

上海市徐汇区 2023 届初三一模数学试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 4$. 下列四个选项, 正确的是 ()

A. $\tan B = \frac{3}{4}$

B. $\cot B = \frac{4}{3}$

C. $\sin B = \frac{4}{5}$

D. $\cos B = \frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】先利用勾股定理求出 $BC = 3$, 再根据三角函数的定义求解即可.

【详解】解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $AC = 4$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}, \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

故选 C.

【点睛】本题主要考查了勾股定理和解直角三角形, 熟知对应的三角函数的定义是解题的关键.

2. 下列命题中假命题是 ()

A. 任意两个等腰直角三角形都相似

B. 任意两个含 36° 内角的等腰三角形相似

C. 任意两个等边三角形都相似

D. 任意两个直角边之比为 1:2 的直角三角形相似

【答案】B

【解析】

【分析】根据相似三角形的判定方法对各个选项进行分析, 从而得到答案.

【详解】解: A. 任意两个等腰直角三角形中三组对应角均相等, 符合相似三角形的判定条件, 故相似, 都相似

B. 任意两个含 36° 内角的等腰三角形中没有确定顶角或底角, 故不一定相似

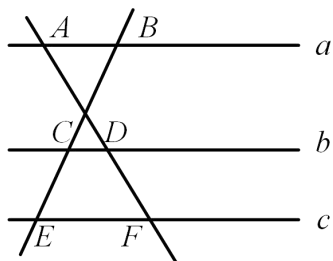
C. 等边三个角都相等, 故两三角形相似;

D. 任意两个直角边之比为 1:2 的直角三角形, 符合相似三角形判定的条件, 故相似

故选: B

【点睛】本题考查相似三角形的判定定理: (1) 两角对应相等的两个三角形相似; (2) 两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似; (3) 三边对应成比例的两个三角形相似; (4) 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例, 那么这两个直角三角形相似.

3. 如图, $a \parallel b \parallel c$, 若 $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$, 则下面结论错误的是 ()



- A. $\frac{AD}{AF} = \frac{3}{5}$ B. $\frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$ C. $\frac{AB}{EF} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{BC}{BE} = \frac{3}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据比例的性质与平行线分线段成比例, 列出比例式, 逐项判断即可

【详解】 $\because \frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{AD}{AF} = \frac{3}{5}$,

故 A 选项正确, 不符合题意;

$\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 且 $\frac{AD}{DF} = \frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$,

故 B 选项正确, 不符合题意;

$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{3}{5}$

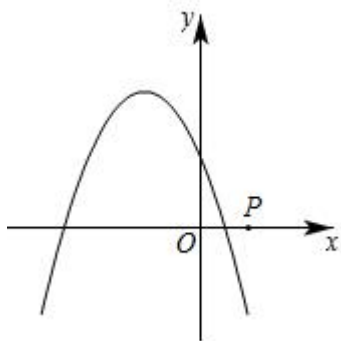
故 D 选项正确, 不符合题意;

根据已知条件不能求出 $\frac{AB}{EF}$ 的值, 故 C 选项不正确,

故选 C.

【点睛】本题考查了比例的性质与平行线分线段成比例, 掌握比例的性质与平行线分线段成比例是解题的关键.

4. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像如图所示, 点 P 在 x 轴的正半轴上, 且 $OP = 1$, 下列选项中正确的是 ()



- A. $a > 0$ B. $c < 0$ C. $a + b + c > 0$ D. $b < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据开口方向，即可判断 A；根据与 y 轴的交点，即可判断 B；把 $x = 1$ 代入，即可判断 C；根据对称轴的位置，即可判断 D.

【详解】解：A、 $\because$ 函数图象开口向下， $\therefore a < 0$ ，故 A 不正确，不符合题意；

B、 $\because$ 函数图象与 y 轴交于正半轴， $\therefore c > 0$ ，故 B 不正确，不符合题意；

C、把 $x = 1$ 代入得 $y = a + b + c$ ， $\because OP = 1$ ， $\therefore$ 当 $x = 1$ 时， $y < 0$ ， $\therefore a + b + c < 0$ ，故 C 不正确，不符合题意；

D、 $\because$ 函数对称轴在 y 轴左侧， $a < 0$ ， $\therefore b < 0$ ，故 D 正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质，解题的关键熟练掌握二次函数的图象和性质，会根据函数的开口，对称轴，与坐标轴的交点判断各个系数的符号.

5. 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 经过下列平移能得到抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ 的是 ()

- A. 向右 1 个单位，向下 3 个单位 B. 向左 1 个单位，向下 3 个单位
C. 向右 1 个单位，向上 3 个单位 D. 向左 1 个单位，向上 3 个单位

【答案】B

【解析】

【分析】找到两个抛物线的顶点，根据抛物线的顶点即可判断是如何平移得到.

【详解】解： $\because y = -\frac{1}{2}x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ， $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ 的顶点坐标为 $(-1, -3)$ ，

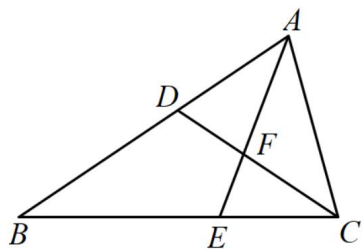
$\therefore$ 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位，可得抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.

故选：B.

【点睛】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的法则是解答此题的关

键.

6. 如图, 点 D 在 $\triangle ABC$ 边 AB 上, $\angle ACD = \angle B$, 点 F 是 $\triangle ABC$ 的角平分线 AE 与 CD 的交点, 且 $AF = 2EF$, 则下列选项中不正确的是 ()



A. $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$

B. $\frac{CF}{BE} = \frac{2}{3}$

C. $\frac{DC}{BC} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE}$, 利用 $AF = 2EF$ 判断选项 A、C, 证明 $\triangle ACF \sim \triangle ABE$ 得出 $\frac{CF}{BE} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$ 判断选项 B, 分别用 AB 表示出 AD 和 BD , 判断选项 D, 即可得出结论.

