6^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH},$$

$$\therefore DH = \frac{AH}{\tan \angle ADH} \approx 2AH,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $\angle ACH = 37^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ACH = \frac{AH}{CH},$$

$$\therefore CH = \frac{AH}{\tan \angle ACH} \approx \frac{4}{3}AH,$$

$$\therefore DC = DH - CH,$$

$$\therefore 2AH - \frac{4}{3}AH = 30,$$

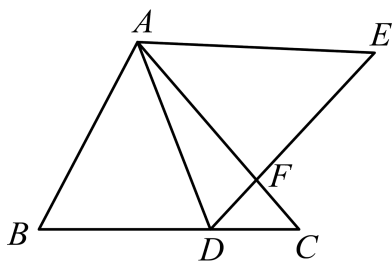
解得： $AH = 45$ ，

$$\therefore CH = \frac{4}{3}AH = 60 \text{ (米)},$$

$$\therefore BH = CH - CB = 60 - 33 = 27,$$

$$\therefore \text{山坡 } AB \text{ 的坡度为: } 45:27 = 5:3.$$

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle EAF = \angle FDC$ ， DE 与 AC 交于点 F 。



(1) 求证： $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ；

(2) 连接 BF ，如果 $AB^2 = AF \cdot AC$ ，求证： $AD \cdot BC = AE \cdot BF$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定与性质，掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

(1) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，即可得出 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ；

(2) 先推导出 $\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AB}$ ，证明 $\triangle ABF \sim \triangle ACB$ ，得 $\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{BC}$ ，即可证明 $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BC}$ 进而得出结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle EAF = \angle FDC, \angle AFE = \angle DFC$ ， $\angle EAF + \angle AFE + \angle E = 180^\circ = \angle FDC + \angle DFC + \angle C$ ，

$\therefore \angle E = \angle C$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

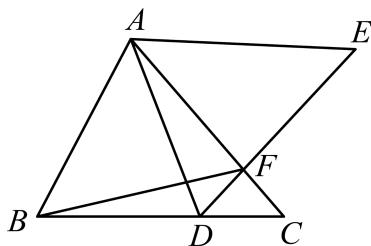
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle B \\ \angle E = \angle C \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}；$$

【小问 2 详解】

证明： 如图：



$$\therefore AB^2 = AF \cdot AC，$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AB}，$$

$$\therefore \angle BAF = \angle CAB，$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACB，$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BF}{BC}，$$

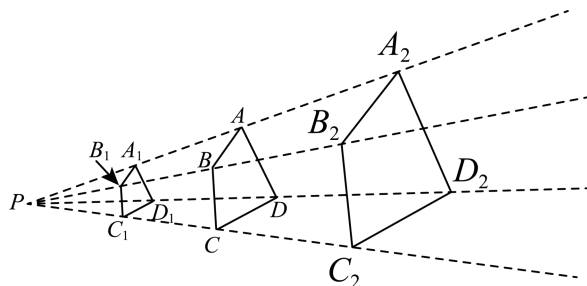
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}，$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BC}，$$

$$\therefore AD \times BC = AE \times BF .$$

24. 综合实践

对于下图中的三个四边形，通常可以说，缩小四边形 $ABCD$ ，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$ ；放大四边形 $ABCD$ ，得到四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 。

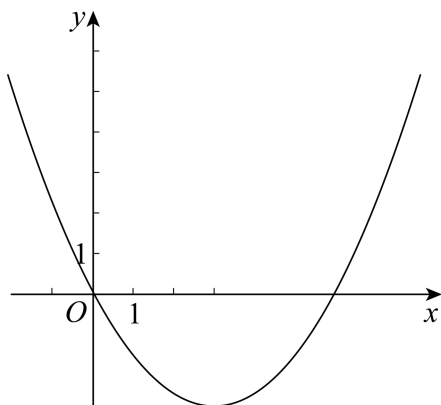


图形的放大或缩小，称为图形的放缩运动。将一个图形放大或缩小后，就得到与它形状相同的图形。图中，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 和四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 都与四边形 $ABCD$ 形状相同。我们把形状相同的两个图形说成是相似的图形，或者就说是相似形。