【详解】 $\because \angle ACD = \angle B, \angle CAB = \angle CAB,$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE},$$

$$\because AF + EF = AE \text{ 且 } AF = 2EF,$$

$$\therefore \frac{3}{2}AF = AE,$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{2}{3}, \text{ 故选项 A、C 正确;}$$

$$\therefore AC = \frac{2}{3}AB, \quad AD = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore AD = \frac{4}{9}AB,$$

$$\because AD + BD = AB,$$

$$\therefore BD = AB - AD = AB - \frac{4}{9}AB = \frac{5}{9}AB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{4}{9}AB}{\frac{5}{9}AB} = \frac{4}{5}, \text{ 故选项 D 错误;}$$

$\because AE$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE,$$

$$\because \angle ACD = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{CF}{BE} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}, \text{ 故选项 B 正确;}$$

故选: D.

【点睛】本题考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

二、 填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, 则 $\frac{x-y}{x+y} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】设 $\frac{x}{y}$ 的公比为 k , 则 $x = 4k$, $y = 3k$, 代入求解即可得到答案;

【详解】解: 设 $\frac{x}{y}$ 的公比为 k , 则 $x = 4k$, $y = 3k$,

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} = \frac{4k-3k}{4k+3k} = \frac{1}{7},$$

故答案为 $\frac{1}{7}$.

【点睛】本题考查分式的性质, 解题的关键是设出公比表示出 x , y .

8. 计算: $2(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{3}(3\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】根据加减运算及乘法运算法则进行计算即可.

【详解】解: 原式 $= 2\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$
 $= \vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$

故答案为 $\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算，熟练掌握平面的加减运算及乘法运算法则是正确计算本题的关键.

9. 两个相似三角形的对应边上的中线之比 $4:5$ ，则这两个三角形面积之比为_____.

【答案】 $16:25$

【解析】

【分析】 根据相似三角形对应边上的中线之比等于相似比，相似三角形的面积之比等于相似比的平方进行解答即可.

【详解】 $\because$ 两个相似三角形的对应边上的中线之比 $4:5$,

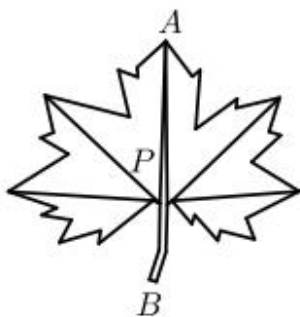
$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 $4:5$,

$\therefore$ 两个相似三角形的面积之比为 $16:25$,

故答案为: $16:25$.

【点睛】 本题考查相似三角形的性质，相似三角形的周长之比等于相似比，相似三角形的面积之比等于相似比的平方，熟练掌握其性质是解题的关键.

10. 大自然是美的设计师，即使是一片小小的树叶，也蕴含着“黄金分割”. 如图， P 为 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$)，如果 AB 的长度为 8cm ，那么 AP 的长度是_____.



【答案】 $(4\sqrt{5} - 4)\text{cm}$

【解析】

【分析】 利用黄金分割的定义计算出 AP .

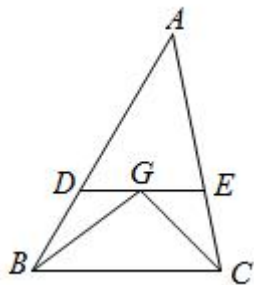
【详解】 $\because P$ 为 AB 的黄金分割点 ($AP > PB$),

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 8 = 4\sqrt{5} - 4(\text{cm})$$

故答案为: $(4\sqrt{5} - 4)\text{cm}$.

【点睛】此题考查黄金分割的定义，黄金分割物体的较大部分等于与整体的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

11. 如图，已知 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，过点 G 作 BC 的平行线交边 AB 和 AC 于点 D 、 E ，设 $\overrightarrow{GB} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{GC} = \vec{b}$. 用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ (x 、 y 为实数) 的形式表示向量 $\overrightarrow{DE} =$ _____.

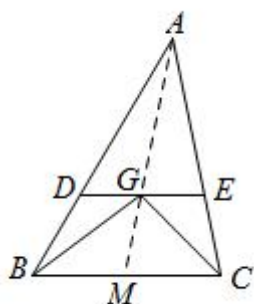


【答案】 $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】由于 G 是三角形 ABC 的重心，根据平行线分线段成比例定理与三角形重心的性质，可得到 $AG:AM = 2:3$ ，再根据平面向量加减运算可求得答案.

【详解】解：连接 AG 并延长交 BC 于点 M ,



$$\because DE \parallel BC$$

$$\therefore \frac{AG}{AM} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3}BC$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = \vec{b} - \vec{a}$$

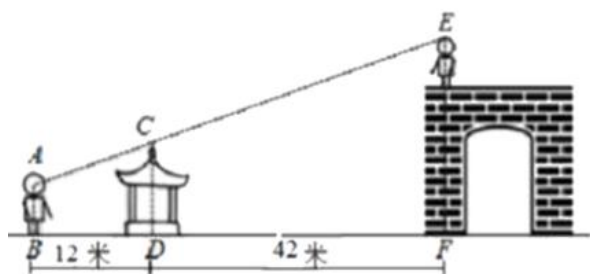
$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

故填: $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查了三角形重心的性质和平面向量基本定理，掌握三角形重心的定义，熟练运用平面向量加减运算是解答本题的关键.

12. 小明和小杰去公园游玩，小明给站在观景台边缘的小杰拍照时，发现他的眼睛、凉亭顶端、小杰的头顶三点恰好一条直线上(如图所示). 已知小明的眼睛离地面的距离 AB 为 1.6 米，凉亭的高度 CD 为 6.6 米，小明到凉亭的距离 BD 为 12 米，凉亭与观景台底部的距离 DF 为 42 米，小杰身高为 1.8 米. 那么观景台的高度为_____米.

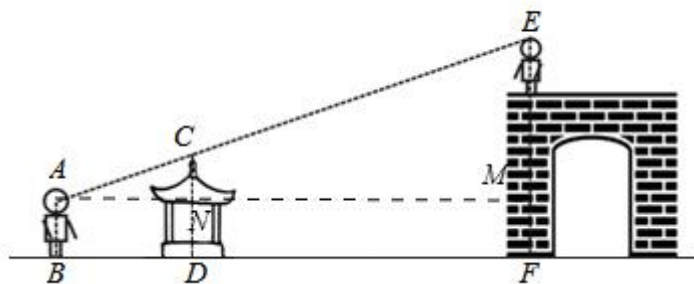


【答案】 22.3## $22\frac{3}{10}$ ## $\frac{223}{10}$

【解析】

【分析】 根据题意构造直角三角形，继而利用相似三角形的判定与性质解答.