如图，对于两个多边形，如果它们的对应顶点的连线相交于一点，并且这点与对应顶点所连线段成比例，那么这两个多边形就是位似多边形，这个点就是位似中心。

(1) 填空：在上图中位似中心是点_____；_____多边形是特殊的_____多边形。（填“位似”或“相似”）

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中（如下图），二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ 的图像与 x 轴交于点 A ，点 B 是此函数图像上一点（点 A 、 B 均不与点 O 重合），已知点 B 的横坐标与纵坐标相等，以点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，将 $\triangle OAB$ 缩小，得到它的位似 $\triangle OA_1B_1$ 。



①画出 $\triangle OA_1B_1$ ，并求经过 O 、 A_1 、 B_1 三点的抛物线的表达式；

②直线 $y = kx$ ($k > 0$) 与二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ 的图像交于点 M ，与①中的抛物线交于点 N ，请判断

$\triangle OA_1N$ 和 $\triangle OAM$ 是否为位似三角形，并根据新定义说明理由.

【答案】(1) P ；位似；相似

(2) ①图形见解析； $y = x^2 - 3x$ ；② $\triangle OA_1N$ 和 $\triangle OAM$ 为位似三角形，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据位似图形的定义，即可求解；

(2) ①根据位似图形的定义，画出图形，再求出 A_1 、 B_1 的坐标，即可求解；②过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D ，过点 N 作 $NC \perp x$ 轴于点 C ，联立求出点 M 、 N 的坐标，可得 $\frac{MD}{CN} = \frac{OD}{OC} = 2$ ，从而得到 $\triangle OCN \sim \triangle ODM$ ，进而得到 $\frac{OM}{ON} = \frac{MD}{CN} = 2$ ，再由点 A_1 的坐标为 $(3, 0)$ ，点 A 的坐标为 $(6, 0)$ ，可得 $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OM}{ON} = 2$ ，然后根据新定义，即可求解.

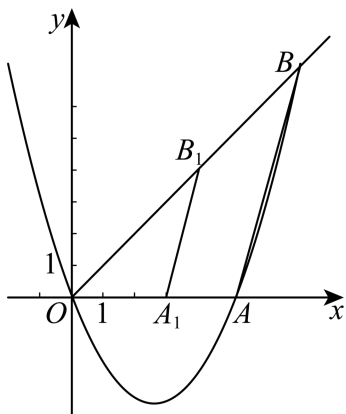
【小问 1 详解】

解：在上图中位似中心是点 P ；位似多边形是特殊的相似多边形.

故答案为： P ；位似；相似

【小问 2 详解】

解：①如图， $\triangle OA_1B_1$ 即为所求；



$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } 0 = \frac{1}{2}x^2 - 3x,$$

解得： $x = 6$ 或 0 ,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(6, 0)$,

设点 B 的坐标为 (s, s) ,

$$\therefore s = \frac{1}{2}s^2 - 3s, \text{ 解得: } s = 8 \text{ 或 } 0,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(8, 8)$,

$\therefore$ 以点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，将 $\triangle OAB$ 缩小，得到它的位似 $\triangle OA_1B_1$ ，

$\therefore$ 点 A_1 的坐标为 $(3,0)$ ，点 B_1 的坐标为 $(4,4)$ ，

设经过 O 、 A_1 、 B_1 三点的抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

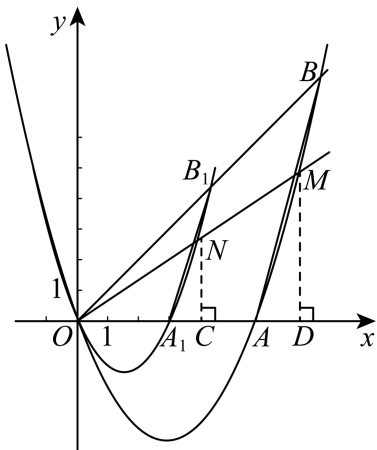
把点 $(3,0)$ ， $(4,4)$ ， $(0,0)$ 代入得：

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 4 \\ c = 0 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 经过 O 、 A_1 、 B_1 三点的抛物线的表达式为 $y = x^2 - 3x$ ，