【详解】 解：过点 A 作 $AM \perp EF$ 于点 M ，交 CD 于点 N ，



由题意得， $AN = 12$ ， $CN = 6.6 - 1.6 = 5$ ， $MN = 42$ ，

$\therefore CN \parallel EM$ ，

$\therefore \triangle ACN \sim \triangle AEM$ ，

$$\therefore \frac{CN}{EM} = \frac{AN}{AM}$$

$$\therefore \frac{5}{EM} = \frac{12}{12 + 42}$$

$$\therefore EM = 22.5,$$

$$\therefore AB = MF = 1.6,$$

$$\therefore 22.5 + 1.6 - 1.8 = 22.3 \text{ (米)}.$$

故答案为: 22.3.

【点睛】本题考查相似三角形的应用, 构造直角三角形是解题关键.

13. 已知点 $A(-3, m)$ 、 $B(-2, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 2x + 4$ 上, 则 m _____ n (填 “>”、“=” 或 “<”).

【答案】<

【解析】

【分析】根据抛物线的解析式得到对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -1$, 由抛物线开口向下, 可得在对称轴左侧, y 随 x 的增大而增大, 即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 点 $A(-3, m)$ 、 $B(-2, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 2x + 4$ 上,

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -1,$$

$\because$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore -3 < -2,$$

$$\therefore m < n,$$

故答案为: <.

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 二次函数的图象及其性质, 熟练掌握知识点是解题的关键.

14. 小球沿着坡度为 $i = 1:1.5$ 的坡面滚动了 13m, 则在这期间小球滚动的水平距离是 _____ m.

【答案】 $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】设高度为 x , 根据坡度比可得水平距离为 $1.5x$, 根据勾股定理列方程即可得到答案;

【详解】解: 设高度为 x ,

$$\therefore \text{坡度为 } i = 1:1.5,$$

$$\therefore \text{水平距离为 } 1.5x,$$

由勾股定理可得,

$$x^2 + (1.5x)^2 = 13^2,$$

解得: $x = 2\sqrt{13}$,

故答案为: $2\sqrt{13}$.

【点睛】 本题考查坡度比及勾股定理, 解题的关键是根据坡度比得到高度与水平距离的关系.

15. 计算: $\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\cot 30^\circ - \tan 45^\circ} =$ _____

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

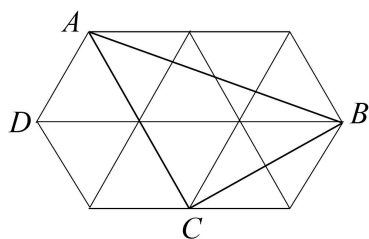
【分析】 根据特殊角三角函数代入求解即可得到答案;

【详解】 解: 原式 $= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}-1} - 1} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2 - (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}} = -\frac{1}{2}$,

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查特殊角三角函数混合运算, 解题的关键是熟练掌握特殊角三角函数值.

16. 如图, 在由正三角形构成的网格图中, A 、 B 、 C 三点均在格点上, 则 $\sin \angle BAC$ 的值为 _____.



【答案】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ## $\frac{1}{7}\sqrt{21}$

【解析】

【分析】 根据等边三角形的性质可得 $\angle ACB = 90^\circ$, 然后设正三角形构成的网格线段长为1, 分别求出直角边 AC , BC , 然后根据勾股定理求出 AB , 最后根据三角函数定理即可求出 $\sin \angle BAC$.

【详解】 解: 由正三角形的性质可知 $\angle ACB = 60^\circ + \frac{1}{2} \times 60^\circ = 90^\circ$,

设正三角形构成的网格线段长为1,

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $BC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$,

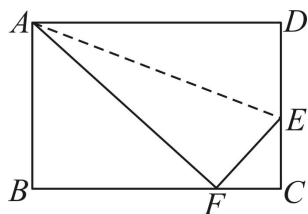
根据勾股定理, 可得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$,

$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质, 三角函数、勾股定理, 熟练掌握相关知识点是解题关键.

17. 如图, 点 E 是矩形 $ABCD$ 纸片边 CD 上一点, 如果沿着 AE 折叠矩形纸片, 恰好使点 D 落在边 BC 上的点 F 处, 已知 $BF = 6\text{cm}$, $\tan \angle BAF = \frac{3}{4}$, 那么折痕 AE 的长是_____ cm .



【答案】 $5\sqrt{5}$

【解析】

【分析】由折叠的性质可知 $AD = AF$, $DE = EF$, 由矩形的性质得到 $CD = AB$, $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, $AD = BC$, 先解 $\text{Rt}\triangle ABF$ 求出 $AB = 8\text{cm}$, $AF = 10\text{cm}$, 进而得到 $AD = BC = 10\text{cm}$, 则 $CF = 4\text{cm}$, 设 $DE = EF = x\text{cm}$, 则 $CE = (8 - x)\text{cm}$, 由勾股定理得到 $x^2 = 4^2 + (8 - x)^2$, 解方程求出 $DE = 5\text{cm}$, 则 $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 5\sqrt{5}\text{cm}$.

【详解】解: 由折叠的性质可知 $AD = AF$, $DE = EF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore CD = AB$, $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, $AD = BC$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $BF = 6\text{cm}$, $\tan \angle BAF = \frac{3}{4}$,

$\therefore AB = \frac{BF}{\tan \angle BAF} = 8\text{cm}$,

$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10\text{cm}$,

$\therefore AD = AF = BC = 10\text{cm}$,

$\therefore CF = 4\text{cm}$,

设 $DE = EF = x\text{cm}$, 则 $CE = (8 - x)\text{cm}$,

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, 由勾股定理得: $EF^2 = CF^2 + CE^2$,

$\therefore x^2 = 4^2 + (8 - x)^2$,

解得 $x = 5$,

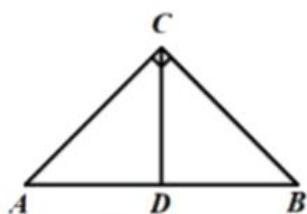
$\therefore DE = 5\text{cm}$,

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 5\sqrt{5}\text{cm},$$

故答案为: $5\sqrt{5}$.

【点睛】本题主要考查了矩形与折叠问题, 勾股定理与折叠问题, 解直角三角形, 正确求出 AD , DE 的长是解题的关键.