② $\triangle OA_1N$ 和 $\triangle OAM$ 为位似三角形，理由如下：

如图，过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D ，过点 N 作 $NC \perp x$ 轴于点 C ，



联立得： $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - 3x \\ y = kx \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 6k + 2k^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(6 + 2k, 6k + 2k^2)$ ，

$\therefore OD = 6 + 2k$ ， $MD = 6k + 2k^2$ ，

同理点 N 的坐标为 $(3 + k, 3k + k^2)$ ，

$\therefore OC = 3 + k$ ， $CN = 3k + k^2$ ，

$$\therefore \frac{MD}{CN} = \frac{OD}{OC} = 2,$$

$\therefore \angle OCN = \angle ODM = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle OCN \sim \triangle ODM$ ，

$$\therefore \frac{OM}{ON} = \frac{MD}{CN} = 2,$$

$\therefore$ 点 A_1 的坐标为 $(3,0)$, 点 A 的坐标为 $(6,0)$,

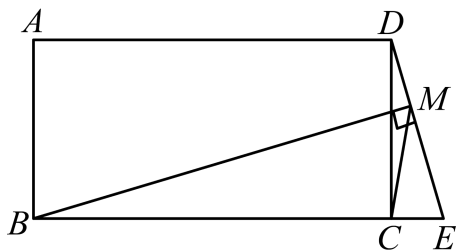
$$\therefore OA_1 = 3, OA = 6,$$

$$\therefore \frac{OA}{OA_1} = \frac{OM}{ON} = 2,$$

$\therefore \triangle OA_1N$ 和 $\triangle OAM$ 为位似三角形.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定和性质，二次函数的综合应用，理解新定义，利用数形结合思想解答是解题的关键.

25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， E 是边 BC 延长线上一点，过点 B 作 $BM \perp DE$ ，垂足为点 M ，联结 CM ，设 $CE = a (0 < a < 1)$.



(1) 求证： $\triangle DCE \sim \triangle BME$ ；

(2) $\angle CME$ 的大小是否是一个确定的值？如果是，求出 $\angle CME$ 的正切值；如果不是，那么用含字母 a 的代数式表示 $\angle CME$ 的正切值；

(3) P 是边 AD 上一动点(不与点 A 、 D 重合)，联结 PB 、 PM 。随着点 P 位置的变化，在 $\triangle PBM$ 中除 $\angle BPM$ 外的两个内角是否会有与 $\angle CME$ 相等的角，如果有，请用含字母 a 的代数式表示此时线段 AP 的长；如果没有，请说明理由。

【答案】(1) 见解析 (2) $\tan \angle CME = \frac{1}{2}$

(3) $\frac{4-a}{1+a}$

【解析】

【分析】(1) 由矩形的性质得 $\angle DCE = \angle BCD = 90^\circ$ ，由 $BM \perp DE$ 于点 M ，得 $\angle BME = 90^\circ$ ，则 $\angle DCE = \angle BME$ ，而 $\angle E = \angle E$ ，所以 $\triangle DCE \sim \triangle BME$ ；

(2) 连接 BD ，由相似三角形的性质得，变形为，因为 $\angle E = \angle E$ ，所以 $\triangle CME \sim \triangle DBE$ ，则 $\angle CME = \angle DBC$ ，所以 $\angle CME$ 的大小是一个确定的值， $\tan \angle CME = \tan \angle DBC = \frac{1}{2}$ ；