18. 规定: 如果经过三角形一个顶点的直线把这个三角形分成两个小三角形, 其中一个小三角形是等腰三角形, 另一个小三角形和原三角形相似, 那么符合这样条件的三角形称为“和谐三角形”, 这条直线称为这个三角形的“和谐分割线”. 例如, 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CA = CB$, CD 是斜边 AB 上的高, 其中 $\triangle ACD$ 是等腰三角形, 且 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 所以 $\triangle ABC$ 是“和谐三角形”, 直线 CD 为 $\triangle ABC$ 的“和谐分割线”. 请依据规定求解问题: 已知 $\triangle DEF$ 是“和谐三角形”, $\angle D = 42^\circ$, 当直线 EG 是 $\triangle DEF$ 的“和谐分割线”时, $\angle F$ 的度数是_____ (写出所有符合条件的情况)



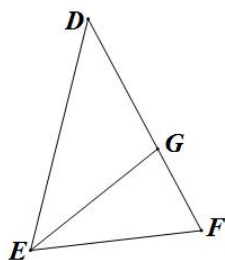
【答案】 54° 、 46° 、 32° 、 27°

【解析】

【分析】分类讨论, ① $\triangle EGF \sim \triangle DEF$, $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $EG = EF$; ② $\triangle DEG \sim \triangle DFE$, $\triangle GEF$ 是等腰三角形, $GE = GF$; ③ $\triangle DGF \sim \triangle DEF$, $\triangle DEF$ 是等腰三角形, $FE = FG$; ④ $\triangle FEG \sim \triangle FDG$, $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $DE = DG$; 根据等腰三角形的性质, 相似三角形的性质即可求解.

【详解】解: $\triangle DEF$ 是“和谐三角形”, $\angle D = 42^\circ$, EG 是 $\triangle DEF$ 的“和谐分割线”,

①根据题意, 如图所示, $\triangle EGF \sim \triangle DEF$, $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $EG = EF$,



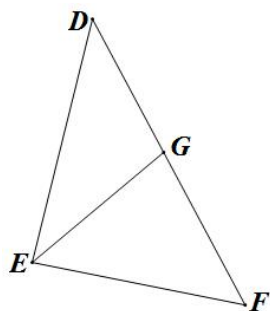
$$\therefore \angle D = \angle DEG = \angle GEF = 42^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle DEG \text{ 中, } \angle DGE = 180^\circ - \angle D - \angle DEG = 180^\circ - 42^\circ - 42^\circ = 96^\circ,$$

$\therefore \angle DGE$ 是 $\triangle EGF$ 的外角,

$$\therefore \angle F = \angle DGE - \angle GEF = 96^\circ - 42^\circ = 54^\circ;$$

②如图所示, $\triangle DEG \sim \triangle DFE$, $\triangle GEF$ 是等腰三角形, $GE = GF$,



$$\therefore \angle DEG = \angle F = \angle FEG,$$

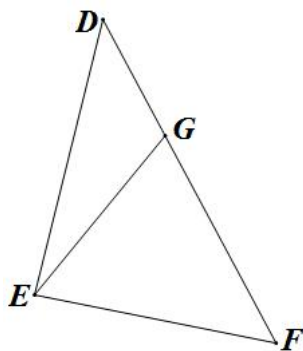
设 $\angle F = a$, 则 $\angle DEG = \angle F = \angle FEG = a$, $\angle EGF = 180^\circ - 2a$,

$\therefore \angle EGF$ 是 $\triangle DEG$ 的外角,

$\therefore \angle EGF = \angle D + \angle DEG$, 即 $180^\circ - 2a = 42^\circ + a$, 解得, $a = 46^\circ$,

$$\therefore \angle F = 46^\circ;$$

③如图所示, $\triangle DGF \sim \triangle DEF$, $\triangle DEF$ 是等腰三角形, $FE = FG$,



$$\therefore FE = FG, \angle F = \angle GED, \angle FEG = \angle FGE,$$

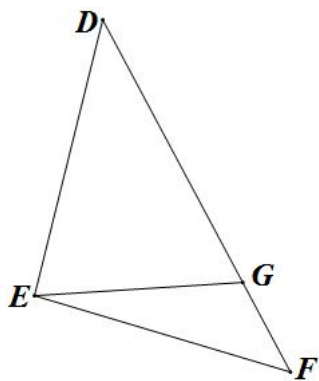
设 $\angle F = x$, 则 $\angle F = \angle GED = x$, $\angle FEG = \angle FGE = \frac{1}{2}(180^\circ - x)$,

$\therefore \angle EGF$ 是 $\triangle DEG$ 的外角,

$\therefore \angle EGF = \angle GED + \angle D$, 即 $\frac{1}{2}(180^\circ - x) = x + 42^\circ$, 解得 $x = 32^\circ$,

$$\therefore \angle F = 32^\circ;$$

④如图所示, $\triangle FEG \sim \triangle FDG$, $\triangle DEG$ 是等腰三角形, $DE = DG$,



$$\therefore \angle D = \angle GEF = 42^\circ, \quad \angle DEG = \angle DGE = \frac{1}{2}(180^\circ - 42^\circ) = 69^\circ,$$

$\therefore \angle DGE$ 是 $\triangle EFG$ 的外角,

$$\therefore \angle DGE = \angle F + \angle GEF, \quad \text{即 } 69^\circ = \angle F + 42^\circ,$$

$$\therefore \angle F = 69^\circ - 42^\circ = 27^\circ;$$

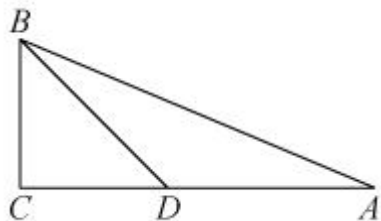
综上所述, $\triangle DEF$ 是“和谐三角形”, $\angle D = 42^\circ$, 当直线 EG 是 $\triangle DEF$ 的“和谐分割线”时, $\angle F$ 的度数是 $54^\circ, 46^\circ, 32^\circ, 27^\circ$,

故答案为: $54^\circ, 46^\circ, 32^\circ, 27^\circ$.

【点睛】本题主要考查等腰三角形, 相似三角形的综合, 掌握等腰三角形的性质, 相似三角形的性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 $10+10+10+10+12+12+14=78$ 分)

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ, \sin A = \frac{5}{13}$. 点 D 为边 AC 上一点, $\angle BDC = 45^\circ, AD = 7$, 求 CD 的长.