(3) 分两种情况讨论, ① $\angle PBM = \angle CME$, 连接 BD , 作 $PG \perp BD$ 于点 G , 因为 $\angle PDG = \angle DBC$, 所以 $\frac{PG}{DG} = \tan \angle PDG = \tan \angle DBC = \frac{1}{2}$, 则 $PG = \frac{1}{2} DG$, 再证明 $\angle PBG = \angle EDC$, 则可求得 $BD = \sqrt{5}$, 进而求得 DG , 求得 $PD = \frac{\sqrt{5}}{2} DG$, 则 $AP = \frac{4-a}{1+a}$; ② $\angle PMB = \angle CME$, 连接 BD 交 PM 于点 F , 可证明 $\triangle PFD \sim \triangle BFM$, 得 $\angle DPF = \angle MBF$, 再证明 $\triangle PFB \sim \triangle DFM$, 得 $\angle BPF = \angle MDF$, 则 $\angle BPD = \angle BPF + \angle DPF = \angle MDF + \angle MBF = 90^\circ$, 所以点 P 与点 A 重合, 不符合题意.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, E 是边 BC 延长线上一点,

$$\therefore \angle DCE = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\because BM \perp DE$ 于点 M ,

$$\therefore \angle BME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle BME,$$

$\because \angle E = \angle E$,

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BME.$$

【小问 2 详解】

解: $\angle CME$ 的大小是一个确定的值,

如图 1, 连接 BD ,

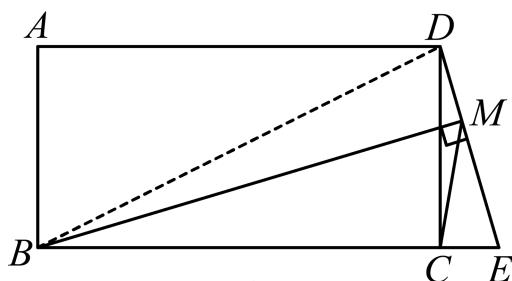


图1

$\because \triangle DCE \sim \triangle BME$,

$$\therefore \frac{CE}{ME} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{ME}{BE}$$

$\because \angle E = \angle E$,

$$\therefore \triangle CME \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \angle CME = \angle DBC,$$

$\therefore \angle CME$ 的大小是一个确定的值,

$$\therefore DG = a(2\sqrt{5} - DG),$$

$$\therefore DG = \frac{2\sqrt{5}a}{1+a},$$

$$\therefore PD = \frac{\sqrt{5}}{2} DG = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{1+a} = \frac{5a}{1+a},$$

$$\therefore AP = 4 - \frac{5a}{1+a} = \frac{4-a}{1+a};$$

如图3， $\angle PMB = \angle CME$ ，连接 BD 交 PM 于点 F ，

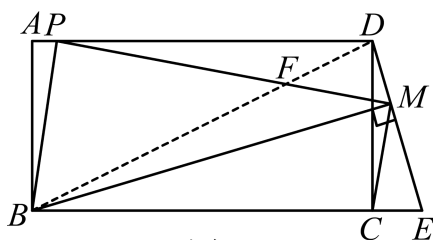


图3

$$\because \angle CME = \angle DBC = \angle PDF,$$

$$\therefore \angle PMB = \angle PDF,$$

$$\because \angle PFD = \angle BFM,$$

$$\therefore \triangle PFD \sim \triangle BFM,$$

$$\therefore \angle DPF = \angle MBF, \quad \frac{PF}{BF} = \frac{DF}{MF},$$

$$\therefore \frac{PF}{DF} = \frac{BF}{MF},$$

$$\because \angle PFB = \angle DFM,$$

$$\therefore \triangle PFB \sim \triangle DFM,$$

$$\therefore \angle BPF = \angle MDF,$$

$$\because \angle BMD = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPD = \angle BPF + \angle DPF = \angle MDF + \angle MBF = 90^\circ,$$

$$\because BP \perp AD, \quad BA \perp AD,$$

$\therefore$ 点 P 与点 A 重合，不符合题意，

综上所述，有与 $\angle CME$ 相等的角，线段 AP 的长为 $\frac{4-a}{1+a}$ 。

【点睛】此题考查了矩形的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、锐角三角函数与解直角三角形、数形结合与分类讨论数学思想的运用等知识与方法是解题的关键。

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