【答案】5

【解析】

【分析】解直角三角形 ABC , 表示出 AB, AC 的长, 再根据 $\text{Rt}\triangle BCD$ 是等腰直角三角形, 求得 CD 即可.

【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$,

设 $BC = 5k, AB = 13k$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(13k)^2 - (5k)^2} = 12k,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle BDC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle CBD = \angle BDC = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = CD = 5k.$$

$$\therefore AD = AC - CD = 7k,$$

$$\therefore AD = 7,$$

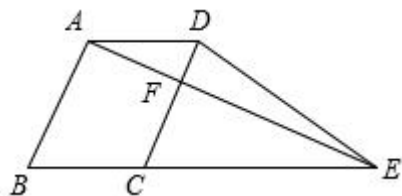
$$\therefore 7 = 7k,$$

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore CD = 5k = 5$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形, 勾股定理, 熟练进行解直角三角形是解题的关键.

20. 如图, 点 E 在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 的延长线上, 且 $CE = 2BC$, AE 与 CD 交于点 F . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$.



(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DE}$;

(2) 求作: 向量 $\overrightarrow{EF}$ 分别在向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{ED}$ 方向上的分向量. (不要求写作法, 但要保留作图痕迹, 并指出所作图中表示结论的分向量)

【答案】 (1) $\vec{a} + 2\vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质 $AD \parallel BE$ 且 $AD = BC$. $AB \parallel DC$ 且 $AB = DC$, 根据三角形法则得出 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \vec{a} + 2\vec{b}$;

(2) 作 $FM \parallel AD$, $EN = FM$, 根据平行四边形法则, 得出向量 $\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{EN}$ 为向量 $\overrightarrow{EF}$ 分别在向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{ED}$ 方向上的分向量, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because ABCD$,

$\therefore AD \parallel BE$ 且 $AD = BC$. $AB \parallel DC$ 且 $AB = DC$

$$\therefore CE = 2BC,$$

$$\therefore CE = 2AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AD} = 2\vec{b},$$

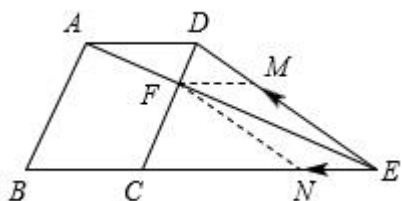
$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \vec{a} + 2\vec{b};$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，作 $FM \parallel AD$, $EN = FM$ ，根据平行四边形法则，

向量 $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$ 为向量 $\overrightarrow{EF}$ 分别在向量 $\overrightarrow{EC}$ 、 $\overrightarrow{ED}$ 方向上的分向量



【点睛】本题考查了平行四边形的性质，平面向量的线性计算，掌握平面向量的线性运算是解题的关键.

21. 已知二次函数 $y = -3x^2 + 6x + 9$.

(1) 用配方法把二次函数 $y = -3x^2 + 6x + 9$ 化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式，并指出这个函数图像的开口方向、对称轴和顶点的坐标；

(2) 如果将该函数图像向右平移 2 个单位，所得的新函数的图像与 x 轴交于点 A, B (点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ，求四边形 $DACB$ 的面积.

【答案】(1) $y = -3(x-1)^2 + 12$ ，开口方向向下，对称轴为直线 $x=1$ ，顶点的坐标为 $(1, 12)$

(2) 54

【解析】

【分析】(1) 根据二次函数的图象与性质解答即可；

(2) 根据二次函数图象平移规律“上加下减”求得新抛物线的解析式，求出 A, B, C, D 坐标即可求解.

【小问 1 详解】

$$\text{解： } y = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x) + 9 = -3(x^2 - 2x + 1) + 12 = -3(x-1)^2 + 12$$

$\therefore$ 该二次函数的顶点式为 $y = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x-1)^2 + 12$ ，函数图像的开口方向向下，对称轴为直线 $x=1$ ，顶点的坐标为 $(1, 12)$ ；

【小问2详解】

解：平移后的新抛物线的解析式为 $y = -3(x-3)^2 + 12$ ，得到顶点 $D(3, 12)$ ，

当 $y = 0$ 时，由 $-3(x-3)^2 + 12 = 0$ 得： $x_1 = 1$ ， $x_2 = 5$ ，

即点 $A(1, 0)$ 、 $B(5, 0)$ ，即 $AB = 4$ ，

当 $x = 0$ 时，由 $y = -15$

即点 $C(0, -15)$ ，

$$\therefore \text{四边形 } DACB \text{ 的面积} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 + \frac{1}{2} \times 4 \times 15 = 24 + 30 = 54$$

【点睛】本题考查二次函数的图象与性质、二次函数图象的平移、坐标与图形、二次函数与坐标轴的交点问题，熟练掌握二次函数的图象与性质是解答的关键。

22. 如图，是一个放置于水平桌面的平板支架的示意图，底座的高 AB 为 5cm ，宽 MN 为 10cm ，点 A 是 MN 的中点，连杆 BC 、 CD 的长度分别为 18.5cm 和 15cm ， $\angle CBA = 150^\circ$ ，且连杆 BC 、 CD 与 AB 始终在同一平面内。



(1) 求点 C 到水平桌面的距离；

(2) 产品说明书提示，若点 D 与 A 的水平距离超过 AN 的长度，则该支架会倾倒。现将 $\angle DCB$ 调节为 80° ，此时支架会倾倒吗？（参考数据： $\tan 20^\circ \approx 0.36$, $\cot 20^\circ \approx 2.75$, $\sin 20^\circ \approx 0.34$, $\cos 20^\circ \approx 0.94$ ）

【答案】(1) 点 C 与水平桌面的距离为 $\frac{37\sqrt{3} + 20}{4}\text{cm}$

(2) 支架不会倾倒

【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 $CE \perp MN$ 于 E ，过点 B 作 $BF \perp CE$ 于 F ，由题意得，

$AB = EF = 5\text{cm}$, $\angle CBF = 60^\circ$, 解 $\text{Rt}\triangle BFC$ 求出 $CF = \frac{37\sqrt{3}}{4}\text{cm}$, 则

$$CE = CF + EF = \frac{37\sqrt{3} + 20}{4}\text{cm};$$

(2) 过点 C 作 $CG \parallel BF$, 过点作 $DH \perp CG$ 于 H , DH 与 BF 交于点 K . 先解 $\text{Rt}\triangle CDH$ 求出 $CH = FK = 14.1\text{cm}$, 再解在 $\text{Rt}\triangle BFC$ 求出 $BF = 9.25\text{cm}$, 即可得到 $BK = 4.85\text{cm}$, 由此即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 过点 C 作 $CE \perp MN$ 于 E , 过点 B 作 $BF \perp CE$ 于 F .

由题意可得, $AB = EF = 5\text{cm}$, $\angle CBF = 60^\circ$,

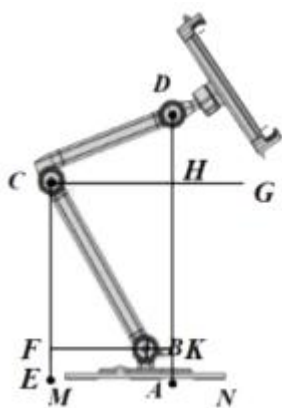
在 $\text{Rt}\triangle BFC$ 中, $\angle BFC = 90^\circ$, $\angle CBF = 60^\circ$, $BC = 18.5\text{cm}$,

$$\therefore \sin \angle CBF = \frac{CF}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CF}{\frac{37}{2}},$$

$$\therefore CF = \frac{37\sqrt{3}}{4}\text{cm}$$

$$\therefore CE = CF + EF = \frac{37\sqrt{3} + 20}{4}\text{cm},$$

$$\therefore \text{此时点 } C \text{ 与水平桌面的距离为 } \frac{37\sqrt{3} + 20}{4}\text{cm}.$$



【小问 2 详解】

解: 过点 C 作 $CG \parallel BF$, 过点作 $DH \perp CG$ 于 H , DH 与 BF 交于点 K .

由题意可知, 在 $\text{Rt}\triangle CDH$ 中, $\angle CDH = 90^\circ$, $\angle DCH = 20^\circ$, $CH = FK$, $CD = 15\text{cm}$,

$$\therefore \cos \angle DCH = \frac{CH}{CD}, \text{ 即 } 0.94 = \frac{CH}{15}$$

$$\therefore CH = FK = 14.1\text{cm},$$

在 $\text{Rt}\triangle BFC$ 中 $\angle BFC = 90^\circ$, $\angle CBF = 60^\circ$, $BC = 18.5\text{cm}$,

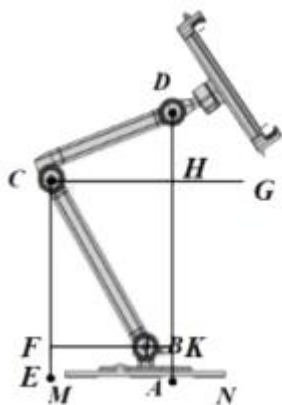
$$\therefore \cos \angle CBF = \frac{BF}{BC}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{BF}{18.5},$$

$$\therefore BF = 9.25\text{cm},$$

$$\therefore BK = KF - BF = CH - BF = 4.85\text{cm}$$

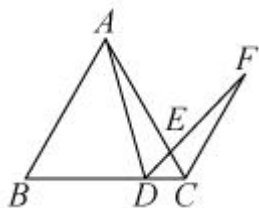
$$\therefore BK = 4.85 < 5,$$

$\therefore$ 支架不会倾倒.



【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的实际应用，矩形的性质与判定，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

23. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， D 、 E 分别是边 BC 、 AC 上的点，且 $BC \cdot CE = BD \cdot DC$. 在 DE 的延长线上取点 F ，使得 $DF = AD$ ，联结 CF .



(1) 求证: $\angle ADE = 60^\circ$;

(2) 求证: $CF \parallel AB$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，得到 $\angle BAD = \angle CDE$ ，根据 $\angle ADC = \angle ADE + \angle CDE$ ， $\angle ADC = \angle B + \angle BAD$ ，即可证明 $\angle ADE = \angle B = 60^\circ$ ；

(2) 联结 AF ，先证明 $\triangle ADF$ 是等边三角形，得到 $\angle AFD = 60^\circ$ ，进而证明 $\triangle AEF \sim \triangle DEC$ ，

$\triangle AED \sim \triangle FEC$ ，从而得到 $\angle FCA = \angle ADF = 60^\circ$ ， $\angle B + \angle FCB = 180^\circ$ ，即可证明 $CF \parallel AB$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 60^\circ, \quad AB = BC$$

$$\therefore BC \cdot CE = BD \cdot DC,$$

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{BD}{CE}$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE + \angle CDE, \quad \angle ADC = \angle B + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B = 60^\circ;$$

【小问 2 详解】

证明：如图，联结 AF ，

$$\therefore DF = AD, \quad \text{且 } \angle ADF = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADF \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore \angle AFD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ACB = 60^\circ, \quad \angle AEF = \angle DEC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{EF}{EC},$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{EC},$$

$$\text{又 } \therefore \angle AED = \angle FEC,$$

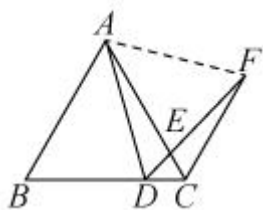
$$\therefore \triangle AED \sim \triangle FEC,$$

$$\therefore \angle FCA = \angle ADF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ, \quad \angle FCB = \angle FCA + \angle ACB = 120^\circ,$$

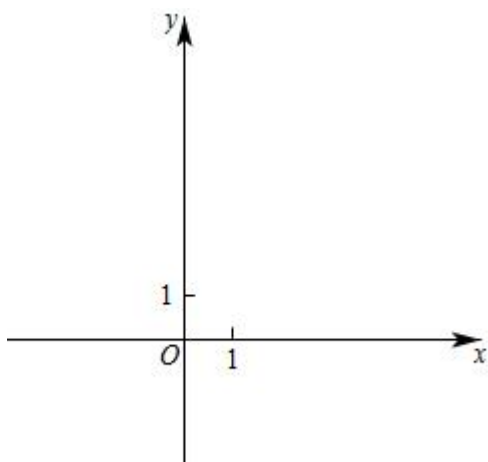
$$\therefore \angle B + \angle FCB = 180^\circ,$$

$\therefore CF \parallel AB$.



【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，等边三角形的性质等知识，熟知相似三角形的判定定理和性质定理，根据题意添加适当辅助线是解题关键，

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 与 y 轴相交于点 C .



(1) 求抛物线的表达式；

(2) 点 P 是第一象限内抛物线上的一个动点，过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴，垂足为点 D ，直线 PD 与直线 BC 相交于点 E .

①当 $CP = CE$ 时，求点 P 的坐标；

②联结 AC ，过点 P 作直线 AC 的平行线，交 x 轴于点 F ，当 $\angle BPF = \angle CBA$ 时，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$

(2) ① $P\left(2, \frac{9}{2}\right)$; ② $P(3, 3)$

【解析】

【分析】(1) 根据待定系数法求解即可；

(2) ①过点 C 作 CH 垂直于 PD ，垂足为点 H ，根据三线合一的性质，得出 $PH = HE$ ，再根据平行线的判定，得出 $CH \parallel OB$ ，再根据平行线的性质，得出 $\angle HCE = \angle CBO$ ，再根据正切的定义，得出

$\frac{EH}{CH} = \frac{OC}{OB} = \frac{3}{4}$ ，然后设 $CH = 4k$ ，则 $PH = EH = 3k$ ，再根据线段之间的数量关系，得出 $PD = 3 + 3k$ ，

进而得出点 P 坐标为 $(4k, 3+3k)$ ，再把点 P 的坐标代入 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$ ，计算即可得出点 P 的坐标；

②根据相似三角形的判定，得出 $\triangle PFB \sim \triangle BAC$ ，再根据两点之间的距离和勾股定理，得出 $AB = BC = 5$ ，

再根据相似三角形的性质，得出 $PF = PB$ ，再根据三线合一的性质，得出 $FD = BD = \frac{1}{2}FB$ ，然后设

$P\left(x, -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3\right)$ ， $x > 0$ ，再根据正切的定义，得出 $\tan \angle CAB = \tan \angle BFP$ ，进而得出

$$\frac{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3}{4-x} = 3, \text{ 解出即可得出点 } P \text{ 的坐标.}$$

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(4, 0)$

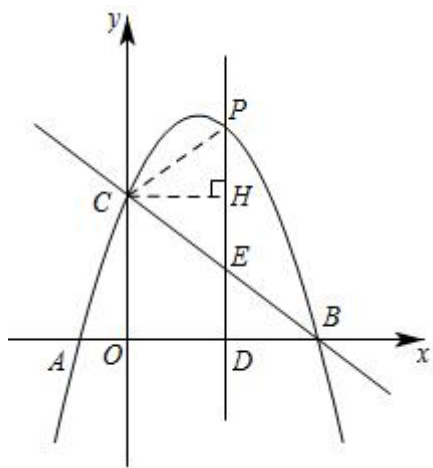
$$\therefore \text{可得: } \begin{cases} 0 = a - b + 3 \\ 0 = 16a + 4b + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{3}{4}, b = \frac{9}{4},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3;$$

【小问 2 详解】

解：①如图，过点 C 作 CH 垂直于 PD ，垂足为点 H ，



$$\therefore CP = CE, CH \perp PE,$$

$$\therefore PH = HE,$$

$$\therefore C(0, 3), B(4, 0),$$

$$\therefore OC = 3, OB = 4,$$

$$\because CH \perp PD, PD \perp OB,$$

$$\therefore CH \parallel OB,$$

$$\therefore \angle HCE = \angle CBO,$$

$$\therefore \tan \angle HCE = \tan \angle CBO,$$

$$\therefore \frac{EH}{CH} = \frac{OC}{OB} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } CH = 4k, \text{ 则 } PH = EH = 3k,$$

$$\therefore PD = HD + HP = OC + HP = 3 + 3k,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } (4k, 3 + 3k),$$

$$\text{又 } \because \text{点 } P \text{ 在抛物线 } y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3 \text{ 上,}$$

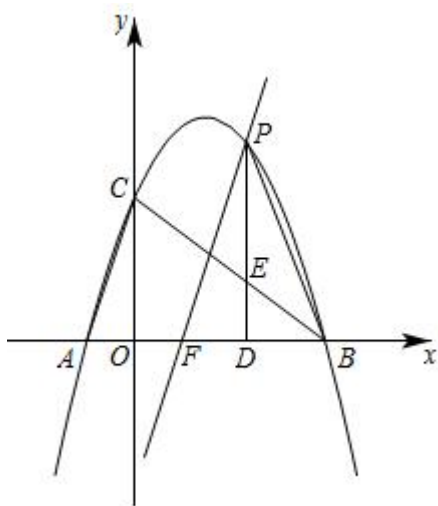
$$\therefore 3 + 3k = -\frac{3}{4} \times (4k)^2 + \frac{9}{4} \times (4k) + 3,$$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{2}, k = 0 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore 4k = 4 \times \frac{1}{2} = 2, 3 + 3k = 3 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2},$$

$$\therefore P\left(2, \frac{9}{2}\right).$$

②如图,



$$\because PF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle PFB,$$

$$\text{又 } \because \angle BPF = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle PFB \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore AB = 4 - (-1) = 5, \quad BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

$$\therefore AB = BC = 5,$$

$$\therefore PF = PB,$$

$$\text{又} \because PD \perp OB,$$

$$\therefore FD = BD = \frac{1}{2}FB,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 在抛物线 } y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3 \text{ 上,}$$

$$\text{设 } P\left(x, -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3\right), \quad x > 0.$$

$$\therefore \angle CAB = \angle BFP,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \tan \angle BFP,$$

$$\therefore \frac{PD}{FD} = \frac{CO}{AO} = 3.$$

$$\text{即 } \frac{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3}{4 - x} = 3,$$

$$\text{解得: } x = 3, \quad x = 4 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3 = -\frac{3}{4} \times 3^2 + \frac{9}{4} \times 3 + 3 = 3,$$

$$\therefore P(3, 3).$$

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、三线合一的性质、平行线的判定与性质、正切的定义、坐标与图形、解一元二次方程、两点之间的距离、勾股定理、相似三角形的判定与性质，解本题的关键在熟练掌握相关的性质定理，并正确作出辅助线.

25. 如图 1，已知菱形 $ABCD$ ，点 E 在边 BC 上， $\angle BFE = \angle ABC$ ， AE 交对角线 BD 于点 F .

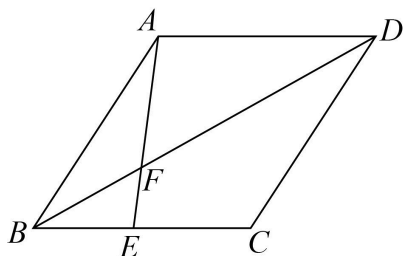


图1

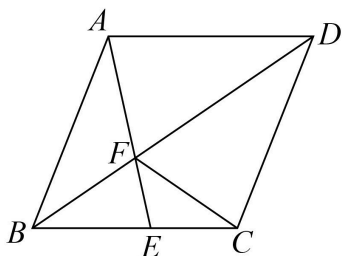


图2

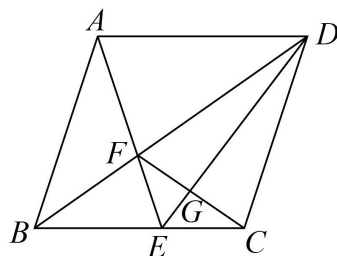


图3

(1) 求证 $\triangle ABF \sim \triangle DBA$;

(2) 如图 2，联结 CF .

①当 $\triangle CEF$ 为直角三角形时, 求 $\angle ABC$ 的大小;

②如图 3, 联结 DE , 当 $DE \perp FC$ 时, 求 $\cos \angle ABD$ 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) ① 60° 或 45° ; ② $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 由菱形的性质和平角的性质得 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$, $\angle BFE + \angle AFB = 180^\circ$, 已知 $\angle ABC = \angle BFE$, 等量代换得 $\angle AFB = \angle BAD$, 公共角 $\angle ABF = \angle DBA$, 即可得证;

(2) ①设 $\angle ABD = \alpha$, 由菱形的性质 $\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = 2\alpha$, 由 (1) $\triangle ABF \sim \triangle ABD$, 根据相似三角形的性质得 $\angle ADB = \angle BAF = \alpha$, 故 $\angle AEC = \angle BAF + \angle ABC = 3\alpha$, 根据菱形的性质易得 $\triangle ABF \cong \triangle CBF$, 再由全等三角形的性质得 $\angle BCF = \angle BAF = \alpha$, 再分情况讨论当 $\triangle CEF$ 为直角三角形时, $\angle ABC$ 的大小;

②联结 AC , 交 BD 于点 O , 记 DE 分别交 CF 、 AC 于点 G 、 H , 由菱形的性质得 $AC \perp BD$, 根据直角三角形的性质得 $\angle BCO + \angle OBC = 90^\circ$, 由 $DE \perp CF$, 得 $\angle DEC + \angle FCE = 90^\circ$, 根据相似三角形的性质和菱形的性质得 $\angle FCE = \angle FAB = \angle OBC$, 由等角的余角相等得 $\angle DEC = \angle BCO$, 由等角对等边及平行线分线段成比例可得四边形 $AECD$ 为等腰梯形, 易得 $\angle FEC = \angle BAD$, $EF = EC$, 由 $DE \perp FC$, 可得 $DC = DF = BC$, 设 $BF = x$, $DC = DF = BC = 1$, 则 $BD = BF + FD = x + 1$, 由相似三角形的性质解得 BF , 由菱形的性质求得 BO , 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BFE + \angle AFB = 180^\circ \text{ 且 } \angle ABC = \angle BFE,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle BAD.$$

$$\text{又} \angle ABF = \angle DBA,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle DBA.$$

【小问 2 详解】

解: ①设 $\angle ABD = \alpha$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD, \quad BD \text{ 平分 } \angle ABC.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \alpha, \quad \angle CBD = \angle ABD = \alpha,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = 2\alpha,$$

$$\because \triangle ABF \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle BAF = \alpha,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BAF + \angle ABC = 3\alpha,$$

$$\because BA = BC, \angle CBD = \angle ABD, BF = BF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle BAF = \alpha,$$

在 $\triangle CEF$ 中, $\angle BCF = \alpha$, $\angle AEC = 3\alpha$, 故 $\angle EFC = 180^\circ - 4\alpha$,

$\therefore \triangle CEF$ 是直角三角形,

$\therefore$ 有以下三种可能的情形:

一、 $\angle BCF = \alpha = 90^\circ$, 此时 $\angle ABC = 2\alpha = 180^\circ$, 不符合题意, 应舍去;

二、 $\angle AEC = 3\alpha = 90^\circ$, 此时 $\angle ABC = 2\alpha = 60^\circ$;

三、 $\angle EFC = 180^\circ - 4\alpha = 90^\circ$, 此时 $4\alpha = 90^\circ$, $\angle ABC = 2\alpha = 45^\circ$;

综上所述, 当 $\triangle CEF$ 为直角三角形时, 求 $\angle ABC$ 的大小为 60° 或 45° .

②联结 AC , 交 BD 于点 O , 记 DE 分别交 CF 、 AC 于点 G 、 H .

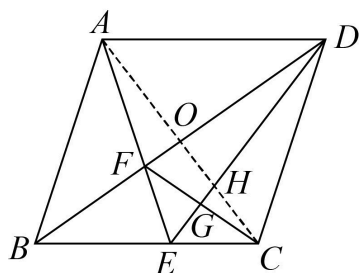


图3

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCO + \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp CF,$$

$$\therefore \angle EGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC + \angle FCE = 90^\circ,$$

$$\because \triangle ABF \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle FAB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle FAB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCO,$$

$$\therefore HE = HC.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{HE}{DE} = \frac{HC}{AC},$$

$$\therefore DE = AC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为等腰梯形.

$$\therefore \angle FEC = \angle ECD.$$

$$\text{又} \because \angle BAD = \angle ECD,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle BAD.$$

$$\text{又} \because \angle CFE = \angle ECF,$$

$$\therefore EF = EC.$$

$$\text{又} \because DE \perp FC,$$

$$\therefore DC = DF = BC,$$

设 $BF = x$, $DC = DF = BC = 1$, 则 $BD = BF + FD = x + 1$,

$$\because \triangle ABF \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{AB}{BD}, \text{ 即 } \frac{x}{1} = \frac{1}{x+1},$$

$$\text{解得 } BF = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore BO = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 \right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BO}{AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，等腰梯形的性质，锐角三角函数，直角三角形的性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

